UNIVERSIDADE DE UBERABA - UNIUBE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

JOSÉ DIVINO NEVES

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE *FUNÇÃO*

UBERABA
2015

JOSÉ DIVINO NEVES

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE *FUNÇÃO*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito final para obtenção do título de Mestre em Educação, conforme previsto no Regimento do Programa.

Área de concentração: Educação.

Orientadora: Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende.

UBERABA

2015

José Divino Neves

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado da Universidade de Uberaba, como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Aprovada em 19/03/2015

BANCA EXAMINADORA

M R Resende

Profª Drª Marilene Ribeiro Resende
(Orientadora)
UNIUBE - Universidade de Uberaba

Profª Drª Maria do Carmo de Sousa
UFSCar – Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Orlando Fernández Aquino
UNIUBE - Universidade de Uberaba

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os professores, que desempenham o seu trabalho com carinho, determinação e entusiasmo, na esperança de que a sua missão não seja em vão.

AGRADECIMENTOS

A DEUS... se sou, se tenho, se faço, se penso, se imagino, se consigo, se realizo, tudo devo a ti. Obrigado, SENHOR, por mais essa sensação agradável de tarefa cumprida.

Aos meus pais, José Rezende das Neves e Inês Maria das Neves, que me ensinaram as primeiras aulas sobre "filosofia de vida"; aos meus irmãos, que sempre estiveram presentes em todas as etapas de minha vida.

Às minhas queridas filhas, Christiane e Ana Keila, e à minha amada esposa, Regimar, que souberam compreender minha ausência, apoiando e incentivando a minha pesquisa, facilitando assim a trajetória percorrida, compartilhando comigo as dificuldades, frustrações, vitórias e alegrias.

À Professora Drª. Marilene Ribeiro Resende, pela orientação competente, séria e carinhosa. Por acreditar em mim e percorrer comigo todos os passos dessa trajetória de pesquisa.

À Professora Drª. Vânia Maria Oliveira Vieira, pela sua especial influência na minha decisão de fazer o Mestrado.

Aos professores integrantes do programa de Mestrado da UNIUBE, pela orientação durante as aulas, seminários ou palestras: Profª. Drª. Ana Maria Esteves Bortolanza, Prof. Dr. Gustavo Araújo Batista, Prof. Dr. José Carlos Souza Araújo, Profª. Dra. Luciana Beatriz de Oliveira B. de Carvalho, Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende, Prof. Dr. Orlando Fernández Aquino, Prof. Dr. Osvaldo Freitas de Jesus, Profª. Drª. Sálua Cecílio, Profª. Drª. Sueli Teresinha de Abreu Bernardes, Profª. Drª. Vânia Maria de Oliveira Vieira.

Às professoras de matemática Giovanna Caiado e Sandra Oliveira, amigas e companheiras do Projeto OBEDUC (Observatório de Educação), pelo período de reuniões, discussões e aprendizagem sobre aspectos da Teoria Histórico-Cultural e sua aplicação na educação.

À professora de matemática do 9º ano 'C', Valéria Ciabotti, pelo apoio, colaboração e participação na realização desta pesquisa.

Aos alunos da turma do 9º ano ‘C’ - 2014 da Escola Municipal Urbana “Frei Eugênio”, que, como sujeitos da pesquisa, contribuíram de forma significativa e determinante.

À equipe de Direção e Coordenação da Escola Municipal “Frei Eugênio”, que permitiu de forma irrestrita e colaborativa a realização da pesquisa.

Aos estimados, Prof. Dr. Orlando Fernández Aquino, Profª. Drª. Ana Maria Esteves Bortolanza e Profª. Drª. Maria do Carmo de Sousa, pela colaboração e preciosas sugestões, por ocasião do Exame de Qualificação e também na Apresentação Final da Dissertação.

Ao Vinícius, meu amigo e companheiro do Projeto OBEDUC (Observatório de Educação), por sua colaboração em todos os momentos da pesquisa e, em especial, pela dedicação com os registros (fotos, áudio e vídeo), sem os quais a pesquisa de campo não teria a mesma qualidade.

À Érika, minha amiga e companheira do Projeto OBEDUC, pela sua participação, colaboração e acompanhamento na pesquisa de campo.

Aos meus colegas do Projeto OBEDUC, do GEPIDE (Grupo de Estudos e Pesquisas em Instrução, Desenvolvimento & Educação) e da turma do Mestrado, pelo incentivo, participação e orientações em cada momento oportuno.

À minha amiga Maria Teresinha L. S. Araújo pelo seu incentivo, motivação e companheirismo.

Aos colegas do Colégio Nossa Senhora das Dores: direção, coordenadores, professores e alunos, que compreenderam as minhas ausências e colaboraram comigo, quando precisei.

À CAPES, pela iniciativa de valorizar e patrocinar a pesquisa em educação.

À Universidade de Uberaba, pela organização e viabilização do curso de Mestrado.

“[...] é na relação com os objetos do mundo, mediada pela relação com outros seres humanos, que a criança tem a possibilidade de se apropriar das obras humanas e humanizar-se. A esse processo, Leontiev denominou de educação.”

RIGON et al., 2010

RESUMO

O objeto de pesquisa da presente dissertação é a formação do conceito de *função*, que se insere na linha de pesquisa "Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de ". O projeto é parte integrante das pesquisas iniciadas no âmbito do Programa Observatório de Educação – OBEDUC (O ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental), desenvolvido na Universidade de Uberaba, com o apoio da CAPES. A justificativa para estudar a formação do conceito de *função* está fundamentada na visão de Caraça (1984), que o considera como um dos conceitos fundamentais da matemática; no fato de que a formação dos conceitos tem papel decisivo no processo de ensino e aprendizagem e, ainda, nos baixos índices de aproveitamento obtidos pelos alunos dos anos finais do ensino fundamental nas avaliações externas. O objetivo principal da pesquisa é analisar como ocorre a formação do conceito de *função* junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental. A metodologia adotada foi a de pesquisa qualitativa numa visão dialética, com a realização de um experimento didático, conforme apontado e discutido por Freitas (2010) e Davidov (1998). Os procedimentos metodológicos foram organizados em quatro etapas compostas de pesquisa bibliográfica e documental, elaboração das atividades de ensino, desenvolvimento das atividades e análise dos dados coletados a partir dos pressupostos da teoria adotada. O referencial teórico inclui a Teoria Histórico-Cultural, cujo grande expoente é o cientista, pesquisador e humanista Vigotski; a Teoria da Atividade e do Ensino Desenvolvimental, com Leontiev e Davidov; além de outros seguidores e apoiadores dessas teorias, como Galperin, Elkonin e Talizina. Os resultados permitem considerar que há indícios de que os alunos se apropriaram dos elementos constitutivos do conceito de *função*; que o trabalho coletivo, as manifestações e expressões dos alunos e suas ações de discutir, relacionar, identificar, generalizar e avaliar foram relevantes para o alcance dos objetivos, especialmente no seu processo de desenvolvimento mental.

Palavras-chave: Experimento didático. Formação de conceitos. Ensino de *funções*. Formação de professores.

ABSTRACT

The research object of this thesis is the formation of the concept of function, which is in line research "Professional Development, Teaching Work and Teaching-Learning Process." The project is part of the research initiated under the Centre's Education Program - OBEDUC (Teaching and learning algebra in the final years of elementary school), developed at the University of Uberaba, with the support of CAPES. The rationale for studying the formation of the function concept is based on the Caraça view (1984), which defines it as one of the fundamental concepts of mathematics; the fact that the formation of concepts plays a decisive role in the teaching and learning process and also in the low approval rates obtained by the students of the final years of elementary school in external evaluations. The main objective of the research is to analyze how does the formation of the concept of function to the students of the 9th grade of elementary school. The methodology included qualitative research in a dialectical view, with the completion of a teaching experiment, as pointed out and discussed by Freitas (2010) and Davidov (1998). The methodological procedures were organized into four composite steps of literature and documents, preparation of teaching, development of activities and analysis of data collected from the assumptions of the theory adopted. The theoretical framework includes the Historic-Cultural Theory, whose great exponent is the scientist, researcher and humanist Vygotsky; the Activity Theory and Developmental Education, with Leontiev and Davidov; and other followers and supporters of these theories, as Galperin, Elkonin, and Talizina. The results support the conclusion that there is evidence that students have appropriated the constituent elements of the concept of function; the collective work, the manifestations and expressions of the students and their actions to discuss, relate to, identify, assess and generalize were relevant to the achievement of objectives, especially in their mental development.

Keywords: Teaching experiment. Concept formation. Teaching duties. Teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA – Autoavaliação.

AR – Autorregulação.

ASIP – Ação Sistemática de Intervenção Pedagógica.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

CMEC – Curso Municipal de Educação Continuada.

COAE – Condições Objetivas da Atividade de Estudo.

DMPA – Desenvolvimento da Motivação e Participação dos Alunos.

EE – Eixos Estruturantes.

EJA – Educação de Jovens e Adultos.

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio.

FC – Formação do Conceito.

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IEM – Intensivão para o Ensino Médio.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas.

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

MEC – Ministério da Educação.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática).

OBEDUC – Observatório de Educação.

OC – Objetos de Conhecimento.

OECD - Organisation for Economic Co-operation and Development – Organização para a Cooperação Econômica e Desenvolvimento.

ONG – Organização Não Governamental.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PISA – Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Avaliação de Alunos.

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático.

PPP – Projeto Político-Pedagógico.

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica.

SEMEC – Secretaria Municipal de Educação e Cultura de Uberaba.

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A minha trajetória profissional soma 30 anos de experiência como educador e professor de matemática atuando em turmas de ensino fundamental, ensino médio, além de uma curta atuação no ensino superior. Nesse período, exerci paralelamente outros cargos administrativos no serviço público municipal, incluindo o de diretor escolar. Enquanto trabalhei em regime de tempo integral, não pude pensar em melhorar a minha formação profissional. O máximo que consegui foi fazer um curso de pós-graduação, cujas aulas aconteciam às sextas-feiras à noite e aos sábados, o que me exigiu muito esforço, pois faltava o tempo necessário para pesquisar, estudar e escrever.

Sempre tive vontade de me aprofundar nos estudos, fazer um curso de mestrado a fim de buscar respostas para algumas perguntas que ecoaram ao longo da minha trajetória como professor de matemática: por que os alunos têm tantas dificuldades para aprender matemática, em especial a álgebra? As dificuldades estão ligadas à aprendizagem de conteúdos anteriores? A maneira de ensinar pode contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos? Como motivar os alunos para aprender álgebra? O que fazer para amenizar o problema do impacto da introdução das letras nos conteúdos de iniciação à álgebra?

Algumas respostas para essas questões eram ensaiadas em forma de suposições, mas sem fundamentação teórica suficiente. Possíveis respostas apontam para o fato de que os conteúdos de matemática, às vezes, são ensinados como acabados, como fim em si mesmo, com priorização da memorização em detrimento do raciocínio lógico (ROSA, 2009). Os assuntos são apresentados aos alunos da maneira como se encontram nos livros didáticos ou nos programas escolares, de forma resumida e, portanto, não os conduzem à formação dos conceitos. Esses, de forma geral, são sujeitos passivos, que apenas ouvem, anotam e estudam, tentando entender o que lhes foi informado. Essa forma de ensinar, pouco tem contribuído para o desenvolvimento dos estudantes (PERES, 2010).

Assim que me aposentei como servidor público municipal, decidi que era hora de pensar em realizar o sonho que ficou suspenso por 30 anos, pois a falta de tempo não era mais um empecilho. Quando passei pelo processo de seleção da Universidade de Uberaba e fui inserido no Projeto OBEDUC, como bolsista da CAPES, fiquei muito lisonjeado e triplamente feliz: por estar realizando o sonho de fazer um curso de mestrado na minha área de atuação; por integrar o grupo de pesquisas do Projeto OBEDUC como bolsista da CAPES e por ter a oportunidade de pesquisar sobre um tema importante da matemática, de difícil assimilação por parte da maioria dos alunos.

Este trabalho, portanto, é parte integrante das pesquisas iniciadas no âmbito do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, desenvolvido na Universidade de Uberaba com apoio da CAPES, intitulado *O ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do ensino fundamental.* Como subprojeto, o objeto de estudo é a *formação do conceito de função*, tendo como referencial teórico a abordagem Histórico-Cultural, cujo criador é Vigotski[1], que, com Davidov[2], Leontiev e outros pesquisadores soviéticos, contribuiu de forma significativa para os avanços dos estudos em psicologia, mas com aplicações bem-sucedidas no campo da educação. A psicologia da Escola Soviética é desenvolvida sob a orientação filosófica do materialismo dialético e histórico, com foco na aprendizagem e seu papel determinante no desenvolvimento do indivíduo.

Assim, o objetivo geral da pesquisa é analisar como ocorre a formação do conceito de *função* nos anos finais do ensino fundamental, a partir atividades de ensino devidamente organizadas. A questão norteadora dessa investigação pode ser expressa nos seguintes termos: *Como organizar um sistema de atividades de ensino para a formação do conceito de* função *e, particularmente os conceitos de* função afim *(de 1º grau) e* função quadrática *(de 2º grau), junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental?*

Além dessa questão geral, levantamos outras questões que nos ajudaram a conduzir o estudo:

- Como são apresentadas as concepções de álgebra e de educação algébrica na literatura científica e nos documentos oficiais?
- Como modelar teoricamente o conceito de *função*?
- Como planejar o processo de para a formação do conceito de *função* nos alunos dos anos finais do ensino fundamental?
- Como executar o sistema didático planejado para formar o conceito de *função*?

Partimos do princípio de que a maneira como organizamos as atividades de ensino interfere diretamente na aprendizagem dos alunos. "[...] o aprendizado <u>adequadamente</u>

---

[1] A grafia do nome do autor é encontrada de várias formas: Vygotsky, Vygotski, Vigotsky, Vigotski. Nesta pesquisa, optamos por usar apenas Vigotski. No entanto, manteremos a grafia original nas referências e citações.

[2] A grafia do nome do autor é encontrada de várias formas: Davydov; Davýdov; Davidov. Nesta pesquisa, optamos por usar apenas Davidov. No entanto, manteremos a grafia original nas referências e citações.

organizado[3] resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas." (VIGOTSKI, 2010, p. 118).

A relevância e justificativa deste estudo se expressa pela importância do conceito de *função* para o ensino da matemática. Para Caraça (1984), é um dos conceitos fundamentais na matemática, ao lado dos conceitos de números e limites. A didática, por sua vez, envolve a relação entre docência e aprendizagem ou entre ensino e aprendizagem; transmissão e assimilação do conhecimento, desenvolvimento das capacidades cognoscitivas dos alunos de modo que assimilem os conhecimentos sistematizados (LIBÂNEO, 2008). A abordagem Histórico-Cultural e a Teoria da Atividade nos fornecem elementos teóricos importantes para a compreensão da relação entre aprendizagem e desenvolvimento (RODRIGUES, 2006). A partir de então o processo didático ganha uma conotação que, segundo Libâneo (2012), envolve aprender e ensinar/ensinar e aprender.

Este estudo se justifica também quando observamos os resultados de ensino e aprendizagem de matemática da educação básica do Brasil, traduzidos em baixos índices de aproveitamento nas avaliações externas como PISA, SAEB, ENEM. Ainda que não se tenham garantias da suficiência dessas avaliações para indicar possíveis falhas no processo de ensino e aprendizagem, que existam críticas quanto ao caráter quantitativo do processo avaliativo, devemos concordar que os resultados revelam falhas no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula e apontam para a necessidade de se investir em estudos e pesquisas que possam auxiliar a análise do desempenho escolar e elucidar perspectivas para a mudança desse cenário preocupante.

Segundo relatório da Organisation for Economic Co-operation and Development – OECD (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico) de 2012, o Brasil ocupa o 59º lugar em ciências, 55º em leitura e o 58º em matemática, dentre os 65 países pesquisados[4]. Os resultados do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) de 2010 revelaram que 8 em cada 10 escolas da rede pública obtiveram pontuação abaixo da média nacional[5]. A proficiência em matemática das turmas de 8ª série (9º ano) das escolas urbanas do Brasil, sem as federais, em 2005, revela que 76,64% dos alunos obtiveram aproveitamento igual ou

[3] Grifo nosso.
[4] OECD (2013) PISA 2012, Results: Executive Sumary.
[5] PORTELLA, 2012.

inferior a 60%. Considerando apenas as escolas da rede pública, esse número sobe para 82,78%[6].

Reportagem da Agência Câmara Notícias[7] revela que especialistas reunidos na Câmara dos Deputados (dia 10 de setembro de 2013) ressaltaram as deficiências do ensino da matemática na educação básica. Segundo estudo da ONG "Todos pela Educação", o percentual de alunos do 5º ano com rendimento adequado em matemática caiu de 22% em 2007 para 12% em 2011.

Na tentativa de melhorar o desempenho dos alunos, as escolas brasileiras buscam novas teorias para solucionar o problema da educação. Freitas (2010) afirma que não é suficiente ter boas intenções para promover melhorias no ensino; é necessário compreender e estabelecer relações entre prática educacional, objetivos educacionais e o alcance da educação perante os interesses e necessidades sociais. É importante que o professor saiba promover a mediação docente para que ocorra a aprendizagem.

Para Davidov (1986), a base do processo de ensino e educação é a assimilação do conteúdo pelos alunos. O programa escolar contém o eixo, a descrição sistemática e hierarquicamente organizada dos conhecimentos e habilidades a serem assimiladas. No entanto, para desenvolver o pensamento teórico, as ações mentais e a formação de conceitos, é necessário cumprir as etapas do desenvolvimento mental dos alunos. Freitas (2010) explica que, para formar o pensamento teórico, o professor deve ensinar de modo que os alunos, ao aprender, reconstruam o caminho mental de obtenção das conclusões científicas, tornando-se coparticipantes da busca científica. "Os conceitos científicos são ensinados pela formalização de regras lógicas, por meio das quais um conceito se coordena e se subordina a outros." (NÚÑEZ, 2009, p. 43).

Nos conceitos científicos, há uma predominância do geral sobre o particular, em um sistema epistêmico, afirma Núñez. No processo de formação de conceitos científicos, segundo o autor, adquire-se uma linguagem "científica", um novo sistema semântico e um novo modo de pensar e de ver a realidade. Os conceitos científicos são assimilados em processos organizados de forma pedagógica no contexto escolar. Ainda sobre os conceitos científicos, o autor afirma que:

> Na escola, o desenvolvimento do conceito científico começa pelo trabalho com o próprio conceito em si, por sua definição discursiva, seguido de atividades que pressupõem o uso consciente de atributos que compõem a definição do conceito na solução de diversas tarefas, tais como identificar,

---

[6] INEP 2011, Resultados SAEB/Prova Brasil 2011.
[7] JC e-mail 4810, de 11 de setembro de 2013.

> comparar, classificar, que são procedimentos relacionados à definição de conceito. (NÚÑEZ, 2009, p. 42).

A Teoria Histórico-Cultural, que vem sendo divulgada há algum tempo em produções acadêmicas (RODRIGUES, 2006; SOARES, 2007; PANOSSIAN, 2008; CASCONE; CAVALEIRO; MOYA, 2009; MAREGA; PERES, 2010; BELIERI, 2012), fornece elementos necessários para a realização de pesquisas em educação, é a denominação usualmente dada à corrente psicológica que explica o desenvolvimento da mente humana com base nos princípios do materialismo dialético (LIBÂNEO; FREITAS, 2013).

Vigotski, apoiando-se em pressupostos dessa matriz, procura elaborar uma teoria que compreende a natureza do comportamento humano como desenvolvimento histórico-cultural. Garantir a assimilação completa e sólida dos conceitos apresentados, conforme Talizina (2000), deve ser objetivo do professor. Essa recomendação ganha mais importância quando se trata de conceitos fundamentais nas áreas de conhecimentos, como é o de *função* em matemática.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu mediante a elaboração, aplicação e análise de um experimento didático, envolvendo um conjunto de atividades de ensino. Essas atividades foram concebidas colaborativamente com três professoras de matemática da rede pública e aplicadas aos alunos das turmas do 9º ano da Escola Municipal "Frei Eugênio". Tais atividades de ensino, que se tornaram atividades de estudo para os alunos, foram elaboradas e discutidas com fundamentos na Teoria de Atividade de Leontiev (1983) e da Atividade de Estudo de Davidov (1999). A pesquisa se caracteriza como um experimento didático-formativo (MIRANDA, 2008; ROSA, 2009; FERREIRA, 2010), ou experimento formativo (CAVALEIRO, 2009), ou experimento de ensino (PERES, 2010) ou simplesmente experimento didático[8] (SOARES, 2007; MAREGA, 2010; BELIERI, 2012); conforme vem sendo discutido por Freitas (2010) e Davidov (1998). O experimento didático-formativo, na visão de Freitas (2010), é uma investigação pedagógica de base histórico-cultural, que tem como foco da pesquisa o modo de ensinar do professor, em relação dialética com a atividade de aprendizagem dos alunos no contexto da sala de aula. É "experimento" enquanto prática de intervenção e investigação pedagógica por meio de ações metodológicas; é "didático-formativo" porque se trata de ações e intervenções elaboradas de modo a interferir na atividade do aluno favorecendo a formação de ações mentais (Freitas, 2010).

[8] Nesta pesquisa, usaremos apenas o termo experimento didático, exceto nas referências e citações.

> O experimento didático-formativo visa analisar mudanças qualitativas no pensamento do sujeito em função de seu aprender e a partir de certo modo de ensinar. As mudanças são investigadas como processos inseparáveis do aprendizado e decorrentes da realização de uma tarefa. A tarefa e seus passos estruturam-se em torno de determinado conceito científico a ser aprendido. (FREITAS, 2010, p. 60).

Para se desenvolver um experimento didático, seria necessário um tempo maior para acompanhamento do desenvolvimento dos alunos, análise e comparação dos resultados obtidos com os novos comportamentos dos alunos; entretanto, somos levados a realizá-lo em um tempo curto, pois há limites para a conclusão da pesquisa de mestrado.

Os procedimentos metodológicos foram organizados em quatro etapas, não lineares: 1) pesquisa bibliográfica e documental visando à fundamentação teórica, ao diagnóstico da realidade, ao estudo de documentos tais como Parâmetros Curriculares Nacionais, a planejamentos elaborados pelos professores de matemática do 9º ano da escola onde a pesquisa foi desenvolvida, à análise desse tema nos livros didáticos adotados pela escola para o 9º ano; 2) observação de aulas de matemática para melhor conhecer os alunos em suas características e a maneira como se envolvem com as atividades de ensino de matemática e elaboração das atividades de ensino de forma colaborativa com os professores de matemática envolvidos no projeto de pesquisa; 3) desenvolvimento das atividades com os alunos do 9º ano da Escola Municipal "Frei Eugênio", com registros de todas as atividades em diário de campo, registro dos alunos, gravações, fotos e filmagens, utilizando nomes fictícios para preservar a identidade dos alunos com a descaracterização das imagens; 4) análise dos dados coletados.

A nossa expectativa é analisar se atividades adequadamente organizadas, orientadas e apoiadas na Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade e Teoria da Atividade de Estudo promovem a aprendizagem do conceito de *função* e o desenvolvimento mental do aluno. A pesquisa foi realizada com a colaboração de três professoras de matemática da rede municipal, duas integrantes do Projeto OBEDUC e a professora das turmas do 9º ano da Escola "Frei Eugênio". O grupo reuniu-se regularmente duas vezes por mês, no segundo semestre de 2013, com o objetivo de analisar os conteúdos de álgebra dos livros didáticos; questões pertinentes aos assuntos de álgebra do ensino fundamental, a fim de elaborar atividades de estudo a serem desenvolvidas com os alunos. Nessa etapa, a pesquisa aproximou-se de um trabalho colaborativo.

As atividades de estudo foram aplicadas aos alunos do 9º ano 'C', no período normal de aulas, às quintas-feiras, duas aulas por dia, durante dez semanas. O pesquisador foi o responsável pela aplicação das atividades, mas teve a companhia de outros membros do grupo de estudos, que o ajudaram no trabalho de registros como filmagem, gravações em áudio e fotografias. A coleta de dados incluiu ainda anotações do pesquisador e dos colaboradores e também materiais produzidos pelos alunos.

A pesquisa foi estruturada em quatro capítulos. A fundamentação teórica sobre o ensino e a aprendizagem, as contribuições da Teoria Histórico-Cultural para a organização das ações docentes, a formação dos conceitos, a organização dos conteúdos de álgebra no ensino fundamental, as concepções de álgebra nos documentos oficiais e em estudiosos do assunto, a análise dos planejamentos e livros didáticos do 9º ano da escola. As fundamentações práticas sobre o ensino, a aprendizagem e a formação dos conceitos em sala de aula, estão descritas no Capítulo 1. O Capítulo 2 ficou reservado para os procedimentos metodológicos, as etapas da pesquisa, com ênfase para o diagnóstico da realidade, elaboração e desenvolvimento do experimento didático e análise dos dados coletados. Nos Capítulos 3 e 4 foram descritas as análises das atividades de ensino referentes ao conceito de *função* e também da *função* afim e *função* quadrática. Por fim, nas considerações finais, são evidenciadas as principais conclusões obtidas a partir do estudo realizado e que poderão nortear novas pesquisas ou procedimentos, visando à melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem e, consequentemente, do desempenho dos alunos, para o desenvolvimento de suas funções psíquicas superiores.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DO ESTUDO

Neste capítulo destacamos os fundamentos referentes às teorias que nortearam a nossa pesquisa, evidenciando alguns pressupostos do materialismo histórico-dialético que serviram de base para as produções de Vigotski e demais autores da Teoria Histórico-Cultural. Apontamos as contribuições desta teoria para a aprendizagem e a formação dos conceitos científicos, como, por exemplo: o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores, a formação do pensamento teórico e a Zona de Desenvolvimento Proximal. Procuramos evidenciar também a relação entre ensino desenvolvimental e aprendizagem, com ênfase para as atividades de estudo e a formação de conceitos. Escrevemos, também, sobre a álgebra e a educação algébrica no ensino fundamental, as *funções* nos documentos educacionais, a formação do conceito de *função* e a evolução histórica desse conceito.

1.1 Contribuições da Teoria Histórico-Cultural para a aprendizagem e a formação dos conceitos

A psicologia da Escola Soviética é desenvolvida sob a orientação filosófica do materialismo dialético e histórico, com foco na aprendizagem e seu papel determinante no desenvolvimento do indivíduo.

> Lev Sememovich Vigotski (1896-1934), fundador da psicologia histórico-cultural, formou juntamente com Alexander Romanovich Luria (1902-1977) e Alexei Nikolaievich Leontiev (1903-1979) o grupo, conhecido por Troika, que constituiu a primeira geração da Escola Soviética. As produções destes pesquisadores se apoiaram teórica e metodologicamente nos pressupostos do materialismo histórico e dialético, em especial, nas ideias filosóficas de Marx e Engels e no conceito de dialética. Suas pesquisas investigaram a constituição das funções psicológicas e da consciência na relação entre a filogênese e a ontogênese, destacando o papel da mediação e da cultura nesse processo. (MORETTI, 2013, p. 7).

Os pressupostos filosóficos do materialismo dialético e histórico de Marx serviram de orientação para o desenvolvimento da psicologia da Escola Soviética, com foco na aprendizagem e no desenvolvimento do indivíduo. Segundo Rigon (2010), "[...] não é possível compreender a atividade humana sem sua relação com a consciência, pois essa duas categorias formam uma unidade dialética". Davidov (1986) explica que a lógica dialética está associada às leis do desenvolvimento.

> [...] a lógica dialética - como ciência filosófica do pensamento - deve ser considerada a doutrina das leis objetivas, universais e necessárias do mundo natural, da sociedade e de todo o conjunto da cognição produzida pelo ser humano. Neste sentido filosófico, o pensamento (cognição) não deve ser reduzido a um processo psicológico subjetivo. As leis universais do pensamento, no final de contas, correspondem às leis universais do desenvolvimento do mundo natural e da sociedade, enquanto que a lógica e a teoria de cognição correspondem à teoria de seu desenvolvimento. (DAVIDOV, 1986, p. 10).

O autor afirma, ainda, que "A lógica dialética estuda e descreve as formas historicamente significativas e universais da atividade prática e de pensamento das pessoas, as quais estão na base do desenvolvimento de toda a cultura material e espiritual [e intelectual] da sociedade." (DAVIDOV, 1986, p. 12).

Para Davidov (1999), é necessário formular o pensamento dialético em todas as etapas da educação para desenvolver nos alunos capacidades criativas, ativismo, independência, enfim, o desenvolvimento de sua personalidade, pois "[...] somente a consciência e o pensamento dialéticos é que são capazes de solucionar as contradições. Por isso o que se costuma chamar de pensamento teórico é que é o pensamento dialético." (DAVIDOV, 1999, p. 6).

Assim, podemos evidenciar como principais contribuições filosóficas do materialismo histórico-dialético para a educação:

a) as ideias (o pensamento) nascem da relação com a matéria (objetos);
b) o período histórico influencia diretamente as ações do indivíduo;
c) o pensamento dialético resulta em pensamento teórico (conhecimento; desenvolvimento).

Considerando que nosso propósito como pesquisador é analisar o processo ensino e aprendizagem, procuramos subsídios na Teoria Histórico-Cultural, cujo fundador é Vigotski, e cuja denominação usual é atribuída à corrente psicológica que explica o desenvolvimento da mente humana com base nos princípios do materialismo dialético (LIBÂNEO; FREITAS, 2013). Vigotski, apoiando-se em pressupostos dessa matriz, procura elaborar uma teoria que compreenda a natureza do comportamento humano como parte do desenvolvimento histórico.

Lev Semenovich Vigotski nasceu em 1896, na Bielorrússia, país que fez parte da extinta União Soviética. Faleceu em 1934, aos 37 anos de idade, vítima de tuberculose. Após a Revolução Russa, formou com Leontiev e Lúria um grupo de jovens intelectuais, em busca de uma nova psicologia. Em pouco mais de dez anos de atividade, escreveu cerca de 200 trabalhos científicos.

É nesse contexto de mudanças radicais, de contradições e de crise na psicologia, que Vigotski produz sua teoria junto com outros pesquisadores. Ele não se preocupou somente com teorias; mas também com o contexto histórico, pois não adiantava apenas trocar o capitalismo pelo comunismo; era necessário revolucionar todo o processo de trabalho, de produção e de relações sociais.

Nos dez anos de atividade científica de Vigotski, conforme explica Shuare (2013), podemos destacar três períodos de sua criação: um primeiro período dedicado à defectologia, ou seja, aos problemas psicológicos ligados à deficiência. No segundo, entre 1927 e 1931, ele se dedicou a estudar o papel da psicologia como instrumento - o período instrumental – quando desenvolve um conceito fundamental de sua obra, a importância da cultura na constituição psíquica do homem. E um terceiro período, de 1931 a 1934, em que Vigotski trata fundamentalmente da relação entre a educação e o ensino.

A base da Teoria Histórico-Cultural é a compreensão do caráter histórico do desenvolvimento das funções psíquicas superiores[9]. Ele desenvolveu o método histórico-cultural a partir da articulação entre os aspectos externos e internos do indivíduo, de maneira dialética, considerando sempre as relações entre o sujeito e a sociedade à qual pertence. Para o autor, todo conhecimento é construído a partir da inter-relação entre as pessoas e da intrarrelação do indivíduo. Ao estudar o ser humano é necessário considerar, numa perspectiva dialética, o seu desenvolvimento natural e cultural.

Estudando a natureza psicológica no processo de formação de conceitos, Vigotski (2009) afirma que os métodos tradicionais de estudos sobre os conceitos eram divididos em dois grupos básicos: o método de definição, que consiste em investigar conceitos já formados, por meio da definição verbal de seus conteúdos; e o método da abstração, que está relacionado com as funções e os processos psicológicos que fundamentam o processo de formação de conceitos com base em experiências diretas sobre a gênese do conceito. Segundo o autor, os dois métodos ignoram o papel da palavra e do símbolo no processo de formação de conceitos. Para ele, a palavra "[...] é o traço distintivo central de todo o processo.". O método de estudo de Vigotski sobre o processo de formação de conceitos apresenta duas partes: o

---

[9] Ações conscientes controladas, a atenção voluntária, a memória ativa, o pensamento abstrato, a percepção, o comportamento intencional. São consideradas superiores porque se diferenciam de mecanismos elementares e ações automatizadas.

material que serve de base à elaboração do conceito, e a palavra através da qual ele surge (VYGOTSKY, 2009, p. 153).

Vigotski considera a formação dos conceitos como fator determinante na evolução do pensamento verbal nas crianças. A evolução conceitual da criança, segundo ele, é marcada por duas linhas de desenvolvimento: uma que tem a ver com o desenvolvimento espontâneo da criança no cotidiano e outra que ela desenvolve na escola. “São duas formas diferentes qualitativamente, mas que se equivalem do ponto de vista funcional.” (NÚÑEZ, 2009, p. 33). Vigotski (2009) afirma que o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e não espontâneos estão relacionados e um influencia o outro constantemente. Para ele, a diferença entre conceitos científicos e espontâneos está na relação que estabelecem com a experiência da criança e suas atitudes perante os objetos.

Resultados das pesquisas realizadas por Vigotski e seus colaboradores, segundo Núñez (2009), apontaram que a ontogênese do processo de formação de conceitos espontâneos na criança passa por três momentos ou fases básicas com diferentes estágios: pensamento sincrético, pensamento por complexos e pensamento propriamente conceitual. O pensamento sincrético está relacionado com a internalização de significados de uma determinada palavra. As palavras têm significado vago e vinculado a alguma imagem mutável na mente da criança. No pensamento por complexos, as relações se orientam por semelhanças concretas, visíveis das coisas e fenômenos. As palavras ganham sentido de generalização e agrupam objetos e fenômenos por suas semelhanças para formar os pseudoconceitos (NÚÑEZ, 2009, p. 35).

Segundo Vigotski (2009), os pseudoconceitos parecem conceitos verdadeiros, porém a sua estrutura, na realidade, não está fundamentada em um sistema lógico abstrato. A principal função dos complexos é estabelecer nexos e relações.

> Qualquer complexo factualmente presente pode levar à inclusão de um determinado elemento em um complexo. É essa a diferença principal entre um complexo e um conceito. Enquanto um conceito agrupa os objetos de acordo com atributos, as ligações que unem os elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos. (VYGOTSKY apud NÚÑEZ, 2009, p. 36).

A criança em idade escolar, com as funções mentais desenvolvidas, tais como percepção, atenção e memória, começa a assimilar os conceitos, mas ainda sem consciência; sem, no entanto, aplicá-los na solução de tarefas. Na escola, por meio da aprendizagem, é que este problema será resolvido (NÚÑEZ, 2009, p. 39). Ainda, sobre a formação de conceitos, Núñez, citando Vigotski, escreve:

> [...] a aprendizagem é uma das principais fontes de conceitos da criança em idade escolar e é também uma poderosa força que direciona seu desenvolvimento, determinando o destino de todo seu desenvolvimento, no qual a consciência e o domínio se desenvolvem, sendo mais tarde transferidos a outros conceitos e outras áreas do pensamento. A consciência chega à criança através dos portões dos conceitos científicos. (VYGOTSKY apud NÚÑEZ, 2009, p. 39-40).

Vigotski apresenta como conclusão do estudo experimental sobre a formação dos conceitos:

> Em um corte genético, a conclusão da nossa pesquisa pode ser formulada em termos de uma lei geral que estabelece: o desenvolvimento dos processos que finalmente culminam na formação de conceitos começa na fase mais precoce da infância, mas as funções intelectuais que, numa combinação específica, constituem a base psicológica do processo de formação de conceitos amadurecem, configuram-se e se desenvolvem somente na puberdade. Antes dessa idade, encontramos formações intelectuais originais que, aparentemente, são semelhantes ao verdadeiro conceito e, em decorrência dessa aparência externa, no estudo superficial podem ser tomadas como sintomas indicadores da existência de conceitos autênticos já em tenra idade. (VYGOTSKY, 2009, p. 167).

1.1.1 A formação dos conceitos científicos

A formação de conceitos, tanto dos cotidianos como dos científicos, está diretamente ligada ao desenvolvimento da linguagem. "O desenvolvimento dos conceitos, dos significados das palavras (signos linguísticos), pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar." (VIGOTSKI, 2011, p. 83).

"Descobrir a relação complexa entre a instrução e o desenvolvimento dos conceitos científicos é uma importante tarefa prática." (VIGOTSKI, 2011, p. 86). A instrução e a aprendizagem, segundo Vigotski (2011), desempenham um papel fundamental na aquisição dos conceitos. Na visão do autor, existem relações entre o desenvolvimento e a instrução; entre os processos de ensino e o desenvolvimento. Nesse sentido ele afirma que:

> Embora o processo de ensino siga a sua própria ordem lógica, desperta e orienta no cérebro da criança um sistema de processos que se encontra oculto à observação direta e que segue as suas próprias leis de desenvolvimento. A detecção destes processos de desenvolvimento estimulados pela instrução é uma das tarefas fundamentais do estudo psicológico da aprendizagem. (VIGOTSKI, 2011, p. 102).

Núñez (2009), apoiado na teoria de Vigotski, afirma que o conceito científico, segundo a lógica formal e dialética, é definido pelo conjunto de propriedades necessárias e suficientes que o definem. Trata-se de uma generalização que representa um conjunto de objetos ou fenômenos de uma mesma classe desenvolvidos pelas ciências e que se articulam com certa teoria científica. Cada conceito tem um conteúdo e um volume (extensão). O volume refere-se à classe de objetos relacionados com o conceito e que se unem por meio dele. O conteúdo de um conceito é o sistema de propriedades necessárias e suficientes (essenciais) que entram na definição do conceito. Em um conceito, quando se aumenta o conteúdo, diminui o volume (NÚÑEZ 2009, p. 40).

"Os conceitos científicos são ensinados pela formalização de regras lógicas, por meio das quais um conceito se coordena e se subordina a outros." (NÚÑEZ, 2009, p. 43). Nos conceitos científicos, há uma predominância do geral sobre o particular, em um sistema epistêmico, afirma Núñez (2009).

No processo de formação de conceitos científicos, segundo Núñez, adquire-se uma linguagem "científica", um novo sistema semântico e um novo modo de pensar e de ver a realidade. Os conceitos científicos são assimilados em processos organizados de forma pedagógica no contexto escolar. Dessa forma,

> O uso da linguagem, como linguagem científica, no processo de assimilação do conceito, contribui para o desenvolvimento dos processos psicológicos complexos, tais como a abstração, a generalização, a conscientização e a regulação da atividade de estudo das disciplinas escolares. A palavra possui dois componentes básicos que são definidos pelos termos representação material e significados. Na estrutura de cada palavra, podem ser observadas funções que diferenciam os atributos essenciais dos objetos de uma mesma classe, essas funções são a abstração e a generalização. (NÚÑEZ, 2009, p. 45).

"A influência dos conceitos científicos sobre o desenvolvimento mental da criança é análoga ao efeito resultante da aprendizagem de uma língua estrangeira." (VIGOTSKI, 2011, p. 108). Segundo o autor, os aspectos mais primitivos da linguagem são adquiridos antes dos mais complexos.

Para Núñez (2009), a mera indicação da definição e dos atributos do conceito é insuficiente para mudar o caráter espontâneo da aprendizagem. Ele afirma que:

> É preciso que se aplique o conceito na solução de tarefas que exijam usar as características essenciais como ponto de referências no processo de atividades específicas que garantam a assimilação desse conceito, atividades que exijam o uso das definições dos conceitos para a solução de tarefas. (NÚÑEZ, 2009, p. 47).

Núñez (2009), citando Talizina, aponta que "a aplicação do conceito formado na solução de tarefas orientadas à criança exige que esta se oriente pelos traços essenciais da definição do conceito para a sua solução." (NÚÑEZ, 2009, p. 47).

Para Vigotski (2009), existe uma estreita relação entre os conceitos científicos e os espontâneos. "Os conceitos científicos desenvolvem-se para baixo, através dos conceitos espontâneos; os conceitos espontâneos desenvolvem-se para cima, através dos conceitos científicos." (VIGOTSKI, 2009, p. 108). Ele explica que, no caso dos conceitos espontâneos, existe uma relação direta com o concreto, enquanto nos conceitos científicos a ação é de mediação com o objeto como conhecimento teórico. Os conceitos espontâneos que a criança adquire antes de entrar na escola auxiliam-na na formação dos conceitos científicos adquiridos na escola.

Vigotski (2009) concluiu que as generalizações de níveis anteriores se desenvolvem para compor novo estágio do desenvolvimento da generalização. Ele cita como exemplo o caso da formação dos conceitos aritméticos e dos conceitos algébricos. Os conceitos aritméticos funcionam como pré-conceitos para os conceitos algébricos.

> Os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números, e não dos objetos, significando, portanto uma nova trajetória de desenvolvimento – um novo e mais elevado plano de pensamento. (VIGOTSKI, 2009, p. 114).

1.1.2 As contribuições da Teoria da Atividade para a formação de conceitos científicos e o pensamento teórico

Davidov (1999), em seus estudos sobre psicologia pedagógica referente a orientações para elaboração de novos programas escolares de seu país, formulou quatro teses sobre tais programas. Na segunda tese ele afirma que “[...] pelos programas tradicionais, há uma tendência à formação de noções de conceitos empíricos” e, consequentemente, o cultivo do “pensamento empírico”. Segundo o autor, “[...] este pensamento corresponde ao ‘bom senso’ ou senso comum”. O pensamento empírico, apesar de ser a base para o pensamento teórico (escolar), geralmente desenvolve-se na pessoa fora da escola. Por isso, o autor afirma que “[...] o ensino tradicional não forma as bases de qualquer outro tipo de pensamento além do empírico.” (DAVIDOV, 1999, p. 7). Na sua primeira tese, o autor afirma que “[...] nos programas tradicionais, elaborados em correspondência com as exigências lógico-formais sobre o pensamento humano, o pensamento dos alunos vai do particular para o geral”, enquanto que, nos novos programas por ele sugeridos, “[...] o pensamento dos alunos move-se do geral para o particular.”.

Núñez (2009), apoiado na teoria de Davidov, afirma que a formação de conceitos científicos na escola produz uma ruptura com o pensamento cotidiano (do senso comum), exige a utilização de estratégias que contribuam para a formação do pensamento teórico. Para o autor, esse tipo de pensamento exige que o aluno se oriente em relação ao conteúdo do conceito e para as formas de estruturação do conhecimento. Os parâmetros dos objetos são estabelecidos mediante comparações. “As propriedades comuns se constituem no conteúdo dos conceitos e permitem distinguir um objeto de uma classe, dos objetos de outra classe.” (NÚÑEZ, 2009, p. 49).

Ele acrescenta, ainda, sobre a formação do pensamento teórico e a formação dos conceitos científicos, que esta deve seguir do geral para o particular:

> Na lógica da formação do pensamento teórico, a formação dos conceitos vai do universal, do geral, para suas manifestações particulares. O caminho é do abstrato ao concreto, uma vez que o conceito científico reflete os processos de transformação da relação universal em suas variadas formas particulares. Na via de cima para baixo, o processo se inicia pela própria definição dos conceitos (o abstrato) para as suas manifestações concretas, na dialética do geral ao particular, do abstrato ao concreto. Sendo assim, o conceito teórico se apoia na generalização teórica. (NÚÑEZ, 2009, p. 50).

Núñez (2009) aponta que, na opinião de Davidov, esse processo, o da abstração empírica, apresenta características como:

a) concretizar a experiência empírica do aluno;

b) exagerar o papel dos meios gráficos ilustrativos;

c) exagerar a ação da comparação no processo de formação dos conceitos. (NÚÑEZ, 2009, p. 50).

No processo de formação do pensamento teórico**,** o papel do professor é fundamental para o aprendizado dos conceitos matemáticos dos alunos. A sua principal tarefa é organizar com clareza as atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento.

> As atividades dos estudantes que estimulam o desenvolvimento do pensamento teórico supõem: a) transformação da situação inicial para revelar a relação geral do sistema que se analisa; b) modelização de forma gráfica e simbólica da relação determinada; c) transformação do modelo da relação para o estudo de suas propriedades em forma pura; d) distinguir e organizar uma série de tarefas práticas concretas particulares que se resolvem pelo método geral; e) controle do cumprimento das ações anteriores; f) avaliação da assimilação do método geral como resultado da solução da tarefa em questão. (DAVIDOV apud NÚÑEZ, 2009, p. 53-54).

Essas ações, segundo Núñez (2009), permitem que o professor e os alunos possam "encontrar a invariante conceitual e procedimental das atividades particulares. Posteriormente, devem resolver outras tarefas semelhantes para garantir a apropriação do método geral de solução, como via da formação conceitual 'de cima para baixo'." (NÚÑEZ, 2009, p. 54).

1.1.3 A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)

Segundo Vigotski (2010), o aprendizado possibilita e movimenta o processo de desenvolvimento, tornando real o que antes era apenas potencial. A mediação acontece por meio dos conhecimentos, da relação do indivíduo com o mundo e dos outros sinais que constituem a base para o desenvolvimento mental ou das funções psíquicas superiores. O autor destaca como importante, no processo de aprendizagem, a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Para ele, Zona de Desenvolvimento Proximal é o que ocorre com a aprendizagem num intervalo entre o conhecimento real (Zona de Desenvolvimento Real), determinado pela capacidade própria da criança (ou do aluno) para resolver algum problema ou atividade (aquilo que a criança/aluno realmente consegue fazer sem a ajuda de terceiros) e o desenvolvimento potencial (Zona de Desenvolvimento Potencial) que ele pode alcançar sob a orientação de um adulto (familiares, professores, outros) ou a colaboração de um companheiro mais experiente. Este processo pode ocorrer por meio de diálogos, troca de experiências, imitação, interação e inter-relação. Vigotski entende que essa interação tem papel importante no desenvolvimento da aprendizagem da criança/aluno. Na perspectiva do autor, a criança (aluno) adquire potencial para internalizar e realizar sozinha aquelas ações em que recebeu auxílio de outras pessoas. Por isso, é importante que o professor esteja atento para explorar o potencial dos alunos, proporcionando-lhes apoio e recursos para que sejam capazes de atingir níveis de conhecimentos mais elevados, além daqueles que conseguem aprender sozinhos, sem ajuda.

Nesse sentido, o professor exerce importante papel de mediação, na dinâmica das interações interpessoais e na interação dos alunos com os objetos de conhecimento. Assim, a escola desempenhará bem o seu papel, à medida que, partindo daquilo que a criança (aluno) já sabe, ela for capaz de ampliar e desafiar a construção de novos conhecimentos, ou seja, incidir na Zona de Desenvolvimento Potencial dos alunos.

1.1.4 Generalizações e formação de conceitos

Para Davidov (1986), a percepção, a representação e o conceito têm em psicologia e em didática um sentido funcional: descrevem a formação de cada novo conhecimento generalizado. Cada uma das etapas corresponde, em princípio, a determinada idade. Ele afirma que a generalização acontece com maior frequência na idade escolar primária (nas representações e tarefas de identificação). Na adolescência, acontece na base das relações e conexões dos objetos (DAVYDOV [197-], p. 31-32)[10].

Davidov ([197-]) afirma que “na formação dos conceitos elementares na escola primária e dos conceitos ‘teóricos’ na escola superior, é importante identificar, no conjunto de objetos, o elemento estável, invariante”. Para ele, a generalização é fundamental na formação dos conceitos. As generalizações teóricas ocorrem do geral para o particular, do intrínseco ao extrínseco. O autor completa dizendo que: "[...] à medida que você sobe nos níveis de educação, o conhecimento dos alunos não só cresce em volume, mas continuamente torna-se

[10] Tipos de generalización en la enseñanza: Editorial Pueblo y Educación – Ano da publicação não identificado – década de 1970.

cada vez mais preciso, aproxima a reflexão correta da realidade." (DAVYDOV [197-], p. 38). Sobre a relação objeto/conceito, ele afirma:

> A "representação viva" riqueza sensorial baseada em conceitos envolve a realização de observações dos objetos correspondentes ou suas imagens, ou seja, o método direto no ensino. Isso ajuda a formar imagens claras e precisas de percepção e representação, ajuda os alunos na transição do ato perceptivo de objetos concretos para conceitos abstratos sobre eles com base no destaque oralmente designado e traços relacionados e objetos correspondentes. (DAVYDOV [197-], p. 42).

Os meios de ensino direto, conforme Davidov ([197-]), subdividem-se em objetivos (coisas reais ou suas imagens realistas), simbólicos (desenhos, gráficos) e discursivos (descrições pormenorizadas de exemplos e situações no manual de estudo ou na fala do professor). Ele completa afirmando que “[...] o uso adequado do método direto está relacionado com a palavra orientadora do professor que direciona a atenção dos alunos para destacar precisamente as características do objeto ou grupo de objetos a serem generalizados e abstraídos.” (DAVYDOV [197-], p. 43). Davidov completa, afirmando que:

> As características de abstração, de generalização e do conceito que aparecem na psicologia e na didática coincidem em rigor com a descrição dada a elas pela lógica formal tradicional (que é às vezes chamada de "lógica escolar"). Deve confrontar essas descrições e, em seguida, esclarecer as peculiaridades do padrão de pensamento a que correspondem. (DAVYDOV [197-], p. 45).

Podemos destacar, então, como principais contribuições psicológicas da Teoria Histórico-Cultural para a educação:

a) como ocorre o processo de formação de conceitos empíricos e científicos;

b) a importância dos signos na formação dos conceitos;

c) a importância dos conceitos no processo de aprendizagem.

1.2 Ensino Desenvolvimental: a relação entre desenvolvimento e aprendizagem

Segundo Aquino (2013), uma didática que não conduza ao desenvolvimento das funções psicológicas superiores, ou seja, da formação integral da personalidade, não tem razão de existir. Para o autor, o adjetivo ‘desenvolvimental’ reforça essa orientação científica da didática. Aquino completa dizendo que “no plano da didática, a instrução, o desenvolvimento e a educação se efetivam, fundamentalmente, por meio do processo de -desenvolvimento”. Para Davidov (1999), o pensamento teórico só se desenvolve na escola, com programas organizados a partir da compreensão dialética do pensamento. Segundo o autor, é exatamente este ensino que tem o caráter desenvolvimental. Para a formação do pensamento teórico do aluno, no entanto, é necessário organizar o ensino de modo que este realize atividades adequadas para a formação desse pensamento. A essência dessa atividade está na explicação de Davidov.

> A essência da atividade e da consciência está definida, como sabemos, nas obras escritas por autores clássicos do marxismo-leninismo. A *categoria* filosófica da *atividade* é a abstração teórica de toda a prática humana que tem um caráter histórico-social. A forma inicial de todos os tipos de atividade humana é a prática histórico-social do gênero humano, ou seja, a atividade laboral, coletiva, adequada, sensório-objetal, transformadora, das pessoas. Na atividade se revela a universalidade do sujeito humano. (DAVYDOV, 1986, p. 15).

1.2.1 A Teoria da Atividade e o processo de ensino e aprendizagem

A Teoria da Atividade iniciou-se com os trabalhos de Vigotski e atualmente apresenta um caráter multidisciplinar, com aplicação estendida a outros campos ou áreas fora da educação. Além de Vigotski, a Teoria da Atividade, na tradição da psicologia russa, está associada aos nomes de seus fundadores: Leontiev, Rubenstein e Galperin; e a Atividade de Estudo se desenvolveu sob a liderança de Davydov (LAMPERT-SHEPEL, 2003, p. 1). Os psicólogos soviéticos A. N. Leontiev e V. V. Davidov também desenvolveram estudos sobre atividade humana. Citada e estudada por vários autores, a Teoria da Atividade é referencial para uma educação desenvolvimental e constitui uma abordagem teórico-metodológica para a pesquisa educacional.

Leontiev (1983) faz referências aos fundamentos marxistas para expor suas concepções acerca das relações entre a atividade e a consciência humana e aponta a Teoria da Atividade como sendo de primordial importância para essa relação. Ele definiu atividade como formação sistemática e unidade de análise para as ciências humanas.

> Na teoria de Leontiev, o conceito de atividade está associado, sobretudo, à ideia de seu caráter objetal, o que constitui o núcleo da teoria psicológica da atividade. Aqui, o objeto é entendido não como algo que existe e em si mesmo e que atua sobre o sujeito, mas como “aquilo para o qual o ato é

> dirigido... ou seja, como algo com que o ser vivo se relaciona, como o *objeto da sua atividade*, seja ela externa ou interna.” (DAVYDOV, 1986, p. 15).

A atividade, segundo esta teoria, constitui-se de ***objeto***, ***motivo***, ***necessidades***, ***condições***, ***meios de alcance***, ***ações*** e ***operações***. Assim ela é um sistema coletivo que envolve objeto e motivo. Deve ser desenvolvida por ações individuais com objetivos definidos. As ações são realizadas por meio de operações que, por sua vez, dependem das condições. Para Davidov (1999), quando se usa a palavra “atividade” de forma consciente em qualquer esfera da vida do homem, é necessário definir o conteúdo objetal de seus componentes e o conteúdo de seu produto final.

> Uma particularidade importante da atividade consiste em que ela tem sempre um caráter de objeto evidente ou não evidente, todos os seus componentes têm um ou outro conteúdo de objeto, e ela própria está obrigatoriamente dirigida para a edificação criativa de um produto material ou espiritual determinado. (DAVIDOV, 1999, p. 1).

Para Leontiev (1983), a Teoria da Atividade constitui um recurso teórico-metodológico de suma importância para o planejamento de estratégias de ensino e de aprendizagem, pois possibilita uma análise do conteúdo da atividade de aprendizagem ao delimitar a estrutura de seus componentes principais e as relações funcionais que entre eles se estabelecem. Para ele a atividade prevê uma transformação criativa da realidade atual e também do próprio homem, por meio do trabalho.

O processo de aprendizagem como processo de apropriação da experiência acumulada pela humanidade e cristalizada nos produtos objetivos da atividade coletiva (os conteúdos escolares) pelos sujeitos constitui, para Leontiev (1983), o processo de formação das capacidades especificamente humanas, cujas características são: um processo ativo por parte do sujeito e um processo que cria novas premissas para o posterior desenvolvimento da atividade.

Para Núñez (2009), a atividade de aprendizagem é também atividade de desenvolvimento em que se destacam dois objetivos: o conteúdo como objeto do conhecimento e o próprio aluno, como objeto do desenvolvimento interno de sua personalidade. Nesse segundo caso, o objeto coincide com o sujeito. A educação organizada por meio de atividades de estudo promove o desenvolvimento de funções psicológicas do aluno.

> A atividade produtiva do aluno (como processo orientado à realização de uma atividade vital, ativa, do sujeito diante da realidade) como os conceitos

> a assimilar, a relação com os outros seres humanos e a mediação por instrumentos tem um papel importante no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, pois constitui um meio para a inclusão de novas estruturas do pensamento. A estruturação racional da atividade se converte em uma necessidade e é uma via para que o aluno possa construir um modelo teórico da atividade que se pretende formar. (NÚÑEZ, 2009, p. 69).

1.2.2 Atividades de estudo e formação de conceitos

Segundo Davidov (1999), tudo o que foi dito sobre atividade "refere-se diretamente àquilo que deve ser chamado de atividade de estudo do aluno de escola". Para o autor, a atividade de estudo contém todos os componentes enumerados do conceito geral de atividade; esses componentes têm um conteúdo de objeto específico, além do princípio criativo transformador que, necessariamente, deve estar presente. Assim, o estudo escolar, posto corretamente, é exatamente a atividade de estudo das crianças. "A demanda da criança por ensinamento é exatamente a aspiração de obter conhecimento sobre o geral no objeto, ou seja, conhecimentos teóricos sobre alguma coisa por meio da experimentação com o objeto." (DAVIDOV, 1999, p. 2).

> Lá onde o mestre cria sistematicamente na sala de aula as condições que exijam dos alunos a obtenção de conhecimentos sobre o objeto por meio da experimentação com este, é onde as crianças deparam com as tarefas que exigem delas a realização da atividade de estudo. (DAVIDOV, 1999, p. 2).

Davidov (1999) cita que "Leontiev e seus alunos, ao investigarem a construção concreta da atividade humana, determinaram seus componentes, que são as necessidades e os motivos, os objetivos, as condições e meios de seu alcance, as ações e operações". A partir do conceito filosófico-pedagógico de atividade, Davidov desenvolveu a Teoria da Atividade de Estudo.

> O conceito filosófico-pedagógico de "atividade" significa transformação criativa pelas pessoas da realidade atual. A forma original desta transformação é o trabalho. Todos os tipos de atividade material e espiritual do homem — são derivados do trabalho e carregam em si um traço principal — a transformação criativa da realidade, e ao final também do próprio homem. (DAVIDOV, 1999, p. 1).

Moura (2010) caracteriza a atividade de ensino como sendo "[...] um modo de realização da educação escolar, que evidencia a semelhança dessa atividade com os processos de formação das funções psíquicas superiores, que se dão na relação mediada por instrumentos culturais, dos sujeitos com os objetos.”. O autor enfatiza que é necessário organizar o ensino com atividades adequadas para a formação do pensamento teórico do aluno. Para o autor, “a atividade de ensino do professor deve gerar e promover a atividade do aluno. Ela deve criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade.”. Davidov (1999) explica que a atividade de estudo do aluno deve conter três elementos essenciais:

1) todos os componentes enumerados do conceito geral da atividade;
2) o conteúdo do objeto específico que os distingue de qualquer outra atividade;
3) a identificação do princípio criativo ou transformador.

Se faltar um desses elementos, segundo Davidov (1999), os alunos não estão realizando a atividade de estudo propriamente dita ou a estão realizando de forma incompleta. Segundo o autor, a criança assimila certo material sob a forma de atividade de estudo somente quando ela tem uma necessidade para tal assimilação. “As necessidades e os motivos educacionais direcionam as crianças para a obtenção por eles de conhecimentos como resultados da transformação do material dado.” (DAVIDOV, 1999, p. 2). O motivo da atividade de aprendizagem, segundo Moura (2010), “deve ser, por parte dos alunos, a aquisição de conceitos teóricos, mediante ações conscientes que permitam a construção de um modo generalizado de ação”. A atuação do professor, segundo ele, como mediador da relação dos alunos com o objeto de conhecimento é fundamental para que a aprendizagem se concretize. Assim, cabe ao professor a tarefa de selecionar o material, organizar e desenvolver a atividade com os alunos, de forma a despertar neles a motivação, a vontade de aprender. A motivação está na esfera afetivo-voluntária e pode vir de influências externas, como a educação familiar; a influência de parentes ou dos colegas. Davidov explica ainda que “[...] a correta organização da atividade de estudo começa com a formação gradual, porém constante desta necessidade no aluno.”. Sem esta necessidade – seu principal componente – ela simplesmente não pode existir. Para ele, a atividade de estudo, incluindo em si os processos de aprendizagem, “[...] só se realiza quando esses processos transcorrem sob a forma de uma transformação objetiva deste ou daquele material.”. O autor afirma, ainda, que “os conhecimentos, que refletem a interligação do interno com o externo, da essência com o fenômeno, do primitivo com o derivado, são chamados de *conhecimentos teóricos*.” *(grifo do autor).* O único meio no qual os alunos podem acompanhar a interligação do interno com o externo no conteúdo do material assimilado é através do caráter criativo da experimentação de estudo (DAVIDOV, 1999, p. 3).

A atividade de ensino organizada de forma correta envolve: ***finalidades***, ***tarefas***, ***ações*** e ***operações***. A atividade deve estar sempre relacionada com uma necessidade – motivo; as ações, com os objetivos; e as operações, com as condições. Nesse sentido, a tarefa do professor de organizar atividades de estudo torna-se complexa, uma vez que exige dele certo conhecimento sobre comportamento e funções psicológicas dos alunos. As ações propostas devem exigir dos alunos mais que memorização, representação e reprodução; é necessário que produzam alterações mentais.

Para Moura (2010), é necessário criar nos alunos a necessidade de se apropriar dos conceitos para que a aprendizagem seja concretizada. Na visão do autor, o objetivo principal dessa necessidade é mobilizar o aluno para a atividade de aprendizagem, a apropriação do conceito e, consequentemente, dos conhecimentos.

> Esse modo de conceber o ensino pressupõe também que seja criada nos estudantes a necessidade de se apropriar de conceitos, o que se concretiza na situação desencadeadora da aprendizagem. O objetivo principal desta é proporcionar a necessidade de apropriação do conceito pelo estudante, de modo que suas ações sejam realizadas em busca da solução de um problema que o mobilize para a atividade de aprendizagem - a apropriação dos conhecimentos. (MOURA, 2010, p. 101).

Na figura a seguir, Moura (2010) expressa a relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem. A cada atividade de ensino elaborada pelo professor corresponde uma atividade de aprendizagem do aluno.

Figura 1: AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem.
Fonte: MOURA, 2010, p. 98.

A atividade orientadora de ensino, segundo Moura (2010), é uma unidade entre ensino e aprendizagem, em que "[...] estão presentes os conteúdos de aprendizagem, o sujeito que aprende, o professor que ensina e, o mais importante, a constituição de um modelo geral de apropriação da cultura e do desenvolvimento do humano genérico." (MOURA, 2010, p. 94).

> Assim, a AOE, como mediação, é instrumento do professor para realizar e compreender seu objeto de estudo: o processo de ensino de conceitos. E é instrumento do estudante, que, por meio dela, pode apropriar-se de conhecimentos teóricos. (MOURA, 2010, p. 109).

Na composição das ações de estudo, Davidov explica que há ainda as ações de controle e avaliação. O controle garante ao aluno uma execução correta das ações de estudo e a avaliação lhe permite determinar se assimilou ou não a forma geral de solução da tarefa de estudo dada. O autor atribui ao professor a tarefa de organizar a atividade de estudo a partir das necessidades dos alunos.

> Deste modo, uma correta organização da atividade de estudo consiste em que o professor, baseando-se na necessidade e disposição dos alunos de dominar os conhecimentos teóricos, sabe colocar para eles em um determinado material uma tarefa de estudo [...] com isto o professor, usando de determinados recursos, forma nos alunos a necessidade apontada, e a capacidade de receber uma tarefa de estudo e executar as ações de estudo. (DAVIDOV, 1999, p. 5).

Cada atividade tem sua tarefa de estudo específica; a atividade de estudo tem como principal objetivo proporcionar mudanças internas no sujeito. Conforme Repkin (2003), a atividade de estudo deve ser entendida como atividade para autotransformação do sujeito: a pessoa se desenvolve como personalidade quando se desenvolve como sujeito.

> Assim, a Educação Desenvolvente é o desenvolvimento do sujeito. Pode-se julgar o tipo de ensino por um único critério – a criança é um sujeito no processo de ensino? Se ela é um sujeito, então temos uma Educação Desenvolvente; se ela é um objeto no processo de ser ensinada, então não temos uma Educação Desenvolvente. (REPKIN, 2003, p. 5).

Segundo a teoria de Leontiev (1983), na análise da estrutura da aprendizagem como tipo de atividade, é importante definir: o papel do aluno no processo de aprendizagem, seus motivos, interesses, necessidades e habilidades; as características do objeto de estudo; os procedimentos a serem utilizados; os recursos ou meios para a realização da atividade; os objetivos e metas; o contexto escolar e do aluno e os resultados alcançados.

Repkin (2003) afirma que o ensino desenvolvimental é a saída para a ineficácia da educação tradicional, que se limita a realizar tarefas puramente funcionais, que não impulsionam o desenvolvimento humano. Conforme nos explica Moura (2010), a atividade de ensino do professor é que deve gerar e promover a atividade do aluno. É dela que nasce o motivo especial para essa atividade, que deve ser estudar e aprender teoricamente sobre a realidade.

A partir da abordagem histórico-cultural e da Teoria da Atividade, foi possível entender melhor a relação entre aprendizagem e desenvolvimento. Podemos concluir que, para haver ensino desenvolvimental, é necessário que o professor organize e desenvolva com os alunos atividades devidamente elaboradas, envolvendo motivos, objetivos, tarefas, ações e operações. Somente quando o aluno se envolve na atividade, tem um motivo para realizá-la, um objeto a ser estudado, tem tarefas relacionadas com esse objeto a serem cumpridas, age e realiza operações para atingir a meta definida da atividade é que se pode afirmar que realmente ocorreu a aprendizagem.

1.3 A álgebra e a educação algébrica no ensino fundamental

Nesta seção fazemos um estudo bibliográfico sobre as concepções de álgebra e de educação algébrica, sobre a evolução histórica do conceito de *função* e a condução do pensamento para a formação desse conceito. Fazemos, também, um estudo documental sobre a álgebra presente nos documentos oficiais, nos livros didáticos e no planejamento de curso da unidade de ensino; as concepções de álgebra e de educação algébrica presentes nesses documentos.

1.3.1 Concepções de álgebra e de educação algébrica

A álgebra ensinada no ensino fundamental é muito diferente daquela ensinada nos cursos superiores. O primeiro contato com as incógnitas ou variáveis, “letras” associadas aos números, as finalidades do ensino da álgebra permeiam relações que Usiskin (1995) destaca em sua tese, afirmando que:

> [...] as finalidades do ensino de álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas. As finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis. (USISKIN, 1995, p. 12-13).

Partindo desse pressuposto, o autor aponta quatro concepções de álgebra e educação algébrica:

I. **A álgebra como aritmética generalizada:** nessa concepção, as variáveis são utilizadas para generalizar modelos aritméticos. O modelo algébrico é uma ampliação das ideias aritméticas. Por exemplo, a generalização da propriedade comutativa: na adição de dois ou mais números, a ordem das parcelas não altera a soma (a + b = b + a).

II. **A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas:** essa concepção é muito comum nas aulas de matemática, pois os valores desconhecidos são incógnitas ou constantes (de equações, por exemplo), e a álgebra serve para simplificar e resolver problemas. Como aplicação, podemos citar a resolução de um problema do tipo: “O triplo de um número subtraído de sua metade resulta em 30. Qual é esse número?”. Traduzindo o problema para a linguagem algébrica, temos: $3x - \frac{1}{2}x = 30$. A representação algébrica do problema retrata uma equação de 1º grau, cuja solução é x = 12. A dificuldade nesse tipo de problema, segundo Usiskin (1995), está na passagem da aritmética para a álgebra, ou seja; na representação algébrica do problema.

III. **A álgebra como estudo de relações entre grandezas:** essa concepção de álgebra difere das anteriores porque as variáveis não são incógnitas e nem generalizações de modelos numéricos. Aqui, o estudo das *funções* se destaca e a álgebra se faz presente na relação **variável** entre duas ou mais grandezas. Segundo Usiskin (1995), as fórmulas do tipo A = b.h nos transmitem uma sensação diferente (um tipo especial) de generalização. Para o autor, uma questão do tipo “O que ocorre com o valor de $\frac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior?” pode causar grande confusão para os alunos, pois não é uma equação (não está se pedindo para calcular o valor de x). “Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.” (USISKIN, 1995). Para o autor, essa concepção nos leva a caracterizar a variável como um argumento (representa os valores do domínio de uma *função*) ou um parâmetro (representa um número do qual dependem outros números). São as noções de variável independente e variável dependente.

IV. A álgebra como estudo das estruturas: a variável, nessa concepção, torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades que podem ser úteis na resolução de problemas. Nesse caso, para Usiskin (1995), a álgebra envolve estruturas como grupos, anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais e integra os currículos dos cursos superiores. Contudo, ainda nessa concepção, segundo o mesmo autor, pode-se reconhecer a álgebra "[...] como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios". Seja fatorar a expressão: $3x^2 + 4ax - 132a^2$. "A concepção de variável nesse caso não coincide com nenhuma daquelas discutidas anteriormente." (USISKIN, 1995, p. 18).

Para Usiskin (1995), as concepções de variáveis sofreram alterações no decorrer do tempo; o autor considera, ainda, que a possibilidade de haver uma única concepção para o conceito da ideia de variável implicaria simplificar e distorcer os objetivos da álgebra.

Fiorentini et al. (1993) destacam em sua obra que a forma com a qual concebemos a educação algébrica está diretamente ligado com a maneira pela qual concebemos a álgebra.

Os autores apresentam estudos com o objetivo de repensar a educação algébrica elementar, realizar uma análise comparativa entre concepções de educação algébrica que são manifestadas no percurso da história do ensino de matemática e as concepções de álgebra mais presentes nesse campo do conhecimento matemático.

Nesta linha de pensamento, nomeiam algumas concepções de álgebra como citadas a seguir:

- **Processológica:** concepção que caracteriza a álgebra como um conjunto de procedimentos tais como técnicas, artifícios, processos e métodos específicos em certos tipos de problemas.
- **Linguístico-estilística:** a álgebra é vista como uma linguagem específica, criada com o propósito de expressar procedimentos específicos.
- **Linguístico-sintático-semântica:** assim como a anterior, essa concepção coloca a álgebra como uma linguagem específica e concisa, cujo poder criativo e instrumental reside em sua dimensão sintático-semântica.

- **Linguístico-postulacional:** concebe a álgebra como "a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da matemática, incluindo a lógica." (FIORENTINI et al., 1993, apud PIAGET e GARCIA).

Em seguida, Fiorentini et al. (1993) destacam três concepções de educação algébrica:

- **Linguístico-pragmática**: relaciona o papel pedagógico da álgebra como instrumento de resolução de problemas, vinculado à concepção linguístico-semântico-sintática dessa disciplina.
- **Fundamentalista-estrutural:** concepção que se baseia na linguístico-postulacional da álgebra, cujo papel pedagógico é o de fundamentador dos vários campos da matemática escolar.
- **Fundamentalista-analógica:** vincula o papel pedagógico da álgebra como instrumento de resolução de problemas à concepção linguístico-semântico-sintática. Essa concepção, porém, tenta uma síntese entre as duas anteriores ao tentar recuperar o valor instrumental da álgebra e ainda manter o caráter fundamentalista.

Na relação entre concepções algébricas e concepções de educação algébrica dominantes ao longo da história do ensino da matemática, Fiorentini et al. (1993) concluem que as primeiras tenderam a priorizar a linguagem em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem. Os autores afirmam que:

> Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-los, a colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado de algébrico. (FIORENTINI et al., 1993, p. 85).

Lins e Gimenez (2001) apontam quatro caracterizações para a atividade algébrica:

- **A concepção letrista – calcular com letras:** nessa tendência algébrica, o principal são as notações algébricas. Os autores ressaltam falhas nessa concepção, pois os assuntos ficam limitados exclusivamente ao ambiente escolar, além de não abranger todo o processo de desenvolvimento algébrico.
- **A concepção conteudista:** segundo Lins e Gimenez (2001), essa maneira de caracterizar a atividade algébrica não é precisa, pois os objetos de estudo da álgebra podem variar de pessoa para pessoa. Além disso, os autores afirmam que as

caracterizações por conteúdo ou por notação deixam de fora algumas expressões que podem ser caracterizadas como atividade algébrica.

- **A concepção de ação do pensamento formal:** para os autores, o pensamento formal é algébrico e consiste em refletir as operações concretas. Assim, para Lins e Gimenez (2001), o pensamento, ao atingir o estágio operatório formal, é algébrico. Na visão dos autores "[...] essa abordagem também deixa coisas demais de fora." (LINS e GIMENEZ, 2001, p. 100).
- **A concepção ou tendência conceitual:** nessa concepção os autores apresentam uma proposta do psicólogo francês G. Vergnaud chamada "Modelo dos Campos Conceituais". Os autores afirmam que nessa proposta "a noção de conceito (isolado) é substituída pela de campo conceitual." (LINS e GIMENEZ, 2001, p. 102).

Para Lins e Gimenez (1997), "A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra.". "A álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade." (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 137).

Essas várias concepções de álgebra e de educação algébrica mostram que é difícil encontrar uma forma de conceituá-los sem o risco de incluir e enfatizar alguns aspectos, relegando ou excluindo outros que também fazem parte da atividade algébrica.

1.3.2 O conceito de função*: aspectos históricos e lógicos*

Cerca de 2000 anos a.C. já havia indícios do primeiro estágio da concepção de *função* com os babilônios. A partir de tabelas em tabletes de argila é possível evidenciar correspondências com características funcionais.

Conforme Boyer (1996) é possível distinguir três momentos no desenvolvimento da álgebra, considerando as fases evolutivas da linguagem algébrica:

1) **Primitivo ou retórico:** nesse período, antes da Era Diofanto, egípcios, babilônicos e gregos não se usavam símbolos para expressar o pensamento algébrico. Tudo era representado por palavras.
2) **Intermediário ou sincopado:** surge com Diofanto, com a introdução de símbolos (letra sigma do alfabeto grego) para representar incógnita.

3) Simbólico: nessa fase as palavras dão lugar aos símbolos para representar as ideias da álgebra.

Caraça (1984) aponta o conceito de número como um dos conceitos mais importantes da matemática. Para chegar ao conceito de número, o homem estabelece relações entre objetos distintos da natureza. Aparece, aí, a correspondência um a um que dá origem ao conceito de número e evolui, posteriormente, para o conceito de *função*. Assim, as primeiras noções intuitivas de *função* aparecem com os processos de contagem.

Na Antiguidade, algumas noções ligadas ao conceito de *função* ficavam por conta das relações entre símbolos e quantidades e entre valores de duas grandezas distintas em fenômenos naturais. Segundo Caraça (1984), "o conceito de *função* não teve sempre a generalidade que lhe damos hoje" (p. 209). Ele foi surgindo lentamente da necessidade de se estudarem os fenômenos e as leis naturais.

Na Grécia antiga, na era 600 a.C., ***Tales de Mileto*****,** homem considerado de rara inteligência, primeiro filósofo e primeiro matemático grego, deu início às primeiras explicações racionais aos fenômenos naturais, como os eclipses, por exemplo. Estudou a proporcionalidade de segmentos, que originou o teorema dos segmentos proporcionais, conhecido como "Teorema de Tales".

A era de ***Pitágoras***, 500 a. C., ficou marcada pela escola pitagórica - sociedade secreta com bases matemáticas e filosóficas. Entre os pitagóricos a ideia de *função* aparece no estudo da interdependência quantitativa tanto na física como na matemática. Os elementos de aritmética e geometria foram amplamente aplicados no Egito e na Mesopotâmia, em problemas específicos envolvendo cálculos referentes a cerveja, pirâmides ou heranças de terras. Nesse período, "A dicotomia entre números e grandezas contínuas exigia um novo método para tratar a álgebra babilônia que os pitagóricos haviam herdado." (BOYER, 1996, p. 53). Segundo o autor, a matemática sofreu modificações drásticas na época de Platão. Nesse período aparece a álgebra geométrica grega.

Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), filósofo grego, biólogo, discípulo de Platão. "Foi-lhe atribuído um 'Tratado sobre Retas Indivisíveis'." (BOYER, 1996, p. 67). A sua contribuição inclui explicações quantitativas sobre fenômenos físicos, como, por exemplo, as leis da alavanca. As suas ideias matemáticas foram difundidas por várias escolas do Oriente.

O matemático ***Euclides de Alexandria*** (300 a.C.) publicou obras abordando assuntos variados da natureza, envolvendo óptica, astronomia, música e mecânica.

Arquimedes de Siracusa (287 a.C – 212 a.C.) era matemático, físico e astrônomo grego. Deixou enorme contribuição para a humanidade científica com a criação de instrumentos e tratados, ligados à física e à matemática, como: catapultas, alavancas, armas de cerco, bomba de parafuso, princípio hidrostático, equilíbrio dos planos, corpos flutuantes, pressão dos fluidos, dentre outros. Seus estudos matemáticos envolvem séries infinitas, cálculos de áreas, parábolas e volumes de sólidos de revolução.

Ptolomeu (150), com sua tabela de cordas contida no "Almagesto", além de outras tabelas astronômicas de equivalência de quantidades, evidencia a função de seno.

Doifante de Alexandria (~221 - 305) foi considerado um dos maiores algebristas gregos de Alexandria, desenvolveu teorias modernas dos números e foi considerado por alguns como o "Pai da Álgebra", devido à inovação com as notações. Foi o primeiro a usar símbolos na resolução de problemas algébricos. Teve como criação importante "[...] a introdução de um sinal especial para a incógnita em uma equação." (LINS e GIMENEZ, 2001, p. 91).

Na Idade Média, a noção de *função* aparece de forma mais "genérica" com fenômenos ligados a cor, luz, calor, distância, densidade, velocidade.

O matemático, astrônomo, astrólogo e geógrafo ***al-Khowarizmi*** (790 - 840) escreveu várias obras de astronomia e matemática, envolvendo tabelas astronômicas, tratados sobre astrolábio e relógio de sol. Escreveu, ainda, dois livros importantes sobre aritmética e álgebra. Em suas obras, apareceram as primeiras soluções sistemáticas para as equações lineares e quadráticas. Conforme Boyer (1996), as palavras "algarismo" e "algoritmo" são originalmente derivadas do nome al-Khowarizmi. Outra palavra atribuída ao mesmo autor foi o termo "álgebra", que surgiu a partir do livro "Al-jabr Wa'l muqabalah" ("Completar e Reduzir"). Ele é considerado o fundador da álgebra, embora esse crédito seja compartilhado com Diofante.

Bhaskara (1114-1185) apresentou soluções gerais para as equações e em seu tratado mais conhecido, o "Lilavate", apresentou vários problemas sobre equações lineares e quadráticas, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

Com ***Nicole Oresme*** (1323-1382) aparece a representação gráfica de *funções* com a Teoria das Latitudes e Longitudes, conforme representado na figura abaixo.

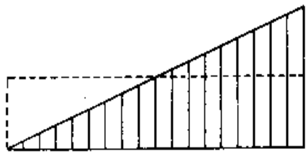


Figura 2: Representação gráfica de função de Oresme.
Fonte: BOYER, C. B. 1996, p. 181.

Já no período moderno, no início do século XVI, os procedimentos algébricos se restringiam ao cálculo de resultados de equações. No final desse século, porém, verifica-se uma expansão da álgebra literal, simbólica, com a correspondente expansão dos números reais e imaginários, quando aparece a introdução da noção de *função* como relação entre dois conjuntos numéricos.

François Viète (1540 - 1603) usou letras vogais para representar variáveis e consoantes para representar parâmetros.

Kepler (1571 – 1630), por meio de uma lei matemática, descreve o movimento dos planetas e demonstra de forma implícita o conceito de *função* quando compara e estabelece proporcionalidade entre os quadrados dos períodos orbitais dos planetas e os cubos dos semieixos maiores das órbitas.

Galileu Galilei (1564 - 1642) apresenta evolução na noção de *função*, enuncia a Lei da Queda dos Corpos e acrescenta elementos quantitativos nas representações gráficas.

René Descartes (1596 - 1650) introduziu o sistema de coordenadas para representar as variáveis envolvidas na *função*. Utiliza, pela primeira vez, a relação de dependência entre quantidades variáveis de duas grandezas representadas por ‘x’ e ‘y’.

Pierre de Fermat (1601 - 1655) usou termos como *“quantidades desconhecidas”* para se referir aos lugares geométricos definidos pela função.

Isaac Newton (1642 - 1727) atribui uma interpretação cinemático-geométrica às concepções básicas de análise matemática. O que hoje chamamos de expressão algébrica de uma *função*, ele chamou de relação entre os fluentes.

Leibniz (1646 - 1716) utiliza pela primeira vez o termo *“função”* para descrever quantidades relacionadas a uma curva em uma obra intitulada “*Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus*”. Leibniz já tinha a ideia do conceito geral de *função* e o denominava *“relatio”*. Ele estudou direito, teologia, filosofia e matemática. Sua contribuição à matemática estende-se ao cálculo diferencial, séries infinitas, coordenadas polares, dentre outros.

Jean Bernoulli (1667-1748) foi quem usou pela primeira vez a definição explícita de uma *função* como expressão analítica. Sobre Bernoulli, Caraça (1984) escreveu:

> No princípio do século XVIII, um matemático ilustre, João Bernoulli, definiu função assim: "chama-se aqui função duma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constantes". Para ele, portanto, a função era a expressão analítica, e esse ponto de vista prevaleceu durante muito tempo e impregna ainda a linguagem de hoje. (CARAÇA, 1984, p. 209).

Leonhard Euler (1707-1783) é tido como o mais importante matemático nascido na Suíça. Estudou matemática, teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Ele estudou *funções* contínuas e descontínuas, discriminou quantidades constantes e variáveis, criou símbolo e parêntese para designar *funções* e utilizou a linguagem e notação de *função* que usamos hoje.

Cal Friedrich Gauss (1777-1855) ficou conhecido pelo Teorema Fundamental da Álgebra. A sua tese de doutorado versava sobre "Nova Demonstração do Teorema que toda Função Algébrica Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau". (BOYER, 1996, p. 345).

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) derivou o termo *"*determinante*"* para o que o descreveu como classe de *funções* simétricas alternadas. "No cálculo de Cauchy os conceitos de *função* e limite de *função* eram fundamentais." (BOYER, 1996, p. 355). A definição de razão incremental das *funções* derivadas também é atribuída a ele. Roque (2012) afirma que Cauchy "definia *função* a partir da distinção entre variáveis independentes e dependentes." (p. 416). Segundo a autora, essa era a definição dada por Cauchy:

> Quando quantidades variáveis são ligadas de modo que, quando o valor de uma delas é dado, podem-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente essas variáveis quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de "variável independente"; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente, são as que chamamos funções desta variável. (ROQUE, 2012, p. 416).

Gustav Lejeune Dirichlet (1804-1859), em 1837, conforme Boyer (1996), utilizou uma ampla definição para *função*: "Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x".

Conforme Caraça (1984), "O conceito ganhou assim em generalidade porque se libertou da eventual forma de estabelecer a correspondência das variáveis, mas essa mesma generalidade o obrigou a afastar-se das condições de que nasceu." (p. 209).

George Boole (1815-1864). Para Boyer (1996), "'A Investigation of the Laws of Thought' de 1854, de Boole, é um clássico na história da matemática.". Segundo o autor, a obra, ao mesmo tempo em que estabelece uma lógica formal, apresenta uma nova álgebra chamada "Álgebra de Boole".

Em 1939 o grupo ***Bourbaki*** enfatizava a matemática moderna com a análise das estruturas e modelos matemáticos. Assim, a definição de *função* aparecia adaptada à linguagem dos conjuntos:

> Sejam E e F dois conjuntos distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para qualquer $x \in E$ existe um único $y \in F$, e apenas um, que está na relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra na relação dada com x; dizemos que y é o valor da função para o elemento x, e que a função é determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função. (ROQUE, 2012, p. 474).

Esse breve histórico do conceito de *função*, ligado ao próprio desenvolvimento da álgebra, permite perceber que, estando ele presente nas relações entre grandezas desde as civilizações mais antigas, foi se refinando. O conceito evolui à medida que o homem dele se apropria e o utiliza. Esse é o processo lógico-histórico de construção do conceito, que deve orientar a organização das atividades de ensino.

Caraça (1984) afirma que a "correspondência" é "uma das operações mentais mais importantes e que na vida de todos os dias utilizamos constantemente. A ideia de correspondência é, sem dúvida, uma das ideias basilares da Matemática." (p. 7). Segundo o autor, o homem, com o intuito de entender e dominar a natureza, vem empreendendo observações e estudos dos fenômenos naturais. Os resultados desses estudos vão, ao longo dos séculos, constituindo a ciência. Para ele, "o objetivo final da ciência é, portanto, a formação de um *quadro ordenado e explicativo* dos fenômenos naturais", tanto do mundo físico como humano (p. 107).

No entanto, o autor evidencia que as coisas do mundo apresentam duas características essenciais**: interdependência e fluência**. A primeira diz que todas as coisas estão relacionadas umas com as outras. O mundo e tudo o que nele existe é um organismo vivo com intensa comunicação e participação constante da vida uns dos outros. A segunda quer dizer que o mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam; tudo flui, tudo devém. Assim, tudo se relaciona e tudo muda o tempo todo. Mas, "se tudo depende de tudo, como fixar a nossa atenção num objeto particular de estudo?" (p. 111).

Aparece, então, a noção de "isolado" formulada por Caraça (1984). Para ele "[...] um isolado é, portanto, uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente.". Mas é importante "[...] recortar o seu isolado de estudo, de modo a compreender nele todos os fatores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar." (p. 112). Cada isolado contém a totalidade e cada totalidade contém o isolado (SOUSA, M. C, 2004, p. 152).

Para Caraça (1984), "a quantidade é um atributo da qualidade e, como tal, só em relação a ela pode ser considerada". Afirma, ainda, que a possibilidade de medir a quantidade tem significado histórico: "a questão de saber se a variação da quantidade é ou não susceptível de medida não tem significado absoluto, mas apenas significado histórico [...]" (p. 117).

A partir da relação lógico-histórica do conceito de *função* é importante considerar os seguintes conceitos ou nexos conceituais: a) a variação quantitativa presente nas questões do cotidiano; b) a variável; c) o campo de variação; d) a densidade dos conjuntos numéricos envolvidos.

A variação quantitativa está relacionada à fluência, às alterações que ocorrem nos fenômenos naturais; a variável está associada a um 'isolado'. Caraça (1984) afirma que "se queremos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos" (p. 127). Introduz-se aí, o conceito de variável, assim descrito por ele:

> Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo, x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável. (CARAÇA, 1984, p. 127).

A variável, para Caraça (1984, p. 127), é "o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela". O campo de variação tem a ver com os conjuntos: domínio, contradomínio e imagem (variável independente e variável dependente). "A variável antecedente da correspondência é chamada de variável independente, e a variável consequente da correspondência é chamada variável dependente" (p. 128-129). A densidade dos conjuntos envolvidos está relacionada com o conjunto numérico ao qual a variável está inserida.

Assim, o conceito de função aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis (CARAÇA, 1984, p. 129). Segundo o autor, esse conceito não pode ser confundido com a sua expressão analítica. Esta é apenas uma maneira de estabelecer a correspondência entre as duas variáveis, e que, por vez, pode não ter a mesma representação universal. Esta correspondência pode ser feita, ainda, de forma geométrica. O conceito de função vai além. Por meio dele pode-se estabelecer a correspondência entre as expressões analítica e geométrica da função, mas não está restrito a representações. Segundo o autor, "estas duas ideias andam constantemente confundidas na linguagem e na escrita dos matemáticos" (p. 131). O autor afirma, ainda, que "conceito de função não teve sempre a generalidade que lhe damos hoje. Ele foi surgindo, lentamente, da necessidade de estudar leis naturais. Foi sendo identificado com "a relação analítica que define a correspondência das duas variáveis" (p. 209). A essência desse conceito para o autor é a correspondência unívoca entre os dois conjuntos envolvidos na relação. O conceito de função é entendido "como o instrumento próprio para o estudo das leis" (p. 129). Por meio de um exemplo de fenômeno natural que relaciona espaço e tempo, o autor apresenta esta definição para variável:

> Dizemos que a variável *e* é função da variável *t,* e escrevemos simbolicamente e = f(t); à variável *t*, antecedente da correspondência, chamaremos variável independente; à variável e chamaremos variável dependente (CARAÇA, 1984, p.128-129).

O autor apresenta duas definições para a função: a) *analítica* que faz corresponder a cada valor ***a*** de x um valor ***b*** de y. Possibilita encontrar o valor de y que está relacionado a outro valor real de x. b) *geométrica* que, sendo dado um sistema cartesiano e uma curva (C) qualquer, esta será considerada função, se não for cortada por mais de um ponto, por uma paralela ao eixo *Oy*.

O conceito de *função*, segundo Caraça (1984), nasceu do conceito de lei natural. Nesse percurso, no entanto, "[...] encontramo-nos com o acaso, noção precisamente oposta à de lei", mas o "[...] reconhecimento desta verdade fundamental, enunciada por Gonseth: "lei e acaso são noções conjugadas que só adquirem todo o seu sentido quando tomadas uma em relação à outra." (p. 210). O autor afirma que, sozinha, nenhuma tem existência autônoma e que tudo deve ser estudado em relação com o seu contexto.

A definição de função de Caraça (1984) é perfeitamente adequada para os alunos do ensino fundamental, sujeitos da nossa pesquisa:

> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se y = f(x) se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido x → y. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. Para indicar que y é função de x, usaremos também escrever simplesmente y(x); para representar aquele valor b de y que corresponde a um valor particular a de x, escreve-se b = f(a) ou b = y(a), conforme se usou a representação y = f(x) ou y(x). (CARAÇA, 1984, p.129).

1.3.3 A álgebra ensinada nos anos finais do ensino fundamental

A álgebra "é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos". Esse comentário faz parte de um estudo, feito na Inglaterra, de recordações de adultos sobre suas experiências com a matemática na escola[11] (BOOTH, 1995, p. 23). O autor completa dizendo que esse sentimento poderia ser compartilhado por muitos dos nossos alunos nos dias de hoje.

Há cerca de dois séculos, o objetivo fundamental do estudo da álgebra era a resolução de equações. Hoje, o estudo da álgebra envolve relações matemáticas que tanto podem ser equações, inequações, *funções* ou outras estruturas definidas por operações ou relações.

Por experiência própria e pela convivência com outros colegas professores, sabemos que, de maneira geral, os alunos conseguem um desempenho razoável nas questões relacionadas com a aritmética e suas operações, mas demonstram certa resistência e apresentam grandes dificuldades para lidar com as questões de álgebra. O fato de aparecerem "letras" que representam números parece potencializar as dificuldades de compreensão dos alunos. Tais dificuldades podem estar relacionadas aos diferentes sentidos que os símbolos algébricos assumem em cada expressão. Usiskin (1995) ilustra esta situação com cinco diferentes expressões em que o produto de dois números é sempre "=" ao terceiro.

(1) A = b . h

(2) 50x = 40

(3) sen x = cos x . tg x

(4) n. (1/n) = 1

(5) y = kx

---

[11] Pesquisa realizada na Universidade de Bath, 1982.

Na primeira, a expressão representa a área do retângulo, em que a igualdade sugere um cálculo a ser efetuado entre três grandezas (A – medida da área ou superfície; b – medida da base; h – medida da altura) em que a ideia de variável ou incógnita não está clara. Na segunda, há uma equação e a igualdade nos sugere calcular o valor de "x", que é uma incógnita. A terceira sentença transcreve apenas uma identidade ou igualdade entre duas expressões. Na quarta sentença, a igualdade representa apenas a generalização de uma propriedade numérica. A quinta expressão representa uma *função* na qual a igualdade estabelece uma relação entre duas variáveis (x e y). Não há algo a ser calculado; apenas a expressão que define a variação de uma grandeza em função da outra. Esse é o único caso em que as letras são variáveis.

Markovits (1995) afirma que, com o advento da "matemática moderna", o conceito de *função* passou a integrar a maior parte dos currículos. O autor descreve resultados de uma pesquisa realizada com o propósito de investigar dificuldades, erros e concepções na compreensão do conceito de *função*. Os componentes da "compreensão do conceito de *função*" são citados pelo autor como apenas uma parte dos aspectos da compreensão geral das *funções*. Ele descreve as fases pelas quais os alunos devem passar no seu primeiro curso de *funções*. Para cada componente o autor atribui duas fases: a fase passiva, que requer apenas classificação e identificação por parte do aluno; e a fase ativa, na qual o aluno deve dar exemplos ou desenvolver algo. O autor chama a atenção para o fato de que as *funções* podem ter várias representações: gráfica, algébrica, tabular, diagramas de flechas, dentre outros.

As dificuldades, concepções erradas sobre o conceito de *funções* e sugestões para corrigi-las são apresentadas por Markovits (1995) a partir de exemplos, gráficos e tabelas apresentadas aos alunos. As maiores dificuldades dos alunos, conforme relata, são com os termos imagem, domínio, contradomínio e par ordenado. Essas dificuldades, evidentemente, levam a outras, como: dificuldades para localizar elementos do domínio e imagem nos eixos em representações gráficas, dificuldades para identificar elementos de pares ordenados para *funções* dadas na forma algébrica, dificuldades para distinguir entre o conjunto imagem e o contradomínio, dificuldades com certos tipos de funções, como, por exemplo, a função constante. O autor conclui afirmando que a pesquisa realizada revelou dois pontos importantes: os alunos têm mais facilidade para lidar com *funções* expressas na forma gráfica que na forma algébrica. A explicação, segundo o autor, está na forma visual, na qual o domínio, o contradomínio e a regra de correspondência são apresentados simultaneamente. O segundo tem a ver com a contextualização (uma "história") da tarefa apresentada ao aluno.

1.3.4 A abordagem algébrica para as séries finais do ensino fundamental, segundo os PCN

A partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998), o ensino fundamental ficou dividido em 4 (quatro) ciclos: **1º ciclo** – até 2ª série ou terceiro ano; **2º ciclo** – 3ª e 4ª séries ou 4º e 5º anos; **3º ciclo** – 5ª e 6ª séries ou 6º e 7º anos; **4º ciclo** – 7ª e 8ª séries ou 8º e 9º anos. Para cada ciclo, em cada área, são indicados: os objetivos, os conteúdos, os critérios de avaliações e as orientações didáticas.

O texto aponta que, no Brasil, o ensino de matemática ainda é marcado por "altos índices de retenção, formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão." (BRASIL, MEC, 1998b, p. 19).

- Décadas de 60/70 – matemática moderna com ênfase para a Teoria dos Conjuntos.
- Década de 80 – ensino da matemática a partir da resolução de problemas. Essa tendência foi sugerida pelo National Council of Teachers of Mathematics - NCTM -, dos Estados Unidos.
- A partir da proposta anterior, novas discussões influenciaram reformas em todo o mundo. Os principais aspectos dessas reformas envolvem: direcionamento do ensino para a formação de competências básicas; papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; ênfase na resolução de problemas; introdução de conteúdos essenciais tais como estatística, probabilidade e combinatória, desde as séries iniciais; importância do uso das tecnologias.

Segundo os PCN (1998), o Brasil enfrenta alguns obstáculos com relação ao ensino da matemática, tais como: a falta de formação profissional adequada para os professores (a formação dos professores, tanto inicial quanto continuada, pouco tem contribuído para melhorar o exercício da docência); a falta de condições adequadas de trabalho; ausência de políticas educacionais efetivas; interpretações equivocadas de concepções pedagógicas. O texto afirma, ainda, que há uma interpretação equivocada de concepções algébricas, além da resolução de problemas que aplicam basicamente a memorização e aplicação de fórmulas.

Como desafio para as novas propostas curriculares, ainda são apontadas a concepção linear de conteúdos curriculares e a questão do contexto, como algo que necessariamente faz parte do cotidiano do aluno. Nesse aspecto, a história da matemática ganha destaque especial, uma vez que pode desvendar os principais mistérios sobre a "invenção" da matemática.

Uma das principais características, o conhecimento matemático, contida no documento BRASIL. MEC (1998b) aponta a matemática como "forma de se compreender e se atuar no mundo e o conhecimento acumulado como fruto da construção humana no contexto natural, social e cultural.".

> [...] o saber matemático como algo flexível e maleável às inter-relações entre os seus vários conceitos e entre os seus vários modos de representação, e, também, permeáveis aos problemas nos vários outros campos científicos. Um saber matemático desse tipo pode ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento. (BRASIL. MEC, 1998b, p. 26).

O processo de ensino e aprendizagem de matemática no ensino fundamental, segundo os PCN (1998), envolve três variáveis: aluno, professor e saber matemático. Cabe ao professor conhecer e identificar as principais características da matemática, seus métodos, suas ramificações e ampliações. Conhecer bem os alunos, a história de vida de cada um, as condições sociopsicológicas e culturais, além de ter clareza de suas próprias concepções sobre a matemática. Conforme o texto, o professor somente estará preparado para desempenhar o papel de mediador entre o aluno e o conhecimento, depois de adquirir a concepção da matemática como ciência dinâmica.

O ensino de matemática tem se caracterizado, segundo os PCN (1998), como prática frequente de "apresentar o conteúdo oralmente, a partir de definições, exemplos e demonstrações, seguidos de uma sequência de exercícios." (BRASIL. MEC, 1998b, p. 37). Nesse contexto, a garantia de aprendizagem por parte do aluno está vinculada à resolução correta dos exercícios, e não à aprendizagem dos conceitos relativos aos conteúdos. A nova proposta contida nos PCN (1998) aponta o aluno como agente da construção do seu conhecimento; ele deve ser o protagonista na construção de sua aprendizagem. Nesse contexto, o papel do professor ganha novos contornos; ele passa a ser o organizador, mediador e facilitador da aprendizagem do aluno.

A seleção de conteúdos de matemática para o ensino fundamental, de acordo com os PCN, é a seguinte:

1 – **Números e operações**: construção gradativa dos conceitos relacionados aos diferentes tipos de números e operações e sua utilização na resolução de problemas; relações

entre as operações; aspectos algébricos relacionados com generalizações e padrões aritméticos; variação de padrões de grandezas e exploração da noção de *função*.

2 – **Espaço e forma:** conceitos geométricos; relações entre números e medidas; construções e transformações geométricas; relações com o mundo físico.

3 – **Grandezas e medidas:** relações entre grandezas e medidas e suas aplicações cotidianas; reafirmação do significado de números e operações; interdependência entre grandezas.

4 – **Tratamento da informação:** noções de estatística e probabilidade; análise de dados, tabelas e gráficos; cálculo de medidas estatísticas.

Conforme descrito nos PCN (1998), o estudo da álgebra pode ser bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração, generalização e resolução de problemas (BRASIL. MEC, 1998). Porém, o documento aponta dados de pesquisa em educação matemática nos quais os acertos em questões de álgebra nos resultados do SAEB não atingem 40%. Na tentativa de melhorar o rendimento, segundo consta no documento oficial, os professores aumentam o número de exercícios propostos aos alunos, com repetições mecânicas (apenas para aplicar métodos de resolução e obter a resposta do exercício), o que se torna cansativo, ineficiente e compromete o andamento do trabalho, além da perda de tempo, pois não há avanço na aprendizagem significativa. Outra questão abordada nos PCN faz referência ao excesso de formalizações que alguns professores desenvolvem, apresentando aos alunos conceitos que deveriam ser desenvolvidos somente no ensino médio.

O documento sugere que os professores tenham clareza do papel da álgebra no currículo escolar; que reflitam sobre como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático diante das várias representações algébricas. Os alunos devem, inicialmente, construir as noções de álgebra a partir de observações de regularidades, em tabelas e gráficos. Para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, o documento oficial sugere que o aluno desenvolva atividades que inter-relacionem as diferentes concepções de álgebra. Os professores não desenvolvem tais concepções da álgebra no ensino fundamental, sentencia o documento oficial; privilegiam o estudo de equações e do cálculo algébrico, mas de forma dissociada dos problemas. Para a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos é necessário um trabalho articulado com as quatro dimensões ao longo do terceiro e quarto ciclos (BRASIL. MEC, 1998, p. 117).

As diferentes interpretações da álgebra e as diferentes funções das letras são apresentadas de forma sintetizada no quadro a seguir.

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e proce-dimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Quadro 1: Diferentes concepções da álgebra no ensino fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN.
Fonte: BRASIL. MEC, 1998, p. 116.

O texto sobre a álgebra no ensino fundamental, segundo os PCN, sugere que o estudo chamado de "pré-álgebra" ocorra nas séries iniciais do ensino fundamental e seja retomado no terceiro ciclo para que os conceitos algébricos sejam revistos e consolidados. Nesse sentido, o professor deve propor atividades nas quais o aluno possa identificar e generalizar propriedades aritméticas, em que as letras simplesmente substituam os valores numéricos; situações para investigação de padrões em sucessões ou representações geométricas. Sempre que se fizer necessário, o professor de matemática deve estabelecer diferenciações entre as diversas funções das letras utilizadas nas expressões matemáticas, deixando claro para o aluno quando a letra representa uma generalização aritmética, uma incógnita, uma variável ou um símbolo abstrato. Essa atitude do professor auxilia o aluno na formação do pensamento algébrico. O texto ressalta, ainda, a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos.

Para muitos alunos, segundo os PCN, (1998b), a matemática é uma matéria difícil, que se resume a decorar fórmulas sem sentido para eles. Por isso apresentam atitudes negativas, desinteresse, falta de empenho e pouca preocupação com a aprendizagem dessa disciplina. Ainda, segundo o mesmo texto, os alunos, nessa faixa etária do desenvolvimento, apresentam características como inquietações emocionais e psicológicas, que repercutem na vida afetiva, na escola e nas relações familiares. Nessa etapa do processo de ensino e aprendizagem de matemática (quarto ciclo do ensino fundamental), o conhecimento do professor sobre tais aspectos do desenvolvimento psicológico dos alunos é muito importante para que ele possa compreender, analisar e orientar os alunos na superação dessas dificuldades.

Embora os PCN tenham sido apresentados há quase 20 anos, a experiência e os resultados das avaliações sistêmicas, têm nos mostrado que pouco se avançou no que se refere ao ensino da álgebra.

1.3.5 A matriz curricular de matemática do 9º ano da SEMEC

Nesta seção trazemos informações obtidas na "Matriz Curricular do Conteúdo de Matemática, proposta pela Secretaria Municipal de Educação de Uberaba". Tal documento é encaminhado a todas as unidades escolares do município para servir de orientação para a elaboração dos planejamentos de ensino. Segundo o "Guia de Orientação e Aplicação das Matrizes Curriculares", as versões mais tradicionais dos Planos de Cursos tinham como centro a aquisição de conteúdos. O professor era o centro do processo. A nova versão de Planos de Cursos, segundo o guia, é centrada nas **competências e habilidades** a serem construídas pelos alunos, e tem o **aluno como centro do processo**. Cada conteúdo curricular é dividido em Eixos Estruturantes, subdivididos em objetos de conhecimento, que, necessariamente, "não guardam entre si um encaminhamento sequencial rígido". (GUIA DA SEMEC, 2013). Ao elaborar o seu plano de curso, "[...] o professor deverá considerar todos os eixos em sua divisão, separando os Objetos de Conhecimento e os Direitos de Aprendizagem alvo de sistematização e avaliação no bimestre." (GUIA DA SEMEC, 2014). O Departamento Pedagógico da SEMEC orienta as unidades escolares sobre a transposição didática das Matrizes para os Planos de Curso. Para tal, elaborou as seguintes orientações:

a) A transposição didática das Matrizes Curriculares para os Planos de Curso será bem facilitada porque há uma semelhança entre as duas estruturas com elementos comuns e dois elementos a serem pensados, elaborados e escritos (Recursos Didáticos e Instrumentos Avaliativos). Os elementos Eixos Estruturantes/Objetos de Conhecimento/Direitos de Aprendizagem podem ser transpostos para o quadro do planejamento. Quanto ao elemento "Procedimentos de Ensino", pode-se fazer a retirada de várias sugestões propostas nas "Condições Didáticas".

b) A equipe deverá dividir os Eixos Estruturantes, os Objetos de Conhecimento e os Direitos de Aprendizagem por 4 bimestres, procedendo à escolha de acordo com as características das turmas.
c) A equipe poderá potencializar o Plano de Curso com inserção de outros descritores (não presentes nas Matrizes), mas se julgar necessários ou importantes.
d) Há uma relação entre os Direitos de Aprendizagem, os Objetos de Conhecimento e os Eixos Estruturantes; logo, tomar cuidado no momento da transposição para não ficar incoerente.

A Matriz Curricular de Matemática para o 9º ano apresentada pela Secretaria Municipal de Educação e Cultura - SEMEC tem a seguinte estrutura:

EIXOS ESTRUTURANTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO	DIREITOS DE APRENDIZAGEM	CONDIÇÕES DIDÁTICAS

Quadro 2: Modelo da Matriz Curricular apresentado pela SEMEC.
Fonte: SEMEC – Secretaria Municipal de Educação e Cultura de Uberaba, 2014.

1. EIXOS ESTRUTURANTES: referem-se às áreas do conhecimento a serem desenvolvidas.

EE 01 – Números e operações

2. OBJETOS DE CONHECIMENTO: são os eixos divididos em conteúdos mais específicos.

OC1. Números Reais: potenciação, radiciação. Propriedades, simplificação, operações dos radicais e racionalização dos denominadores.

OC2. Álgebra: equação do 2º grau, *função* do 1º grau.

EE 02 – Espaço e forma

OC3. Polígonos regulares, comprimento da circunferência e do arco, área do círculo e de suas partes, relações métricas na circunferência, segmentos proporcionais, semelhanças, relações métricas no triângulo retângulo, relações trigonométricas nos triângulos.

EE 03 – Tratamento da informação

OC4. Noções de análise combinatória, probabilidade, estatística e juro composto.

Para cada Objeto do Conhecimento existem diversos **“DIREITOS DE APRENDIZAGEM”** ou Descritores. São as habilidades/capacidades a serem construídas pelos alunos, colocadas de forma processual, ou seja, o saber fazer.

O último item da matriz é referente às **"CONDIÇÕES DIDÁTICAS"**, que são os procedimentos didáticos adotados, de forma a alinhavar o eixo com objetos do conhecimento e direito de aprendizagem.

Estrutura do Plano Anual de Ensino proposta pela Secretaria Municipal de Educação e Cultura – SEMEC.

PLANO ANUAL DE ENSINO

EIXOS ESTRUTURANTES	OBJETOS DE CONHECIMENTO	DIREITOS DE APRENDIZAGEM	CONDIÇÕES DIDÁTICAS	RECURSOS DIDÁTICOS	INSTRUMENTOS AVALIATIVOS

Quadro 3: Modelo para o Plano Anual de Ensino.
Fonte: Secretaria Municipal de Educação e Cultura de Uberaba - SEMEC, 2014.

Assim como nos PCN, a Matriz Curricular de Matemática para o 9º ano apresentada pela SEMEC inclui os conteúdos de álgebra no eixo estruturante denominado Números e Operações, com a indicação do estudo de equação do 2º grau, *função* do 1º grau. Nesse nível de ensino, em que o conceito de função começa a ser tratado como tal, causa estranheza que não esteja indicado de forma explícita, aparecendo apenas o estudo da função de 1º grau, que é um caso específico do conceito geral. Dentro do referencial teórico que estamos adotando nesse estudo, particularmente, as contribuições de Davidov e de Caraça, essa orientação pode comprometer a apropriação desse importante conceito, conduzindo a um ensino que não prioriza a essência do conceito mais geral, para depois descer aos casos particulares.

1.3.6 A álgebra no plano de ensino da escola pesquisada

Os conteúdos de matemática são divididos em quatro eixos temáticos, conforme estrutura contida nos Parâmetros Curriculares Nacionais: **I – Números e Operações:** Conjuntos numéricos; Radiciação; Grandezas proporcionais; Juros; **II – Álgebra:** Equações do 2º grau; **III – Espaço e Forma:** Semelhança de figuras; Triângulo retângulo; Circunferência; Medidas de superfície; Medidas de volume; **IV – Tratamento de dados:** Tratamento da informação; Plano cartesiano; *Funções*.

No Eixo Temático I, pode-se verificar a álgebra empregada como aritmética generalizada, nas diversas propriedades numéricas; nas propriedades da potenciação e radiciação; nas proporções, segmentos proporcionais e Teorema de Tales; fórmulas para resolução de juros simples e compostos.

O Eixo Temático II, que envolve apenas a equação do 2º grau, aplica a álgebra das equações: o uso de letras como incógnitas.

No Eixo Temático III, a álgebra aparece novamente como aritmética generalizada nas relações de semelhança e proporção; e como funcional nas relações métricas e trigonométricas, no Teorema de Pitágoras, no cálculo de áreas e volumes.

O Eixo Temático IV abrange o estudo estatístico, coordenadas cartesianas e estudo das *funções*, que envolvem o conceito de variáveis. Nesse eixo, temos o emprego da álgebra funcional.

Os objetivos específicos (que aparecem no Planejamento como "Direitos de Aprendizagem"), de uma maneira geral e resumida apontam o que o aluno deve aprender:

Eixo Temático I: Números e operações

Revisão envolvendo operações e resolução de problemas com os conjuntos numéricos até então estudados; estudo dos números irracionais (conjunto I) e da composição dos números reais (conjunto R); resolução de operações e problemas com números irracionais (I) e reais (R); estudo dos radicais: operações e propriedades; proporções, regra de três simples, Teorema de Tales; compreender, avaliar e decidir sobre situações da vida cotidiana, com relação às operações financeiras envolvendo juros simples e compostos.

Eixo Temático II: Álgebra

Exercitar a capacidade de abstração; identificar e resolver equações do 2º grau; desenvolver a visão de fatoração e a interpretação geométrica da equação do 2º grau; resolver equações utilizando a fórmula de Bhaskara; reconhecer e resolver equações que recaem em equações do 2º grau, literais ou fracionárias.

Eixo temático III: Espaço e forma

Recordar e ampliar os conhecimentos sobre figuras geométricas; identificar figuras semelhantes; construir polígonos semelhantes por homotetia; compreender propriedades dos triângulos semelhantes; verificar as relações métricas no triângulo retângulo a partir da semelhança de figuras; demonstrar o Teorema de Pitágoras; compreender e localizar os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo; utilizar corretamente as relações trigonométricas; destacar os elementos de uma circunferência, posições relativas de duas circunferências, posições de uma reta e uma circunferência, ângulo central e inscrito, polígonos inscritos e circunscritos; diferenciar círculo e circunferência; deduzir a fórmula que permite calcular o comprimento de uma circunferência; deduzir a fórmula da área do círculo por meio da associação com o cálculo da área do polígono; usar o cálculo de área do círculo, do setor circular e da coroa circular para resolver situações-problema do dia a dia relacionadas ao conteúdo; relacionar o metro cúbico com seus múltiplos e submúltiplos; relacionar o decímetro cúbico com o litro e mililitro; escolher adequadamente múltiplos e submúltiplos do metro cúbico para efetuar medidas; calcular o volume de algumas formas espaciais por meio de fórmulas.

Eixo temático IV: Tratamento de dados

Analisar dados; identificar a variável estatística e coletar e organizar os dados obtidos; montar tabelas de distribuição de frequências; perceber a presença de média aritmética em muitas situações do cotidiano; indicar as coordenadas de pontos localizados no plano cartesiano, construir um plano cartesiano e representar alguns pontos, localizar a região de um determinado ponto e indicar as coordenadas cartesianas dos vértices de forma geométricas representadas no plano cartesiano; introduzir as noções básicas de *funções*; identificar relações entre duas grandezas variáveis; conceituar, analisar, representar e identificar *função* de 1º e 2º graus; produzir, ler, analisar e interpretar gráficos que representam *funções* do 1º ou do 2º graus em um plano cartesiano.

Quanto às condições didáticas, recursos didáticos e instrumentos avaliativos, o planejamento apresenta:

Eixo Temático I: Números e operações

Aula expositiva e prática; avaliação diagnóstica; resolução de exercícios; monitoria; trabalhos em grupos; tarefas de casa (dar visto e corrigir); atividades diversificadas; leitura de textos que apresentam a parte histórica sobre a origem da raiz e os símbolos utilizados na Antiguidade; uso de dobraduras; construção do triângulo áureo; uso de folhetos que apresentem o preço de alguns produtos com pagamento à vista e a prazo; avaliações escritas; tarefas de casa.

Eixo Temático II: Álgebra

Atividades dentro de sala usando monitoria; exercícios extras; apresentar diversos contextos nos quais são utilizadas equações de 2º grau para resolvê-los; jogo: dominó das equações.

Eixo Temático III: Espaço e forma

Uso do Tangram; construções geométricas; trabalhos em grupos; realização de atividades com material concreto; construção de um teodolito; abordar o conteúdo quando utilizado pelos egípcios; uso do compasso; descobrir a razão do valor de PI (π) utilizando material concreto; jogo: batalha naval nas circunferências; uso de dobraduras e recortes; uso de objetos com formato cúbico e de paralelepípedo retangular; uso de objetos para realizar demonstrações de fórmulas; uso de reportagens; uso de medidas impressas.

Eixo Temático IV: Tratamento de dados

Pesquisar na internet informações atuais para construção de tabelas; uso de malha quadriculada; uso do tabuleiro de xadrez; construção em papel quadriculado, gráficos de *funções* de 1º e 2º graus.

Após a análise dos documentos que são referenciais para que o professor organize as atividades de ensino, podemos constatar que os PCN (1998) sinalizam para diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica, e enfatizam o seu papel como ferramenta para resolver problemas e para o desenvolvimento e o exercício da capacidade de abstração e generalização. Porém, os mesmos parâmetros afirmam que os professores não dão a esse estudo a ênfase necessária, o que provoca o fracasso escolar dos alunos nesse tópico da matemática. Na tentativa de corrigir o fracasso os professores propõem, em suas aulas, "apenas a repetição mecânica de mais exercícios". Outra questão apontada pelo texto faz referência à "abordagem excessivamente formal de *funções*." (p. 116).

A saída para o ensino da álgebra no terceiro ciclo do ensino fundamental seria, segundo o texto, "ter clareza do seu papel no currículo e refletir como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático principalmente quanto à variedade e representações.". O professor deve "propor situações que levem o aluno a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, [...] apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica." (BRASIL. MEC, 1998a, p. 116).

As orientações didáticas contidas nos PCN (1988) para o ensino da álgebra sugerem atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da álgebra envolvendo: experiências variadas com noções algébricas em um trabalho articulado com a aritmética; atividades de investigação de padrões tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, com identificação de estruturas e construção da linguagem algébrica; procedimentos que o aluno possa descrever oralmente empregando a noção de variável; situações-problema que favoreçam o trabalho de simplificação de expressões algébricas; uso das tecnologias da informação.

A proposta contida nesses parâmetros aponta que alguns aspectos da álgebra já são desenvolvidos nas séries iniciais, mas [...] “é essencialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas.” (BRASIL. MEC, 1998a, p. 50). Segundo o texto a noção de *função* será explorada no terceiro e quarto ciclos, porém [...] “a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo no ensino médio.” (BRASIL. MEC, 1998a, p. 51).

O problema, no entanto, parece não estar nos PCN ou nas Diretrizes Curriculares. A questão pode estar relacionada à falta de esclarecimentos desses documentos de como desenvolver didaticamente os conteúdos matemáticos com os alunos para que ocorra a formação dos conceitos. Outra causa pode ser a falta de compreensão por parte das equipes escolares (pedagogos e professores) de como colocar em prática as propostas apresentadas nos documentos para que ocorra a formação dos conceitos.

Nos PCN (1998) o conteúdo de matemática foi dividido em quatro blocos: números, espaço e forma, tratamento da informação e medidas. A álgebra ficou dentro do bloco de números. Nesse sentido, o caráter algébrico aí intrínseco ficou restrito à generalização da aritmética. Os conceitos aritméticos têm seus nexos aritméticos e os conceitos algébricos têm seus nexos algébricos.

Outra questão que deve ser observada é que os PCN (1998) não apresentam, de forma clara, quais são os conceitos fundamentais da matemática para cada etapa da educação, quais os nexos conceituais[12] e quais os procedimentos que devem ser adotados para o desenvolvimento desses conceitos, ficando a cargo das demais instâncias da educação escolar e, principalmente, do professor a organização adequada do ensino.

As matrizes curriculares de matemática para o 9º ano apresentadas pela SEMEC mantém o estudo de álgebra dentro do bloco (eixo estruturante) *Números e Operações*, como

[12] Os nexos conceituais, segundo Sousa (2014), estão relacionados com os significados e os porquês e com a história dos conceitos, com a sua criação. As particularidades do histórico fundamentam o lógico.

o fazem os PCN. Porém, com o problema de que já tratamos anteriormente, o de não dar destaque ao conceito de função, indicando para o *objeto de conhecimento* “Álgebra”, o estudo de equações de 2º grau e de função de 1º grau. Desse modo, podemos afirmar que parecem conter concepção mais restrita de educação algébrica do que as que se observam nos PCN.

No plano de ensino da escola pesquisada, a álgebra parece estar limitada ao estudo das equações de 2º grau, pois o estudo de funções está inserido no *eixo temático* Tratamento da Informação. Esse fato revela que se enfatiza a representação gráfica, e não a essência do conceito de função, que deveria ser desenvolvido nesse nível de ensino e, especificamente, no 9º ano do ensino fundamental.

Essas constatações, aliadas aos resultados das pesquisas referidas nesse estudo, indicam que outras formas de organizar o ensino de álgebra se fazem necessárias, considerando a importância desse campo culturalmente construído pela humanidade do qual os estudantes têm o direito de se apropriar**.**

1.3.7 O estudo de função *no livro didático adotado para o 9º ano da escola pesquisada*

O nome do livro didático de matemática adotado na maioria das escolas da Rede Municipal de Uberaba para o ensino fundamental II é: “Vontade de Saber Matemática”, dos autores Joamir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro, Editora FTD. O livro faz parte do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD — ligado ao Fundo Nacional de Desenvolvimento de Educação - FNDE, do Ministério da Educação. O programa prevê que o referido livro será adotado pela escola por um período mínimo de três anos: 2014; 2015 e 2016.

O conteúdo do livro está dividido em dez tópicos ou capítulos assim distribuídos: 1 – Raízes; 2 – Equações do 2º grau e sistemas de equações; 3 – Matemática financeira; 4 – Simetria; 5 – *Funções*; 6 – Semelhança; 7 – Relações no triângulo retângulo; 8 – Tratamento da informação; 9 – Círculo e circunferência; 10 – Medidas de volume.

O capítulo 5, destinado às *funções*, apresenta: a noção de *função*; representação gráfica de uma *função*; *função* afim; *função* quadrática; refletindo sobre o capítulo; acessando tecnologias (gráficos de *funções*); revisão; testes.

O assunto “*Funções*” é apresentado aos alunos com o texto “Criptografia – a arte de escrever em códigos”. Segundo o texto, os primeiros registros de escrita criptografada datam de cerca de 4.000 anos e foram produzidos pelos egípcios, e até hoje, a escrita criptografada está presente no nosso dia a dia. O caso mais comum é o das senhas, códigos ou chaves. O sentido da criptografia, segundo o texto e a exposição dos autores, é associar símbolos diferentes às letras ou números conhecidos. A "noção de *função*" expressa pelos autores é a seguinte: "Quando relacionamos grandezas variáveis, estamos tratando, em geral, do conceito de *função*, muito utilizado na Matemática e em outros ramos da Ciência." (SOUZA, J. R. e PATARO, P. R. M., 2012, p. 84).

Os autores fazem uma relação de *função* com a evolução histórica, com as contribuições de Leibniz (1646 - 1716), Newton (1642 - 1727), Euler (1707 - 1783), Fourier (1768 - 1830). Em seguida, apresentam algumas situações do cotidiano nas quais as *funções* estão presentes. Apresentam algumas tabelas de valores relacionados, em que aparecem duas grandezas, uma representada por (y) e a outra, por (x). Em seguida, já aparece a notação: y = 1,5 + 2,3.x e, ainda: f(x) = 1,5 + 2,3.x. Essa última notação é atribuída a Leonhard Euler. No rodapé da página há uma nota explicativa:

> Na notação f(x) (lê-se f de x) podemos utilizar qualquer letra para indicar a *função*, porém é mais comum usar **f, g** e **h**. No caso da variável independente, também podemos utilizar qualquer letra, mas a letra **x** é a mais comum. (SOUZA, J. R. & PATARO, P. R. M., 2012, p. 85).

Na exposição dos autores por meio dos exemplos não fica claro porque a variável (x) é chamada de "independente" e a variável (y), de dependente. Em determinado trecho, é feita a sugestão: "Outra notação que podemos utilizar para representar a lei dessa função é substituir a variável dependente **y** por **f(x)**." (SOUZA, J. R. & PATARO, P. R. M., 2012, p. 85).

Logo a seguir, já se propõe a representação da *função* por meio de diagramas. Nessa etapa, os autores não fazem nenhuma referência aos conjuntos domínio (D); contradomínio (Cd) e imagem (I). Em seguida, são apresentadas atividades contextualizadas, propondo generalizações, a partir de casos particulares, tais como: com três palitos se constrói um triângulo; com cinco palitos justapostos, dois triângulos; com sete palitos, três triângulos. A atividade pede para: a) construir um quadro relacionando a quantidade **t** de triângulos e a quantidade **p** de palitos; b) escrever uma fórmula que permita calcular a quantidade de palitos em função da quantidade de triângulos; c) quantos palitos são necessários para formar a figura dessa sequência composta de seis triângulos? E a figura composta de 12 triângulos?; d) a figura formada com 41 palitos é composta de quantos triângulos?

Várias outras atividades semelhantes são propostas. E, na sequência, a representação gráfica de uma *função*, utilizando pares ordenados. É apresentada uma pequena história sobre o Plano Cartesiano e a sua origem ligada a René Descartes.

Como se pode observar, o livro texto não traz orientações claras ao professor e nem faz relações do conceito de *função* com o movimento lógico-histórico. No livro didático pesquisado foi possível observar que aparecem apenas alguns nexos conceituais externos referentes ao conceito de *função*, como por exemplo, o conceito de variável, conjunto domínio e conjunto imagem. Não se verifica nenhuma preocupação dos autores com os nexos conceituais internos ou com a essência desse conceito. Outra questão que se evidencia, é o fato de que os autores propõem exercício sobre *funções*, partindo de situações particulares para generalizações e conclusões gerais. Esse movimento é contrário àquele proposto por Davidov (1999) para a formação dos conceitos. Ele afirma que o pensamento do aluno deve mover-se de situações gerais para particulares, e não o contrário. Nesse sentido, seria indicado que os livros didáticos apresentassem primeiro, o processo histórico do conceito de *função* (o pensamento geral) para, em seguida, desenvolver o pensamento lógico desse conceito.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS: A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA

Nesse capítulo, vamos apresentar os procedimentos e métodos adotados para a realização da pesquisa, que foram organizados em quatro etapas: a fundamentação teórica; o diagnóstico da realidade onde a pesquisa foi realizada; o planejamento, a elaboração e o desenvolvimento do experimento didático e a análise dos dados coletados.

Como já foi mencionado, o projeto de pesquisa é parte de um contexto maior, do Programa Observatório da Educação – OBEDUC, desenvolvido na Universidade de Uberaba, com apoio da CAPES intitulado "*O ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do ensino fundamental"*. Por isso, antes mesmo de escrevê-lo eu já fazia parte do grupo de estudos do referido projeto e também, com duas professoras de matemática da rede municipal de ensino e integrantes do mesmo, começamos a nos reunir regularmente (duas vezes por mês a partir de setembro de 2013, conforme a disponibilidade das professoras) com o objetivo de analisar os conteúdos de álgebra dos livros didáticos; questões pertinentes aos assuntos de álgebra do ensino fundamental; elaborar atividades de estudos a serem desenvolvidas com os alunos; analisar *softwares* e aplicação da informática no auxílio das aulas de matemática; analisar artigos e textos sobre a Teoria Histórico-Cultural e o experimento didático. Nessa etapa, a pesquisa aproximou-se de um trabalho colaborativo.

Conforme observa Aquino (2013b), "toda pesquisa se realiza necessariamente por etapas, em dependência do objeto de estudo, do contexto e da metodologia de trabalho.". Assim, a trajetória metodológica foi organizada em quatro etapas não lineares.

2.1 Primeira etapa: pesquisa bibliográfica e análise de documentos

Na primeira etapa, aconteceu a pesquisa bibliográfica, visando à fundamentação teórica com base na Teoria Histórico-Cultural de Vigotski; na Teoria da Atividade de Leontiev e na Teoria da Atividade de Estudo de Davidov; e ainda ao mapeamento do conceito de *função*, a partir das concepções de álgebra e de educação algébrica. Houve também a pesquisa documental, visando ao diagnóstico da realidade; ao estudo de documentos tais como Parâmetros Curriculares Nacionais, planejamentos elaborados pelos professores de matemática do 9º ano da escola onde a pesquisa foi desenvolvida; à análise desse tema nos livros didáticos adotados pela escola para o 9º ano; ao levantamento de estudos sobre formação de conceitos e experimentos didáticos. O conteúdo dessa parte foi apresentado no Capítulo 1.

2.2 Segunda etapa: diagnóstico da realidade

A segunda etapa foi caracterizada pela observação de aulas de matemática para melhor conhecer a dinâmica do dia a dia da sala de aula; os alunos em suas características pessoais, individuais e coletivas; a maneira como se envolvem com as atividades de ensino da disciplina em foco.

Nessa etapa, que pode ser caracterizada como diagnóstico inicial da turma, dedicamo-nos à observação de aspectos dos alunos, tais como: faixa etária, interesse pelo estudo e pela matemática, comportamento em sala de aula, aspectos familiares, origem social dos alunos, relação deles com os professores, depoimentos das pedagogas e da professora de matemática sobre o perfil dos alunos do 9º ano - de maneira geral e especificamente dos envolvidos na pesquisa, atividades propostas nas aulas de matemática, metodologia utilizada nas aulas desta disciplina e envolvimento dos alunos.

2.2.1 Caracterizando o ambiente de pesquisa

Segundo Aquino (2013b), é importante fazer um diagnóstico da realidade que envolve a escola e os alunos sujeitos da pesquisa. Para ele é importante conhecer a prática pedagógica adotada, o Projeto Político-Pedagógico da escola, o Plano de Ensino do Professor, além do perfil social, a caracterização psicopedagógica e outras informações referentes à turma de alunos pesquisada. Os dados que se seguem foram obtidos a partir de pesquisa nos documentos da escola (PPP, secretaria e arquivos), bem como de observações nas salas de aula do 9º ano e também de investigações junto à equipe pedagógica da escola.

2.2.1.1 A escola

Segundo dados do PPP (2014-2016), a escola foi fundada em junho de 1967, com o nome de Colégio Comercial “Frei Eugênio” e funcionava como escola particular de 2º grau, na Praça Frei Eugênio, nº 43. O nome foi uma homenagem a Frei Eugênio Maria da Gênova, frade capuchinho de Uberaba.

O seu nome foi alterado em 1982 para “Ginásio “Frei Eugênio”, com acréscimo do ensino de 1º grau (5ª à 8ª séries). Com a Portaria nº. 333/82, recebe a denominação de “Colégio Frei Eugênio de 1º e 2º graus”.

Em 28 de agosto de 1986 a escola é doada ao município de Uberaba pelos seus fundadores: professor Mozart dos Santos e Maria Alice Juliano Mendes. Por meio da Lei nº 3.799, de 25 de setembro de 1986, foi criada a “Escola Municipal Urbana Frei Eugênio de 1º e 2º graus”, que a partir de janeiro de 1987 passou a funcionar em prédio próprio, na rua Marechal Deodoro, nº 95. Após a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), o nome da escola foi alterado para “Escola Municipal Urbana Frei Eugênio”.

A escola está instalada em uma área de aproximadamente 5.800 m^2, com 4.374 m^2 de área construída. É composta por cinco blocos, sendo: Bloco 1 – onde funciona a parte administrativa (secretaria, direção, coordenação pedagógica, sala dos professores, mecanografia, sala de informática e refeitório). Esse bloco preserva a construção do antigo prédio (um hospital) que foi adaptado para o funcionamento da escola. Bloco 2 – é constituído por quatro salas de aula, biblioteca, laboratório de ciências e sanitários. Bloco 3 – constituído por oito salas de aula e um depósito; e Bloco 4, que contém um anfiteatro, sete salas de aula e uma sala dividida em dois espaços onde estão instaladas as “Mesas Pedagógicas” e ainda funciona o ASIP (Ação Sistemática de Intervenção Pedagógica). No prédio principal da escola existem 18 salas de aula que são totalmente ocupadas nos turnos matutino e vespertino.

A escola conta, ainda, com um prédio anexo, em local próximo (na mesma rua), onde funcionam cinco salas de aula com 80 alunos, nos turnos matutino e vespertino. No período noturno, existe o projeto EJA/CEMEC que atende em regime semipresencial a cerca de 150 alunos. Ainda, são desenvolvidos, na escola, outros projetos como “Jornada Ampliada” – a permanência dos alunos em horários extraturno – e IEM – Intensivão para o Ensino Médio. A escola atende a um total de 1.277 alunos nos cursos regulares, conforme tabela a seguir.

5 Turmas de 6 anos – 1º ano	Ciclo Inicial de Alfabetização	79
4 Turmas de 7 anos – 2º ano		98
3 Turmas de 8 anos – 3º ano		84
4 Turmas de 9 anos – 4º ano	Ciclo Complementar de Alfabetização	97
4 Turmas de 10 anos – 5º ano		117
6 Turmas de 6º ano	Seriação	164
5 Turmas de 7º ano		142
5 Turmas de 8º ano		164
5 Turmas de 9º ano		164
Alunos do CMEC	Supletivo Semipresencial	168
Total de Alunos		**1.277**

Quadro 4: Alunos matriculados na Escola Municipal por turma e ciclos, no ano de 2014.
Fonte: PPP (2014-2016) da Escola Municipal Urbana “Frei Eugênio”.

Vale ressaltar que, apesar de contar com um amplo espaço físico, a escola carece de espaços para acomodar com dignidade todos os seus alunos. Faltam sanitários (em quantidade suficiente para o número de alunos) e os que existem estão necessitando de reformas. Faltam salas de aula com espaços adequados para atender aos alunos que participam da jornada ampliada (ficam na escola por dois períodos completos). Faltam salas para acomodar todos os alunos (existem cinco turmas que estudam em salas anexas).

A partir da sua ‘missão’ já se pode perceber a preocupação da equipe da escola com a participação coletiva envolvendo todos os segmentos da comunidade escolar, na solução de problemas ligados a questões pedagógicas, administrativas e financeiras.

> Missão da Escola Municipal Urbana “Frei Eugênio”, definida coletivamente: “Coordenar ações pedagógicas, administrativas e financeiras, explicitadas no Projeto Político-Pedagógico, com a participação efetiva dos poderes públicos, SEMEC e de todos os segmentos da comunidade escolar, visando a formação de um ser humano crítico, consciente e capaz de utilizar seus conhecimentos no exercício pleno da cidadania. (PPP 2014-2016, p. 9).

2.2.1.2 A turma

A Escola Municipal “Frei Eugênio” conta com cinco turmas de 9º ano no turno matutino. A escolha da turma do 9º ano ‘C’ se deu por uma questão de adequação das necessidades e disponibilidades de horários do pesquisador e da professora de matemática titular da referida turma. Ela também faz mestrado e sua aula presencial é na quinta-feira, a partir das 8 horas. Como ela iria definir um professor substituto para a referida turma, na 5ª feira, a partir do 2º horário, definimos, em entendimentos com ela, com a direção da escola e com a coordenação pedagógica, que a pesquisa seria realizada na turma do 9º ano ‘C’, que tem duas aulas de matemática na 5ª feira (2º e 3º horários).

Antes de iniciarmos a pesquisa com os alunos, conversamos com a professora titular da turma (Valéria), que falou também com os alunos sobre o projeto de pesquisa e explicou a eles o porquê da escolha daquela turma. Em seguida, com a diretora da escola, estivemos na sala de aula e dialogamos, também, com os alunos sobre a pesquisa, reforçamos a razão da escolha da turma e entregamos o Termo de Assentimento dos alunos, junto com o TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido).

Todos os alunos devolveram, naquele mesmo dia, o Termo de Assentimento devidamente assinado por eles. Contudo, como são menores, solicitamos que pedissem aos pais ou responsáveis que assinassem o TCLE. Combinamos de voltar à sala na terça-feira para apanhar os termos assinados. Explicamos que pretendíamos começar a pesquisa na quinta-feira seguinte, mas, para tanto, era necessária a autorização dos pais ou responsáveis. Voltamos à sala no dia combinado e perguntamos quem havia levado o termo assinado. Apenas dois alunos levantaram a mão, confirmando.

Fiquei um pouco decepcionado e até preocupado, pois se apenas dois alunos haviam obtido a devida autorização, eu imaginei quão difícil seria conseguir autorização de todos os demais. Naquele mesmo dia passei na secretaria da escola e pedi à auxiliar de secretaria uma relação dos alunos do 9º ano ‘C’, com os respectivos números de telefones das famílias. Passei toda a tarde ligando para as famílias, explicando sobre a pesquisa, sua importância para mim e para os alunos e pedi que, caso estivessem de acordo, assinassem o TCLE.

No outro dia, passei na respectiva sala e perguntei aos alunos quem havia levado o termo assinado. Apenas dois alunos não estavam com o documento: um porque havia esquecido o termo assinado em sua casa, outra aluna porque havia faltado e não levara o papel para os pais assinarem. Nesse momento, senti uma imensa satisfação, misturada com uma sensação de euforia. Foi então que percebi que o meu trabalho de pesquisa poderia obter o sucesso desejado. Recolhi todos os termos e confirmei a primeira atividade de pesquisa para a próxima quinta-feira, dia 21 de agosto de 2014.

A sala de aula do 9º ano ‘C’ conta com 33 alunos. No primeiro dia de atividades na referida turma, dispusemos os alunos em ‘círculo’ e tivemos uma conversa com eles, explicando todos os principais aspectos da pesquisa, reforçamos sua importância para nós (pesquisador) e para eles; ressaltamos a importância do tema (*Funções* polinomiais) no contexto matemático, relembramos o caráter voluntário contido no Termo de Assentimento e TCLE; procuramos ouvir os alunos sobre suas expectativas quanto à pesquisa. Após esse primeiro contato com a turma, promovemos a divisão dos alunos em grupos (foram formados seis grupos), separados por afinidades; com 4 a 6 alunos em cada: o Grupo 1 (G1) com seis alunos; o Grupo 2 (G2) com seis; o Grupo 3 (G3) com cinco alunos; o Grupo 4 (G4) com quatro; o Grupo 5 (G5) com seis; e o Grupo 6 (G6) com seis alunos.

A seguir, apresentamos gráficos que indicam alguns dados dos alunos do 9º ano ‘C’. Os dados foram obtidos na secretaria e no Projeto Político-Pedagógico da escola (2014-2016), enquanto os gráficos foram elaborados pelo pesquisador.

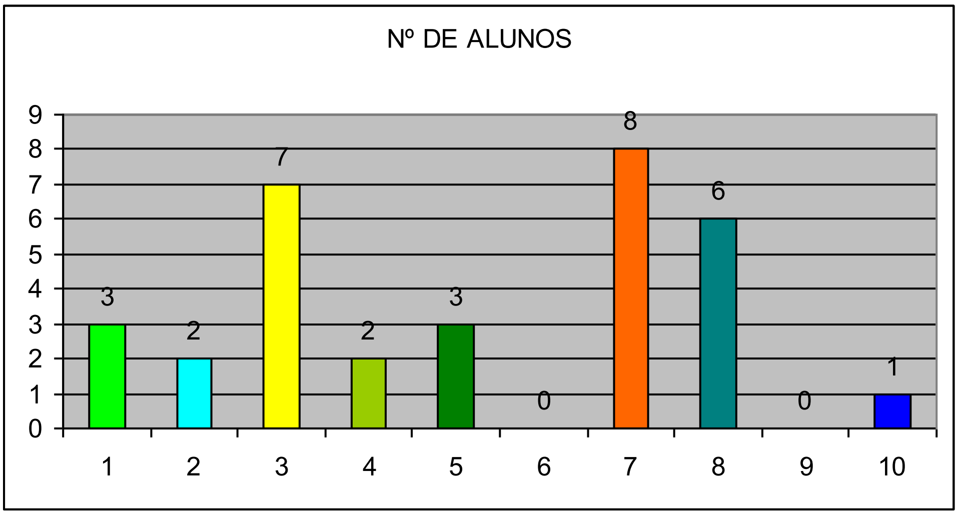


Gráfico 1: Tempo (em anos) de estudo dos alunos do 9º ano ‘C’ na Escola Municipal “Frei Eugênio”.
Fonte: Secretaria da escola.

Como se observa, a metade dos alunos está na escola há mais de sete anos, o que significa que fizeram todo o ensino fundamental nesta unidade de ensino. A outra metade, o segundo ciclo do ensino fundamental ou parte dele, sendo a média de permanência na escola de 5,1 anos.

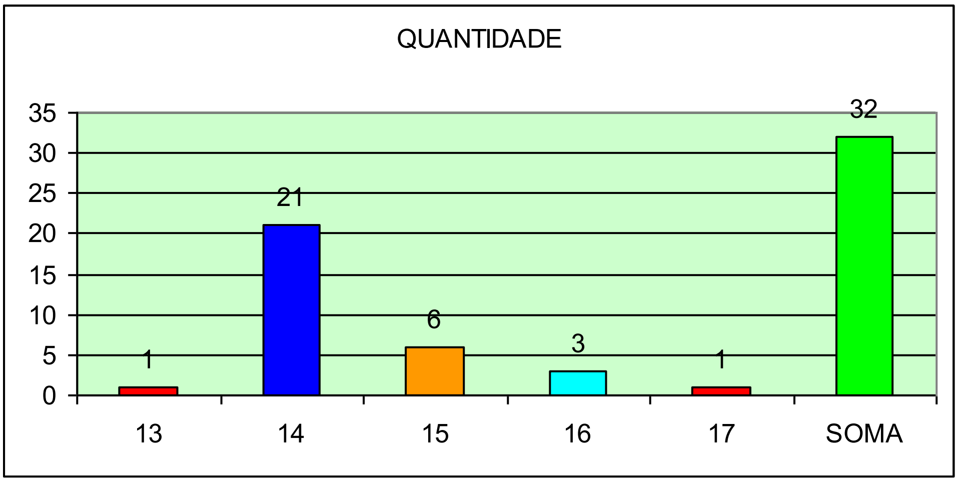


Gráfico 2: Idade dos alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: Secretaria da escola.

A maioria dos alunos, 65%, tem 14 anos, idade em que geralmente os alunos brasileiros estão cursando o 9º ano, portanto, nessa turma, a defasagem aluno-série não é uma característica. Apenas três alunos têm 16 anos e um tem 17. A média das idades é de 14,4 anos.

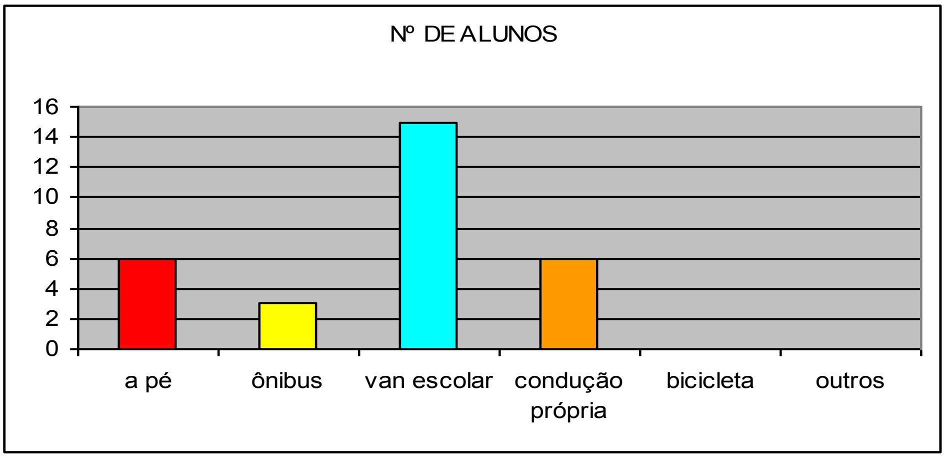


Gráfico 3: Meio de transporte dos alunos do 9º ano 'C'.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

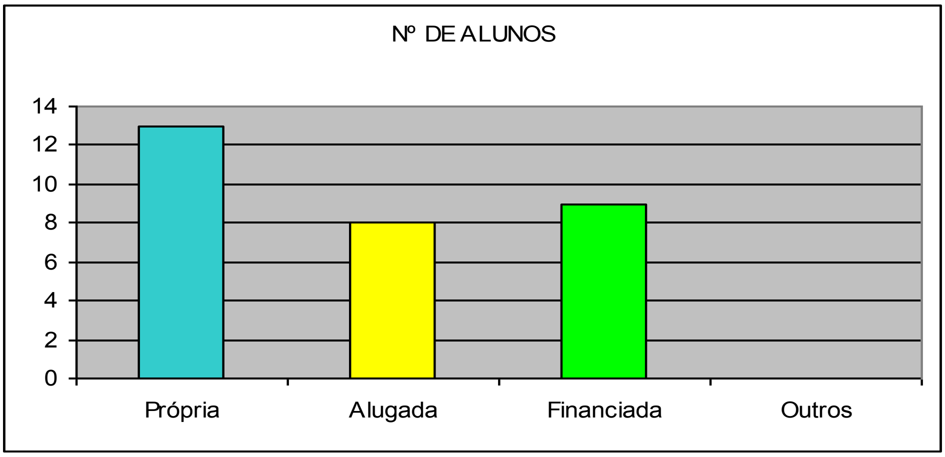


Gráfico 4: Casas onde moram os alunos do 9º ano 'C'.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

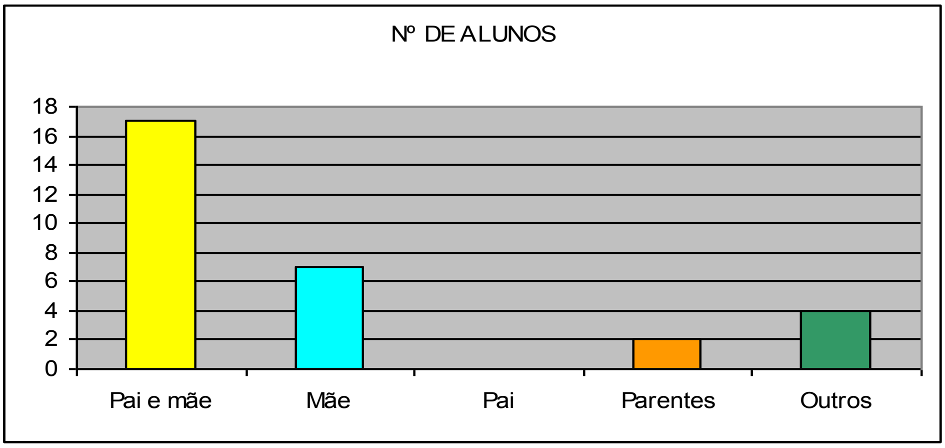


Gráfico 5: Com quem moram os alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

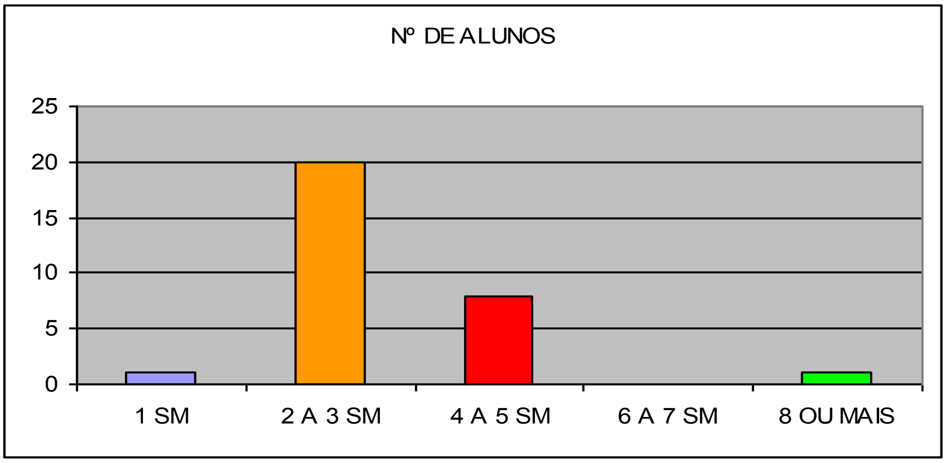


Gráfico 6: Renda familiar dos alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

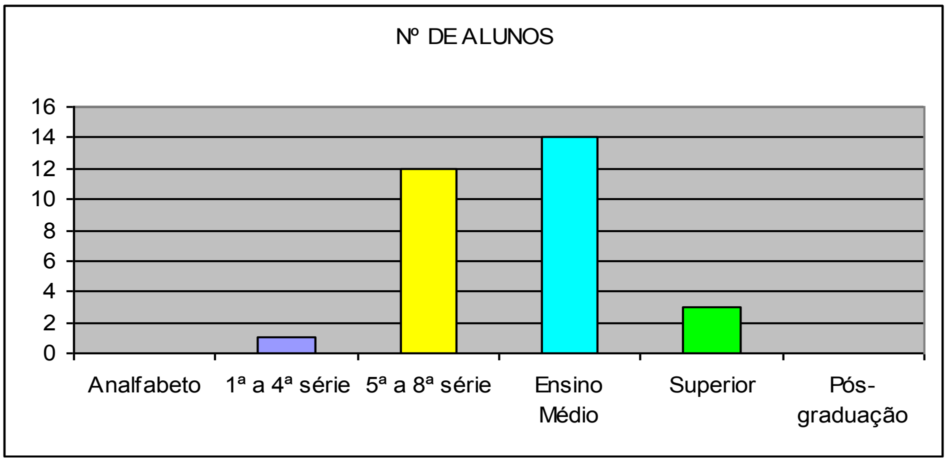


Gráfico 7: Escolaridade paterna dos alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

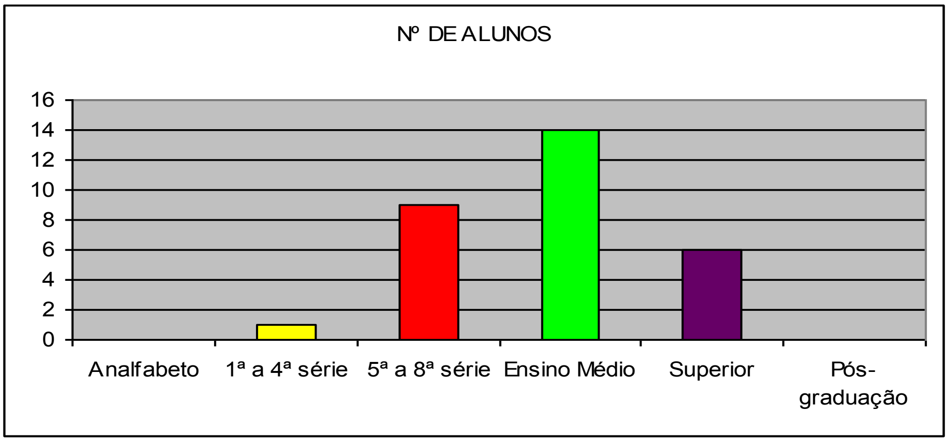


Gráfico 8: Escolaridade materna dos alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

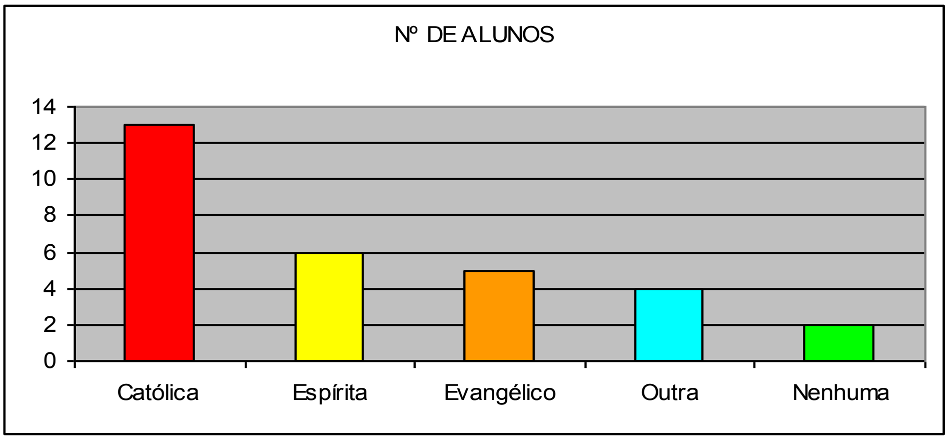


Gráfico 9: Religião dos alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

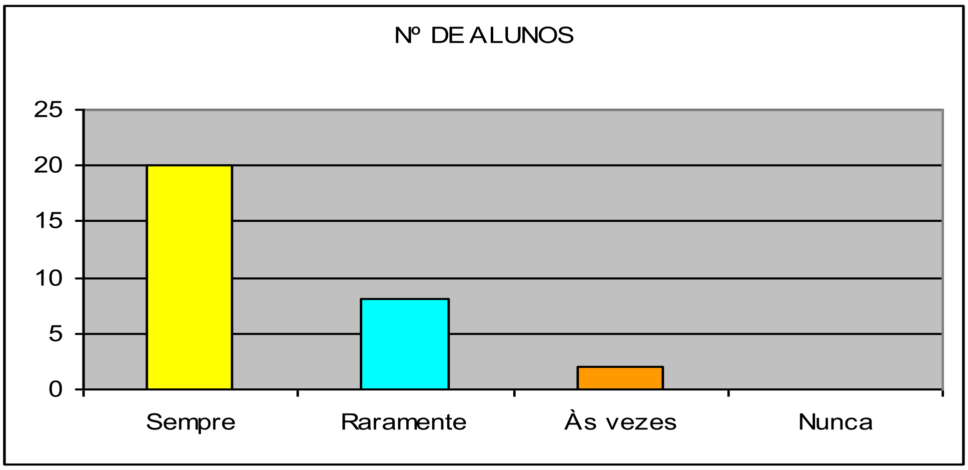


Gráfico 10: Acompanhamento da família nas atividades escolares dos alunos do 9º ano ‘C’.
Fonte: PPP (2014-2016) da escola.

Os dados dos oito últimos gráficos foram extraídos do PPP (2014-2016) da escola e nos revelam questões socioeconômicas dos alunos, tais como: a metade vai para a escola de van escolar; a maioria das famílias tem casa própria; os alunos, na sua maioria, moram com o pai e a mãe; a renda familiar gira em torno de três salários mínimos; a escolaridade dos pais está concentrada entre ensino fundamental completo e ensino médio; quase todos os alunos têm uma religião definida, com predominância da católica; e a maioria dos pais acompanha as atividades escolares dos filhos. Isso nos leva a concluir que se trata de uma turma de classe média baixa tendendo a pobre, com o predomínio de famílias estruturadas e que acompanham os filhos na escola. Por conseguinte, pode-se esperar que se trata de um grupo de alunos sem maiores problemas econômico-sociais e, por isso, estão inseridos em um contexto histórico-cultural propício para o desenvolvimento intelectual.

2.3 Terceira etapa: elaboração e desenvolvimento do experimento didático

Esta etapa foi dedicada à elaboração das atividades de ensino de forma colaborativa com os professores de matemática envolvidos no projeto de pesquisa, em conformidade com a teoria estudada e com os conteúdos de álgebra contidos no planejamento da turma objeto da pesquisa. A elaboração das atividades obedeceu aos princípios estabelecidos nas teorias de Leontiev e Davidov, sobre Atividade e Atividade de Ensino, destacando: *finalidades*, *tarefas*, *ações* e *operações*.

Ocorreu, a seguir, o desenvolvimento das atividades com os alunos do 9º ano da Escola Municipal "Frei Eugênio", com registros de todas as atividades em diário de campo, anotações dos alunos, gravações, fotos e filmagens, sempre utilizando nomes fictícios e preservando a identidade dos alunos com a descaracterização das imagens.

2.3.1 O experimento didático

"O método de pesquisa deve considerar as diversas facetas do sistema didático experimental que tem influência sobre o desenvolvimento dos escolares, envolvendo suas relações sistemáticas, tanto as internas como as externas." (AQUINO, 2013b, p. 4). O nosso método de pesquisa caracteriza-se como um experimento didático.

> [...] se os nossos objetos de estudo são *processos conscientes*, e a metodologia de trabalho precisa se corresponder com a natureza do objeto estudado, como bem nos ensina Vigotski, a Didática Desenvolvimental precisa de métodos que se adéquem à *natureza processual* de seus objetos de estudo. Um desses métodos é o *experimento didático-formativo*. (AQUINO, 2013b, p. 3).

Para Aquino (2013b), o experimento didático, organizado conscientemente em determinadas condições, tem a função de elevar a qualidade da aprendizagem e do desenvolvimento dos alunos. O autor completa dizendo que se trata de um método que pertence ao âmbito das ciências pedagógicas, especificamente à didática e, portanto, utiliza o sistema conceitual da pedagogia. O autor afirma que "o *método do experimento didático-formativo* vai além do método pesquisa, convertendo-se, também, em método de ensino e educação experimentais." (AQUINO, 2013b, p. 15).

O método do *experimento formativo*, um dos mais frequentes na Teoria Histórico-Cultural, foi utilizado na investigação das peculiaridades da organização do ensino e de sua influência no desenvolvimento mental dos alunos (DAVIDOV, 1988). Vigotski utilizou esse método em suas pesquisas e o nomeava como genético-causal, ou genético-experimental, por permitir o estudo dos processos psicológicos em sua origem. Consiste em estudar as mudanças no desenvolvimento do psiquismo pela formação dirigida dos processos psicológicos investigados. Portanto, é um método vinculado à psicologia.

Com base neste método, desenvolveu-se o *experimento didático-formativo*, que pode ser utilizado na investigação que busca explorar a relação entre o ensino e o desenvolvimento da atividade mental dos alunos (FREITAS, 2010, p. 6). Vários autores realizaram pesquisas envolvendo esse método de investigação, cujos nomes variam, tais como: experimento formativo, experimento didático, experimento didático-formativo e experimento de ensino. Neste nosso estudo, optamos por utilizar apenas a expressão experimento didático.

Freitas (2010) chama de experimento didático aquele em que o professor apresenta tarefas aos alunos para que realizem ações pelas quais vão dominando os procedimentos mentais correspondentes aos conceitos. Para a autora, a realização do experimento didático requer do pesquisador, inicialmente, identificar os conceitos básicos (rede de conceitos) que dão suporte ao núcleo conceitual, para então observar o modo como os alunos vão formando conceitos, por meio das ações de aprendizagem.

O experimento didático vem sendo discutido por autores que se apoiam na abordagem histórico-cultural, dentre eles Davidov (1988), Libâneo (2000) e Freitas (2010). O experimento didático é "[...] um método de pesquisa pedagógica essencialmente fundamentada na Teoria Histórico-Cultural" (LIBÂNEO, 2000, p. 5) e representa uma alternativa importante para pesquisas didáticas; sobretudo, quando se pretende conhecer e analisar as relações entre as ações de ensino do professor e as mudanças qualitativas que essas ações devem promover na atividade mental (aprendizagem) do aluno, por meio da influência ativa do pesquisador em sala de aula, com um plano de ação intencional, observando e acompanhando as transformações.

Em outras palavras, o experimento didático é um modo de pesquisar a atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do aluno no contexto da sala de aula. É "experimento" por se tratar de uma intervenção pedagógica, orientada por determinada metodologia de ensino, visando desenvolver as ações mentais dos alunos. É "didático" porque ocorre na sala de aula, envolvendo uma sucessão de ações e interações com os alunos, visando à formação das ações mentais. Desse modo, o experimento didático pode ser caracterizado como sendo a pesquisa da prática de ensino, para a prática de ensino e com a prática de ensino.

> O experimento didático formativo visa analisar mudanças qualitativas no pensamento do sujeito em função de seu aprender e a partir de certo modo de ensinar. As mudanças são investigadas como processos inseparáveis do aprendizado e decorrentes da realização de uma tarefa. A tarefa e seus passos estruturam-se em torno de determinado conceito científico a ser aprendido. (FREITAS, 2010, p. 60).

"O experimento didático, no enfoque histórico-cultural, é uma forma de pesquisa que gera conhecimento didático." (FREITAS, 2010, p. 61). Ele é utilizado na investigação que busca explorar uma questão central: que relação há entre o ensino e o desenvolvimento da atividade mental dos alunos?

A partir da realização do experimento didático presume-se ser possível analisar e avaliar o quanto o aluno evoluiu e avançou no pensamento teórico, na formação dos conceitos sobre o tema proposto e no desenvolvimento mental.

2.3.2 Planejando o experimento didático e elaborando atividades

O planejamento constitui parte importante do processo de pesquisa. Segundo Libâneo (2009, p. 1), "O plano de ensino é um procedimento indispensável da atividade profissional de professores.". Por meio dele é possível antecipar mentalmente as ações a serem realizadas, tais como: conteúdos, objetivos, estratégias, gestão das aulas. Para Davidov (1988), a escolha dos conteúdos a serem trabalhados e a forma de ensiná-los são decisivas no processo de ensino e aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos.

No momento de planejar um experimento didático aparece inicialmente o conflito entre o que ensinar (conteúdos e objetivos) e como ensinar (estratégias e recursos didáticos). Definir o que realmente queremos ensinar, identificar o essencial do conceito não é tarefa fácil. Acrescenta-se a isso a elaboração de estratégias e recursos para se chegar à essência do conceito.

2.3.2.1 O planejamento

O objetivo geral da pesquisa é analisar como ocorre a formação do conceito de *função* nos anos finais do ensino fundamental. Como objetivos específicos, definimos: 1) fundamentar teoricamente a formação de conceitos e atividades de estudo, na perspectiva histórico-cultural; 2) levantar os conteúdos de álgebra propostos nos currículos, livros didáticos e planejamentos dos professores dos anos finais do ensino fundamental (9º ano), especialmente os ligados ao conceito de função; 3) elaborar e aplicar as atividades para a formação do conceito de *função* nos anos finais do ensino fundamental; 4) analisar os episódios visando à formação do conceito de *função*; 5) promover o desenvolvimento profissional de professores de matemática da educação básica da rede municipal de Uberaba, por meio de sua participação no estudo.

Na organização do planejamento da atividade experimental foram observadas as orientações de Libâneo & Freitas (2009b), quanto à elaboração do plano de ensino; e também de Pidkasisti (1986), quanto ao planejamento das atividades experimentais.

Os objetivos das atividades propostas e as ações foram definidos de forma a orientar o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos sobre cada tema abordado. A apropriação dos conceitos científicos e a formação do pensamento teórico constituem a base do estudo e, consequentemente, do processo de ensino e aprendizagem. Assim, a organização das atividades propostas procurou seguir o raciocínio do geral para o particular, do coletivo para o individual e do abstrato para o concreto. Nesse processo, o professor deixa de ser o único a mediar a relação do aluno com o conhecimento. Os colegas, interagindo uns com os outros, agem também nas ZDPs uns dos outros. Assim, contribuem para o desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem. O pensamento teórico, segundo Davidov (1988), se desenvolve a partir do momento em que o aluno deixa de operar com representações e passa a operar com conceitos. Ter um conceito sobre determinado objeto significa saber reproduzir mentalmente o seu conteúdo e construí-lo. Assim, é possível conceituar um objeto quando se compreende sua essência.

Pelo processo tradicional de se organizar o ensino, o caminho percorrido normalmente segue o trajeto inverso da proposta de ensino, ou seja, a partir de induções do particular para o geral. Nessa perspectiva as relações e interações entre professor-aluno, aluno-professor e aluno-aluno podem ficar comprometidas.

Os conteúdos a serem desenvolvidos são *funções* polinomiais de 1º e 2º graus que constam da relação de conteúdos propostos nos PCN (1998) e também da relação de conteúdos previstos no planejamento anual de matemática do 9º ano da Escola Municipal "Frei Eugênio".

A realização do experimento didático tem como principal objetivo a formação do conceito de *função* para provocar o desenvolvimento do pensamento cognitivo do aluno. Para tanto, consideramos alguns aspectos dos alunos (sujeitos da pesquisa), tais como: relacionamento com os colegas, motivação, interesse, suas experiências e conceitos cotidianos, o conhecimento dos alunos sobre o tema em questão e sobre outros relacionados com ele, a capacidade dos alunos para expressar generalizações e instrumentos de análise.

A seguir, apresentamos o planejamento que foi elaborado em conformidade com a proposta de pesquisa apresentada à escola e, portanto, com a aprovação da sua equipe pedagógica.

<table>
<tr><th colspan="5">ESCOLA MUNICIPAL URBANA "FREI EUGÊNIO"
PLANO DE UNIDADE DIDÁTICA – MATEMÁTICA
TURMA: 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL</th></tr>
<tr><td colspan="5">OBJETIVO GERAL: desenvolver um sistema de atividades de estudo para a formação do conceito de função e, particularmente os conceitos de função, função afim (função de 1º grau) e função quadrática (função de 2º grau), junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo/itens do conteúdo desenvolvidos</td><td>Objetivos específicos</td><td>Desenvolvimento metodológico</td><td>Avaliação</td><td>Recursos</td></tr>
<tr><td colspan="5">1ª ATIVIDADE: Relações e funções – o conceito de função</td></tr>
<tr><td>1. Análise do texto: "O que são relações?"</td><td>I – Promover a discussão entre os alunos a partir dos conceitos cotidianos que eles têm sobre relações.

II – Refletir sobre a importância do conhecimento historicamente elaborado e</td><td>1 – Organização da turma em grupos com 4 a 6 alunos.

2 – Distribuição da folha com o texto a ser lido e analisado pelos alunos componentes de cada</td><td>A avaliação será feita a partir da análise das atividades seguintes, quando os alunos terão oportunidade de se expressar</td><td>Folha de papel impressa para cada aluno, contendo o texto e as atividades a serem respondidas;
um gravador para cada grupo;</td></tr>
</table>

	acumulado para a evolução da humanidade. III – Perceber as características essenciais de interdependência (inter-relação) e fluência (mudança constante) em tudo o que existe. IV – Motivar os alunos para a realização das atividades que serão propostas para a formação do conceito de *função*.	grupo. 3 – Distribuição da folha de atividades sobre o texto, a ser respondida pelos componentes de cada grupo.	sobre o conceito de relação e *função*.	filmadora, máquina fotográfica.
2. Avaliação diagnóstica	I – Aplicar uma avaliação diagnóstica para verificar que conceito os alunos pesquisados têm da álgebra e das expressões algébricas que envolvem os conteúdos do ensino fundamental.	1 - Aplicação da avaliação diagnóstica de forma individual.	Correção, tabulação e análise da avaliação diagnóstica para identificar e tentar sanar dificuldades encontradas.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo a as questões da avaliação a serem respondidas; filmadora e máquina fotográfica.
3. A árvore genealógica	I - Evidenciar os primeiros conceitos 'cotidianos' de relações. II – Apresentar aos alunos alguns termos utilizados nas relações e *funções*. III - Entender os significados dos primeiros termos que compõem o conceito de *função*. IV - Abstrair e generalizar elementos da formação da lei que caracteriza uma *função*.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior. 2 - Organização da turma em grupos. 3 – Distribuição da folha com a atividade a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Acompanhamento e orientações sobre o desenvolvimento das atividades propostas.	A avaliação será feita a partir da análise das atividades desenvolvidas em grupos.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; um gravador para cada grupo; filmadora, máquina fotográfica.
4. O que é *função*?	I – Identificar se uma relação é ou não *função*. II - Aplicar o conceito de *função* nas atividades propostas. III - Estabelecer a relação entre os elementos de dois conjuntos a partir da regra ou 'lei' de formação. IV - Abstrair e generalizar elementos da formação da lei que caracteriza uma *função*.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior. 2 - Organização da turma em grupos. 3 – Distribuição da folha com a atividade a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Acompanhamento e orientações sobre o desenvolvimento das atividades propostas.	A avaliação será feita a partir da análise das atividades desenvolvidas em grupos.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; um gravador para cada grupo; filmadora, máquina fotográfica.
5. Nexos conceituais da	I - Citar exemplos do dia a dia que representam	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da	A avaliação será feita a partir da	Folha de papel impressa para

função	relações e *funções*. II - Reconhecer que, em uma *função*, podemos identificar dois valores (grandezas) em que um deles varia de acordo com a variação do outro e, por isso, são chamados variáveis. III - Identificar o domínio (D); o contradomínio (Cd) e a imagem (I) de uma *função*.	aula anterior. 2 - Organização da turma em grupos. 3 – Distribuição da folha com a atividade a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Acompanhamento e orientações sobre o desenvolvimento das atividades propostas.	análise das atividades desenvolvidas em grupos.	cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; um gravador para cada grupo; filmadora, máquina fotográfica.
6. Relação e *função* no dia a dia	I – Observar, por meio dos exemplos do **vídeo (A noção de *função*)**, a inter-relação entre diversas ações do dia a dia. II – Aplicar, nos exercícios propostos, os conceitos de relação, *função*, domínio, contradomínio e imagem. III – Perceber que a utilização dos símbolos e notações das *funções* pode facilitar a representação e a compreensão.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior. 2 – Organização da turma no anfiteatro da escola para assistir ao filme sobre *funções*. 3 – Apresentação do vídeo sobre *funções*. 4 - Distribuição da folha com a atividade sobre o filme a ser desenvolvida pelo grupo. 5 – Acompanhamento e orientações sobre o desenvolvimento das atividades propostas.	A avaliação será feita a partir da análise das atividades desenvolvidas em grupos.	*Datashow*; filme sobre *função*; folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; um gravador para cada grupo; filmadora, máquina fotográfica.
2ª ATIVIDADE: *Funções* e expressões algébricas – *função* afim e *função* quadrática				
Conteúdo/itens do conteúdo desenvolvidos	Objetivos específicos	Desenvolvimento metodológico	Avaliação	Recursos
7. Generalização e *funções*	I – Abstrair, a partir da construção na folha quadriculada, a relação existente entre os azulejos pretos e brancos. II – Generalizar, a partir do preenchimento da tabela e da construção na folha quadriculada, a expressão algébrica que relaciona os azulejos brancos e pretos. III - Aplicar os conceitos de variável dependente e variável independente na expressão algébrica.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior. 2 – Organização da turma em grupos. 3 - Distribuição da folha com a atividade sobre os azulejos e *funções* a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Acompanhamento e orientações sobre o desenvolvimento das atividades propostas.	A avaliação será feita a partir da análise das atividades desenvolvidas em grupos.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; folha de papel quadriculado para a construção da modelagem sobre os azulejos, um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.
8. Pares ordenados	I – Aplicar os conceitos de domínio, contradomínio e imagem.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior.	A avaliação será feita a partir da análise das	Folha de papel impressa para cada aluno,

	II – Compor os pares ordenados de uma *função*, a partir da expressão algébrica.	2 – Organização da turma em grupos. 3 - Distribuição da folha com a atividade sobre a formação dos pares ordenados a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Divisão dos alunos em dois grupos: domínio e imagem e distribuição de cartões contendo os números que formarão o par. 5 – Acompanhamento e orientações sobre o desenvolvimento das atividades propostas.	atividades desenvolvidas por cada grupo e da observação da formação dos pares entre os alunos.	contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; cartões com cores e números diferentes para a formação dos pares ordenados; um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.
9. Representação gráfica da *função* afim	I – Representar graficamente (no plano cartesiano) os pares ordenados de uma *função* afim. II – Perceber que o gráfico da *função* afim definida de R em R é uma reta. III – Perceber a proporcionalidade como essência do conceito de *função* afim.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior. 2 – Organização da turma em grupos. 3 - Distribuição da folha com a atividade sobre a representação gráfica de pares ordenados a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Solicitação aos componentes de cada grupo que representem no plano cartesiano (previamente construído no quadro) os pares ordenados encontrados pelo grupo.		Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; cartões com cores e números diferentes para a formação dos pares ordenados; um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.
10. Representação gráfica da *função* quadrática	I – Representar graficamente (no plano cartesiano) os pares ordenados de uma *função* quadrática. II – Perceber que o gráfico da *função* quadrática definida de R em R é uma parábola. III – Perceber a simetria como essência do conceito de *função* quadrática.	1 – Discussão com os alunos sobre a atividade da aula anterior. 2 – Organização da turma em grupos. 3 - Distribuição da folha com a atividade sobre a representação gráfica de pares ordenados a ser desenvolvida pelo grupo. 4 – Solicitação aos componentes de cada grupo que representem no plano cartesiano (previamente construído		Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; cartões com cores e números diferentes para a formação dos pares ordenados; um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.

		no quadro) os pares ordenados encontrados pelo grupo.		
3ª ATIVIDADE: *Funções* e expressões gráficas – *função* afim e *função* quadrática				
Conteúdo/itens do conteúdo desenvolvidos	Objetivos específicos	Desenvolvimento metodológico	Avaliação	Recursos
11. O uso das tecnologias da informação para análise do gráfico da *função* afim	I - Cientificar-se da fórmula geral da *função* afim: **f(x) = ax +b** e de que o gráfico dessa *função* (quando definida em R) é uma reta. II - Identificar na representação gráfica da *função* afim, seus principais elementos: inclinação (sentido) da reta, raiz da *função* e o coeficiente linear. III – Compreender a proporcionalidade como essência do conceito de *função* afim.	1 – Discussão com os alunos o conceito de *função*, seus principais elementos e sobre a *função* afim. 2 – Organização da turma (na sala de informática da escola) em duplas, uma para cada computador. 3 - Distribuição da folha com a atividade sobre a representação gráfica da *função* afim. 4 – Orientações às duplas sobre a realização e a interpretação das atividades propostas.	A avaliação será feita a partir da análise dos gráficos construídos por cada dupla.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; um computador para cada dupla; um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.
12. O uso das tecnologias da informação para análise do gráfico da *função* quadrática	I - Cientificar-se da fórmula geral da *função* quadrática: **f(x) = ax^2 +bx + c**, e de que o gráfico dessa *função* (quando definida em R) é uma parábola. II - Identificar na representação gráfica da *função* quadrática, seus principais elementos tais como: sentido da curva (parábola), raízes da *função* e o coeficiente linear. III – Compreender a simetria como essência do conceito de *função* quadrática.	1 – Discussão com os alunos sobre o conceito de *função*, seus principais elementos e sobre a *função* afim. 2 – Organização da turma (na sala de informática da escola) em duplas, uma para cada computador. 3 - Distribuição da folha com a atividade sobre a representação gráfica da *função* afim. 4 – Orientações às duplas sobre a realização e a interpretação das atividades propostas.	A avaliação será feita a partir da análise dos gráficos construídos por cada dupla.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as atividades e as instruções de como resolvê-las; cartões com cores e números diferentes para a formação dos pares ordenados; um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.
13. Jogando com as *funções*	I - Identificar os principais pares ordenados (pontos) de uma *função* no gráfico cartesiano (que será colocado sobre a mesa), a partir de sua expressão algébrica (lei de formação). II - Despertar a atenção na formação do par “ordenado”, identificando a variável independente (normalmente representada	1 – Discussão com os alunos sobre gráficos de *função* afim e quadrática e seus principais elementos. 2 – Organização da turma em grupos para o jogo: disputa individual ou de parceiros. 3 - Distribuição do baralho de cartas e do gráfico impresso para	A avaliação será feita a partir da análise do desempenho dos jogadores e dos resultados dos jogos.	Folha de papel impressa para cada aluno, contendo as regras do jogo e as instruções de como jogá-lo; baralho com os pares ordenados ou com os elementos para a formação dos mesmos; folhas

	por x) e a variável dependente (normalmente representada por y). III - Desenvolver habilidade para identificar elementos do gráfico, tais como: inclinação, raízes, vértice e coeficiente linear.	cada grupo. 4 – Acompanhamento e orientações sobre o jogo.		contendo o desenho do gráfico; um gravador para cada grupo; filmadora e máquina fotográfica.
Avaliação				

Quadro 5: Síntese do planejamento do experimento didático.
Fonte: O autor, 2014.

2.3.2.2 A elaboração das atividades

Após o diagnóstico da realidade escolar, o pesquisador iniciou o processo de elaboração do ‘sistema didático experimental’, sob a orientação e colaboração da sua orientadora. O assunto a ser explorado nas atividades da pesquisa foi devidamente discutido com a equipe pedagógica da escola e com as professoras de matemática das turmas do 9º ano (a titular, que na época do planejamento estava licenciada, e a substituta). O tema “*Funções*” faz parte do conjunto de conteúdos a serem estudados no 9º ano e consta do planejamento anual dessa turma.

As atividades sobre “A formação do conceito de *função*” foram organizadas de forma a conduzir o pensamento dos alunos de “situações abstratas” para “situações concretas”; de “conceitos gerais” para “conceitos particulares”, conforme sugere Núñez (2009): “Na lógica da formação do pensamento teórico a formação dos conceitos vai do universal, do geral, para suas manifestações particulares.”.

Algumas das atividades foram criadas, outras copiadas de textos já publicados (artigos, teses e dissertações) e outras, elaboradas e adaptadas a partir de publicações em livros. Existem textos explicativos sobre a resolução de cada atividade proposta e também sobre a definição de novos termos que aparecem na atividade. A sequência didática é composta por três conjuntos de atividades:

1) Relações e *Funções*: o conceito de *função* (com seis atividades);
2) *Funções* e Expressões Algébricas: *função* afim e *função* quadrática (com quatro atividades); e
3) *Funções* e Expressões Gráficas: *função* afim e *função* quadrática (com três atividades).

As atividades foram elaboradas e orientadas de modo a construir significados para a linguagem matemática e expressar o conceito de *função* de forma compreensível, de acordo com os seguintes princípios da atividade de ensino: Necessidade → Motivo → Ação; formação do conceito a partir da abstração; generalização; percepção; atenção e memória.

Para facilitar o acompanhamento da leitura e a interpretação, entendemos que seria melhor apresentar cada folha de atividades junto aos respectivos elementos de análise. Desse modo, as atividades desenvolvidas com os alunos e que aparecem relacionadas no planejamento estão nos Capítulos 3 e 4, em cada item da análise.

O quadro a seguir contém a relação das atividades realizadas com as respectivas datas.

ENCONTRO	ATIVIDADE REALIZADA	DATA
AULA 01	LEITURA DO TEXTO: "O QUE SÃO RELAÇÕES?".	21/08/2014
AULA 02	RELAÇÕES E *FUNÇÕES*: O CONCEITO DE *FUNÇÃO* - ÁRVORE GENEALÓGICA.	28/08/2014
AULA 03	AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.	04/09/2014
AULA 04	RELAÇÕES E *FUNÇÕES*: O CONCEITO DE *FUNÇÃO* E REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS.	11/09/2014
AULA 05	RELAÇÕES, *FUNÇÕES* E VARIÁVEIS; DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM.	18/09/2014
AULA 06	VIDEO SOBRE *FUNÇÕES* E SEUS ELEMENTOS.	25/09/2014
AULA 07	AZULEJOS E *FUNÇÕES*.	02/10/2014
AULA 08	ENCONTRANDO O SEU PAR.	23/10/2014
AULA 09	CONSTRUINDO GRÁFICOS.	30/10/2014
AULA 10	O KMPLOT E A *FUNÇÃO* AFIM.	06/11/2014
AULA 11	O KMPLOT E A *FUNÇÃO* QUADRÁTICA.	13/11/2014
AULA 12	JOGANDO COM AS *FUNÇÕES*. AVALIAÇÃO.	27/11/2014
TOTAL DE DOZE ENCONTROS – 24 AULAS DE 50 MINUTOS.		

Obs.: Cada aula compreende 2 módulos de 50 minutos: das 7h50 às 9h30.

Quadro 6: Cronograma das atividades realizadas.
Fonte: O autor, 2014.

2.4 Quarta etapa: análise dos dados coletados

Nesta etapa realizou-se a análise qualitativa dos dados coletados nas atividades de ensino. Todos os registros, tanto dos alunos quanto do professor pesquisador, foram analisados à luz das teorias que fundamentaram a pesquisa, Teoria Histórico-Cultural e Teoria da Atividade, com o intuito de identificar mediações favoráveis à aprendizagem dos conceitos trabalhados durante o experimento didático. Todas as ações dos alunos foram observadas e analisadas para detectar elementos de organização do pensamento e da aprendizagem. Assim, a análise teve como foco principal a verificação de situações de aprendizagem e as evidências de elementos mediadores que respondam aos nossos objetivos.

A análise dos dados e elaboração do relatório do experimento didático constitui, segundo Aquino (2013), a quarta etapa do processo. Para ele, é “[...] provavelmente, a fase mais delicada e complexa da pesquisa.” (AQUINO, 2013, p. 21). O autor afirma que, para fazer a análise dos dados, é necessária a elaboração prévia de um conjunto de categorias com apoio nas evidências e nos indícios de aprendizagem e desenvolvimento integral dos alunos. Tais evidências, segundo ele, aparecem em falas e comportamentos dos alunos sujeitos da pesquisa, em atitudes, hábitos, habilidades e valores manifestados pelos pesquisados. Na expressão do autor fica evidente a importância do experimento didático no processo de desenvolvimento dos alunos.

> O *experimento didático-formativo* é complexo no seu delineamento, na estruturação prévia, na sua duração, assim como na sua avaliação. Mas, uma visão científica destes problemas dificilmente possa subestimar a importância da investigação didática experimental para o estudo das relações internas entre o ensino e o desenvolvimento dos escolares. Em outras palavras, é difícil imaginar outra metodologia de pesquisa capaz de revelar a lógica existente entre o processo de ensino e o desenvolvimento mental dos escolares, na medida em que o facilita o experimento pedagógico. (AQUINO, 2013, p. 14).

O primeiro contato com os alunos do 9º ano ‘C’ foi destinado a uma conversa informal, à formação dos grupos de 4 a 6 alunos, respeitadas as afinidades e escolhas definidas por eles. Esse primeiro contato foi importante para a criação de um ambiente adequado à realização do trabalho de pesquisa. No primeiro encontro, após a divisão e a organização dos grupos, distribuímos um crachá para todos os alunos e pedimos que cada um escrevesse o seu nome de um lado e outro nome fictício no verso, o qual seria usado em determinadas circunstâncias para preservar sua identificação. Frisamos aos alunos que todos os nossos encontros seriam filmados, fotografados e as conversas dos grupos seriam gravadas. Reiteramos o nosso propósito com a pesquisa e novamente deixamos claro a todos os alunos que suas imagens e falas seriam preservados. A organização do ambiente de pesquisa, conforme Moura (2010), é fator fundamental para a obtenção dos resultados esperados.

> [...] podemos entender como ações do professor em atividade de ensino eleger e estudar os conceitos a serem apropriados pelos estudantes; organizá-los e recriá-los para que possam ser apropriados; organizar o grupo de estudantes, de modo que as ações individuais sejam providas de significado social e de sentido pessoal na divisão de trabalho do coletivo; e refletir sobre a eficiência das ações, se realmente conduziu aos resultados inicialmente idealizados. (MOURA et al., 2010, p. 102).

Imbuídos da concepção dialética e das circunstâncias sócio-históricas, iniciamos a análise do obtido a partir das atividades propostas. O seu objeto constitui-se não apenas na elaboração e na organização de atividades, mas principalmente no espaço de aprendizagem e na maneira de agir dos alunos. Assim, a nossa preocupação ficou por conta de analisar as atividades de ensino propostas nesta pesquisa para descobrir quais são as ações constituintes da aprendizagem do conceito de *função*. Conforme Vigotski (2011), os estímulos provocam variações nas respostas.

Para Caraça (1984), a realidade apresenta duas características: a interdependência e a fluência. A primeira quer dizer que todos os objetos possuem uma relação entre si; todas as coisas estão relacionadas umas com as outras. A ideia de fluência nos remete ao fato de que o mundo, e tudo o que nele existe, sofre alterações o tempo todo, tudo muda, "O mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam; tudo flui, tudo devém." (CARAÇA, 1984, p. 110).

Se tudo muda, tudo flui e tudo evolui o tempo todo, qualquer estudo de um fato natural está comprometido em relação às ações da fluência. Caraça (1984) então propõe um recorte da realidade que ele chamou de 'isolado', caracterizado pelo autor como sendo "[...] um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados"; "[...] uma secção da realidade, nela recortada arbitrariamente." (CARAÇA, 1984, p. 112). Assim, podemos utilizar a ideia de isolado como uma ferramenta de análise, pois, na impossibilidade de se analisar e compreender a totalidade das relações, faz-se um recorte "[...] de modo a compreender nele todos os fatores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar." (CARAÇA, 1984, p. 112). Considerando o conceito de isolado, o experimento didático foi analisado a partir da escolha de dois grupos de alunos: Grupo 1 (G1) e Grupo 5 (G5) e de recortes de episódios reveladores de ações que pudessem indicar algum indício de aprendizagem, ainda que em algumas atividades tenham sido incluídos dados de outros grupos que eram significativos. A escolha dos grupos citados se justifica pelo fato de que apresentaram intensa participação em todas as atividades propostas. De outro modo, buscamos dados que indicavam alguma relação com o nosso objeto de pesquisa: a formação do conceito de *função*.

Durante a observação e análise das ações dos alunos diante das atividades propostas, identificamos elementos de organização do pensamento. Tais elementos foram classificados de forma objetiva, para facilitar a análise. Assim, a análise dos dados da pesquisa foi estruturada em 5 (cinco) categorias, que aparecem separadas apenas por questões de estética e de efeito didático, mas que, na verdade, estão interligadas de forma que não é possível apontar onde uma começa ou termina em relação às outras. A definição de tais categorias tem fulcro na indicação de Freitas (2010), quando afirma que investigações recentes na corrente histórico-cultural vêm adotando o experimento didático como forma de pesquisa e oferecem várias contribuições para a didática.

> Essas pesquisas oferecem contribuições para a didática na medida em que buscam aclarar, entre outras, questões como: o vínculo entre a qualidade das ações e relações de ensino e a forma de organização da atividade do aluno; os meios e condições para assegurar o caráter ativo do aluno no processo de aprendizagem; a criação do motivo do aluno para aprender; o modo como o ensino exerce influência na atividade intelectual dos alunos; a promoção de mudanças qualitativas nas ações mentais dos alunos para o surgimento e/ou ampliação do seu trabalho mental com os objetos de conhecimento; a relação entre experiências sociais e culturais dos alunos e seu processo de conhecimento; a produção, na aprendizagem, de novos significados e sentidos para os objetos de conhecimento; a formação do pensamento conceitual. (FREITAS, 2010, p. 4).

As categorias de análise, conforme orienta Aquino (2013), foram elaboradas considerando as dimensões epistemológica, cognitiva e didática, relacionadas com o comportamento dos alunos diante das atividades de pesquisa, ficando assim definidas:

1. As Condições Objetivas da Atividade de Estudo: o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem: mediação (instrumentos, signos, conteúdos, organização das atividades), interação (professor-aluno, aluno-professor, professor-conteúdo, aluno-conteúdo, aluno-aluno); ZDP.

Essa categoria está fundamentada no que diz Moura (2010):

> Para que a aprendizagem se concretize para os estudantes e se constitua efetivamente como atividade, a atuação do professor é fundamental, ao

> mediar a relação dos estudantes com o objeto do conhecimento, orientando e organizando o ensino. (MOURA et al., 2010, p. 94).

2. Formação do Conceito:

a) Uso consciente dos atributos do conceito, características essenciais (significado e sentido).

b) Utilização/desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores: atenção voluntária; generalização; abstração (identificar, comparar, classificar).

c) Linguagem científica. Conforme Moura (2010), as operações do pensamento (abstração, generalização e formação de conceitos) devem ser desenvolvidas nos estudantes, nas diferentes faixas etárias.

3. Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos: A aquisição dos conceitos teóricos, por parte dos alunos, segundo Moura (2010), deve ser o motivo de aprendizagem, a partir de ações conscientes e generalizadas.

4. Autorregulação: a ação de autorregulação ou automonitoramento proposta por Davidov (1986) está relacionada com as atitudes dos alunos em examinar suas ações em função da necessidade ou não de mudanças nos procedimentos ou na maneira de pensar, para alcançar os objetivos previstos (controle das ações em função do desenvolvimento pessoal e também das atividades coletivas).

5. Autoavaliação: é a capacidade individual de se posicionar diante das situações-problema envolvendo a sua participação e contribuição para o sucesso dos trabalhos.

> O processo de internalização consiste numa série de transformações: a) uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente. É de particular importância para o desenvolvimento dos processos mentais superiores (...). b) um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. (...) primeiro entre pessoas (interpsicológica) e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). c) a transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento. (VIGOTSKI, 2010, p. 57-58).

Para facilitar a orientação e organização da análise, fizemos a seguinte classificação abreviada das categorias:

1. As condições Objetivas da Atividade de Estudo → COAE;
2. Formação do Conceito →FC;

3. Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos →DMPA;
4. Autorregulação →AR;
5. Autoavaliação →AA.

O pensamento teórico, segundo Davidov (1999), só se desenvolve na escola, com programas organizados a partir da compreensão dialética do pensamento. É exatamente esse ensino, segundo o autor, que tem o caráter desenvolvimental. No entanto, para a formação do pensamento teórico do aluno, é necessário organizar o ensino de forma adequada a fim de que as atividades realizadas pelos alunos possam favorecer a formação desse pensamento. Para o autor, "Na atividade se revela a universalidade do sujeito humano." (DAVIDOV, 1986, p. 15).

Nas primeiras aulas de atividades, pôde-se notar certo constrangimento de alguns alunos diante da filmadora e também de um gravador que registraram suas imagens e falas. A partir de esclarecimentos (reafirmando que todos os dados obtidos seriam mantidos em sigilo), os alunos foram se mostrando à vontade e descontraídos diante dos equipamentos de registros de dados.

Antes de iniciar uma nova atividade, o pesquisador sempre procurava ouvir os alunos sobre o encontro anterior, questionando sobre o que foi discutido nos grupos e o que eles conseguiram assimilar. Em alguns encontros, no entanto, o pesquisador preferiu entregar uma folha para cada aluno para que eles escrevessem sobre os conceitos estudados nos encontros anteriores. Dessa forma, além de ficar registrada a expressão de cada aluno, o fato de escrever é mais eficiente que o de se expressar por meio da fala.

A aplicação das folhas de atividades aconteceu de forma satisfatória, sendo possível perceber, principalmente nos primeiros encontros, a motivação da maioria dos alunos. Esse fato pode ser constatado nas gravações e nas folhas de atividades, onde todos os alunos, com raras exceções, responderam a todas as atividades propostas.

Além do pesquisador, atuaram também como auxiliares e observadores na pesquisa os colaboradores (membros do Projeto OBEDUC) Erika Kátia Rangel Costa e Vinícius Antônio Barros Silveira, alunos de Iniciação Científica do projeto. Este último esteve presente durante toda a pesquisa e ficou encarregado de preparar e operar os equipamentos de filmagem. Os 33 alunos da turma do 9º ano 'C' foram divididos em seis grupos que variaram de quatro a seis componentes em cada, e cujo critério de escolha foi o da afinidade entre os alunos. Tivemos um problema de rejeição: uma aluna não estava na sala na hora da divisão dos grupos e, assim que retornou, solicitamos a ela que ficasse no Grupo 4, que contava apenas com quatro elementos. Ocorreu uma dupla manifestação contrária: a aluna se negou a fazer parte daquele grupo, assim como alguns dos componentes se manifestaram contrários à sua inclusão. Houve uma conversa por parte do pesquisador, tanto com a aluna como com os componentes do grupo, que decidiram aceitá-la. Mas ela se mostrou resistente e preferiu integrar outro grupo que também contava com quatro elementos.

A maioria das atividades foi realizada em grupos com registros por meio de filmagem, gravação de voz, algumas fotografias e o diário de campo para anotar alguns fatos relevantes. Antes de começar qualquer atividade, o pesquisador explicava como seria a dinâmica da atividade e qual objetivo pretendia alcançar. Desde o primeiro encontro, algumas questões ficaram definidas com os alunos:

a) a formação dos grupos seria a mesma durante toda a pesquisa;
b) as atividades deveriam ser discutidas entre os componentes dos grupos;
c) todas as questões deveriam ser respondidas por todos os componentes dos grupos nas próprias folhas de atividades;
d) caso o grupo não chegasse a uma conclusão sobre qualquer questão a respeito das atividades propostas, poderia solicitar a colaboração do pesquisador ou do auxiliar de pesquisa.

Os participantes de nosso estudo foram selecionados dentre os cerca de 180 alunos das cinco turmas do 9º ano da Escola Municipal "Frei Eugênio", que estudavam regularmente no período matutino. Inicialmente, havíamos programado a estratégia de convidar os alunos a voltar à escola no período vespertino para participar das atividades elaboradas para este estudo. Tais atividades, a princípio, seriam desenvolvidas no período 'extraturno' a um grupo de no máximo 20 alunos do 9º ano da Escola Municipal "Frei Eugênio", durante dez semanas. O pesquisador seria o responsável pela aplicação das atividades, acompanhado por outros membros do grupo de estudos (OBEDUC), que o ajudariam no trabalho de registros como filmagem, gravações em áudio e fotografias.

Porém, em contato com a professora titular que retornara da licença, ficou decidido que a pesquisa seria realizada com a turma do 9º ano 'C', no período matutino, às quintas-feiras, no 2º e 3º horários, das 7h50min às 9h30min. A mudança ocorreu devido à questão da professora titular que, apesar de reassumir suas atividades do cargo, estava impossibilitada de ministrar aulas na quinta-feira, nos referidos horários. Assim, decidimos, em comum acordo com a referida professora e com a diretora da escola, que a pesquisa seria realizada de manhã, na turma e nos horários indicados, nos mesmos moldes daquela programada para o turno vespertino.

Tínhamos expectativa de que era possível avaliar se atividades “adequadamente organizadas” apoiadas na Teoria Histórico-Cultural, Teoria da Atividade e Teoria da Atividade de Estudo promovem a aprendizagem do conceito de *função* e o desenvolvimento do aluno.

CAPÍTULO 3

A ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE ENSINO: O CONCEITO DE *FUNÇÃO*

Neste capítulo vamos apresentar a análise dos resultados das seis primeiras atividades desenvolvidas com os alunos, em consonância com o objeto de pesquisa, os objetivos e o planejamento. Apesar de não ser a primeira atividade desenvolvida com os alunos, a avaliação diagnóstica será a primeira a ser analisada haja vista que foi a partir dela que obtivemos os primeiros resultados significativos da pesquisa.

3.1 Análise dos resultados: Avaliação diagnóstica

Logo que iniciamos o trabalho de pesquisa com os alunos, começamos a perceber neles algumas dificuldades para lidar com termos e representações algébricas. Depois de dois encontros, após constatar as dificuldades, decidimos aplicar uma avaliação diagnóstica com o objetivo de verificar o nível de entendimento, as principais dificuldades e limitações dos alunos com relação às questões envolvendo a álgebra. Além da avaliação, elaboramos também um texto sobre a álgebra e suas expressões, para subsidiar o nosso trabalho e facilitar o entendimento dos alunos. Partimos do princípio de que o desafio da aprendizagem escolar é promover o desenvolvimento do pensamento.

Conforme enfatiza Davidov (1988), a escola deve ensinar os alunos a pensar; a desenvolver o pensamento teórico. A primeira atitude para se promover o desenvolvimento do pensamento é conhecer os alunos, suas potencialidades e limitações. Nesse sentido, a partir dos resultados da avaliação diagnóstica, elaboramos o texto sobre álgebra. Apesar de essa avaliação ser a terceira atividade desenvolvida com os alunos, decidiu-se apresentá-la em primeiro plano, pois estes foram os primeiros resultados e constatações da pesquisa: as dificuldades e limitações dos alunos para lidar com determinados termos relativos à álgebra. Seguem os resultados obtidos na avaliação diagnóstica.

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio **Data: ____/____/2014**

Nome: ____ Nº: ______ Série: ______

A TURMA PESQUISADA ERA COMPOSTA POR 33 (TRINTA E TRÊS) ALUNOS E TODOS RESPONDERAM À AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.

1. Você gosta de matemática?
(**20**) Sim
(**11**) Não
(**2**) Não respondeu (NR)

2. Você tem facilidade para aprender matemática?
(**12**) Sim
(**21**) Não
(**1**) NR

3. Você já estudou álgebra?
(**10**) Sim
(**21**) Não
(**2**) Não respondeu

4. Para você, o que é álgebra?
- (**22**) Não sei
- (**6**) Mistura de números e letras na matemática
- (**1**) Equações de números e letras
- (**1**) Um tipo de conta
- (**1**) Entender os lados de formas geométricas
- (**1**) Estudo das matérias
- (**1**) Contas com formas geométricas

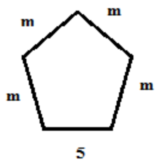
5. Quais os conteúdos de álgebra que você já estudou?
- (**12**) Não sei
- (**5**) Não respondeu
- (**8**) Não estudei
- (**2**) Equações com letras
- (**1**) Conceito dos números, das letras e conjuntos matemáticos
- (**1**) Equação do 2º grau e Teorema de Pitágoras
- (**1**) Equações do 2º grau
- (**1**) Expressões algébricas, equações do 1º grau, equações do 2º grau, Teorema de Pitágoras
- (**1**) Equações do 1º e 2º grau, Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras
- (**1**) Conjuntos numéricos

6. Você já estudou equações?
(**33**) Sim
(   ) Não

7. Para você, o que são equações?

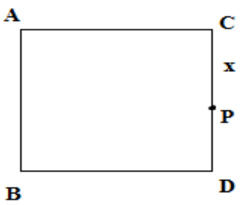
- (**1**) Dizem que é para facilitar as nossas vidas
- (**1**) Estudo das somas dos estados físicos
- (**1**) Maneiras de "descubrir" um número que não está expresso na conta
- (**2**) Maneiras simples de resolver um exercício
- (**6**) Não respondeu
- (**3**) Não sei
- (**11**) Números e letras
- (**1**) Números que não estão organizados e que nós temos que organizar
- (**4**) Resolver contas
- (**2**) Soma com letras
- (**1**) Somas numéricas

8. O perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados. Qual é o perímetro do pentágono da figura abaixo



- 25: **23 respostas**
- Não sei: **7 respostas**
- 5: **1 resposta**
- 27: **1 resposta**
- 4m + 5: **1 resposta**

9. O quadrado da figura tem lado medindo 6 cm. Seja P um ponto do lado CD. Se a medida de CP é x cm, qual é a medida de PD?



- (**3**) Não entendi
- (**17**) Não sei
- (**8**) 3 cm
- (**1**) x
- (**2**) 6-x
- (**2**) 2 cm

10. Se $x + 3b = y - 4b$.

a) Quanto vale **x**?

- (**13**) Não sei
- (**12**) Resposta sem nexo
- (**6**) Resposta incorreta, com lógica no raciocínio
- (**2**) Resposta correta: **x = y – 7b**

b) Quanto vale **y**?

- (**14**) Não sei
- (**11**) Resposta sem nexo
- (**7**) Resposta incorreta, mas com lógica no raciocínio
- (**1**) Resposta correta: **y = x + 3b + 4b**

c) Quanto vale **x – y**?

- (**15**) Não sei
- (**10**) Resposta sem nexo
- (**6**) Resposta incorreta, com lógica no raciocínio

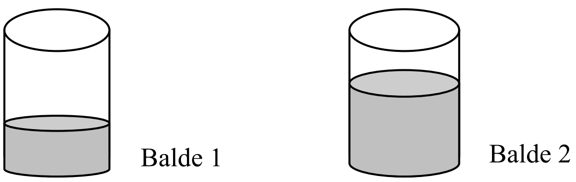
- (**2**) Resposta correta: **x – y = -3b – 4b**

11. Seja a expressão: **3y**… essa expressão, quando atribuímos a **y** o valor **(-**…
- (**14**) Substituiu c… os cálculos
- (**8**) Resolução co…
- (**11**) Não sei

- 25: **23 respostas**
- Não sei: **7 respostas**
- 5: **1 resposta**
- 27: **1 resposta**
- 4m + 5: **1 resposta**

12. Se **16 + b = c**, quanto vale **c - 8**?
- (**16**) Não sei
- (**10**) Resposta incorreta
- (**6**) Resposta incorreta, com lógica no raciocínio
- (**1**) Resposta correta: **c – 8 = 8 + b**
-

13. Os dois baldes da figura são exatamente iguais, e cada um tem certa quantidade de água. Para encher o primeiro, são necessários mais 9 litros de água; e para encher o segundo, mais 4 litros.



a) Como você expressa o volume de água contido em cada balde?
- (**13**) Não sei
- (**5**) Resposta correta
- (**15**) Resposta incorreta

b) Que relações são possíveis estabelecer entre as águas contidas nos dois baldes? Tente estabelecer, pelo menos, três relações.
- (**17**) Não sei
- (**6**) Relações corretas
- (**10**) Relações incorretas

Muito obrigado pela sua participação.
Professor José Divino Neves.

Quadro 7: Resultado da avaliação de desempenho.
Fonte: O autor, 2014.

A avaliação diagnóstica nos revelou que a compreensão dos alunos sobre termos algébricos, álgebra e suas expressões era de suma importância para o prosseguimento das atividades rumo à formação do conceito de *função*. Para a formação do conceito, segundo Vigotski (2009), são necessários dois estímulos: um que desempenha o papel do objeto da atividade e o outro, o papel do signo. Caso contrário, podemos ficar somente na definição ou na abstração, sem considerar o símbolo (palavra) na formação do conceito. Assim, entendemos que caso prosseguíssemos com as atividades sem o devido esclarecimento sobre álgebra, termos e expressões algébricas, que são objetos importantes na formação do conceito, um dos estímulos citados por Vigotski estariam ausentes.

Observando os resultados obtidos na avaliação, podemos notar que a maioria dos alunos gosta de matemática, mas disse ter dificuldades para aprendê-la. Apenas dez alunos (de um total de 33) afirmam que já estudaram álgebra, o que nos revela a não compreensão do significado de álgebra. Quando indagados sobre o que é álgebra, a grande maioria dos alunos respondeu que não sabe; no entanto, todos afirmam que já estudaram equações. Questionados sobre o que é uma equação, apenas onze alunos disseram que "se trata de expressão envolvendo números e letras".

Quanto aos exercícios propostos na avaliação diagnóstica, o objetivo era verificar o nível de compreensão e dificuldades dos alunos quanto à realização de operações com expressões algébricas. Tais dificuldades ficaram evidentes para a maioria dos sujeitos da pesquisa. Em todos os cálculos envolvendo letras o raciocínio dos alunos era sincrético e seguia em direção ao cálculo do valor das letras (processo utilizado na resolução de equação). Esse procedimento deixou clara a dificuldade em compreender as diversas expressões algébricas existentes nos conteúdos estudados no ensino fundamental, justificando, assim, a necessidade dos esclarecimentos.

Outra questão que ficou evidente foi quanto aos coeficientes numéricos: na expressão $x + 3b = y - 4b$, alguns alunos atribuíram a 'x' e 'y' o valor 1 (um). Questionados sobre tal atitude, alguns alunos responderam que "a professora falou que quando não tem valor, é um". Eles estavam atribuindo à letra o valor do seu coeficiente numérico quando este era 1 (um).

A análise e os resultados da avaliação diagnóstica nos revelaram que os alunos necessitavam de algumas informações e esclarecimentos sobre álgebra, concepções e representações algébricas, bem como o significado e a função das letras nas expressões algébricas. Após essa constatação, elaboramos o texto sobre álgebra e propusemos a sua leitura, interpretação e análise em grupos, com a recomendação da importância do entendimento da álgebra, das concepções algébricas presentes nos conteúdos curriculares, enfatizando a função das letras em cada representação. Notamos que a leitura e interpretação do texto esclareceram de forma considerável o entendimento dos alunos sobre o que é álgebra, suas representações e sua relação com os conteúdos estudados.

TEXTO PARA SUBSIDIAR A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICASOBRE A ÁLGEBRA.

A aritmética, a álgebra e a geometria constituem a base da matemática escolar. Esses três conteúdos matemáticos fazem parte das atividades humanas. A álgebra está presente na aritmética, na geometria e em quase todos os conteúdos de matemática que você estudou no 9º ano.

Segundo Lins e Gimenez (2001), a álgebra é todo conteúdo matemático que produz significado para números, operações aritméticas, propriedades, regras de cálculos, abstrações, generalizações, equações, relações entre grandezas, igualdades e desigualdades. A atividade algébrica consiste em produzir significado para a álgebra (LINS E GIMENEZ, 2001, p. 137).

Segundo consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a álgebra do ensino fundamental aparece sob as seguintes concepções:

1) Álgebra como aritmética generalizada – uso de letras para expressar as propriedades das operações numéricas e generalizações de padrões aritméticos; nas propriedades da potenciação e radiciação; nas proporções; segmentos proporcionais e Teorema de Tales; fórmulas para resolução de juros simples e compostos.

2) Álgebra funcional – uso das letras como variáveis para expressar relações e funções entre duas ou mais grandezas.

3) Álgebra como equações – uso das letras como incógnitas na resolução de equações. Há uma diferença entre variável e incógnita; **variáveis** são valores desconhecidos de uma relação entre duas grandezas, em que uma adquire valores diferentes cada vez que os valores da outra grandeza são alterados; **incógnitas** são os valores desconhecidos de uma equação. Cada equação possui um número fixo de raízes ou resultados.

4) Álgebra estrutural – uso das letras como símbolo abstrato no cálculo algébrico e na obtenção de expressões equivalentes.

Equação é uma expressão algébrica que apresenta uma igualdade e um valor desconhecido que chamamos de incógnita.

Usiskin (1995) também aponta quatro concepções de álgebra que aparecem no ensino fundamental, semelhantes às dos PCN:

1) Álgebra como aritmética generalizada - nessa concepção, o uso da álgebra aparece nas generalizações de propriedades aritméticas:

Ex.: 1) $a.b + a.c = a.(b + c)$

2) $(a.b)^2 = a^2.b^2$

3) $\sqrt{x} \, . \, \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = x$

2) Álgebra como estudo de métodos para resolver certos tipos de problemas – muito comum nas aulas de matemática do ensino fundamental. Ex.:

1) Calcule a área de um quadrado de lado 6 cm. $A_{\square} = \ell^2 \rightarrow A_{\square} = 6^2 = 36$.

2) Quanto vale x na equação: $x^2 - 6x + 9 = 0$?

3) Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

3) Álgebra como relação entre grandezas – nessa concepção algébrica, encontra-se o estudo das relações e *funções*, que envolvem variações de valores entre duas grandezas numéricas. Esse assunto é o que vamos estudar.

4) Álgebra como estudo de estruturas – esta concepção está relacionada à equivalência de expressões, simplificações e outras transformações matemáticas utilizadas na solução de problemas.

Ex. 1) A expressão $x^2 + 10x + 25$ representa um trinômio quadrado perfeito, que pode ser fatorado em $(x + 5)^2$. Assim: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

2) $2a^2b + 4ab^2 = 2ab.(a + 2b)$

BIBLIOGRAFIA:

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998b. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 18 jul. 2013.

LINS, R. C.e GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI. 4ª edição. Campinas, SP: Papirus, 2001.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

Agora que vocês aprenderam um pouco mais sobre álgebra, vamos **refazer, em grupos,** os exercícios da Avaliação Diagnóstica.

Obrigado.

Prof. José Divino Neves

Quadro 8: Texto sobre álgebra.
Fonte: O autor, 2014.

<table>
<tr><td colspan="3">AULA 03: Avaliação diagnóstica</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVO:
I – Refazer a avaliação diagnóstica aplicada para verificar o nível de entendimento, as principais dificuldades e limitações dos alunos pesquisados com relação à álgebra e das expressões algébricas que envolvem os conteúdos do ensino fundamental, a partir de um texto disponibilizado para leitura, o qual trata de algumas concepções de álgebra.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE)</td><td>JD: Quem faz a leitura?
LE G1: Vamos ler todo mundo junto.
Os alunos começaram a ler de forma revezada; cada aluno lendo um parágrafo.
GA G1: Isso aqui não é para resolver?
LE G1: Não.
A L G1: Eu vou ter que ler essa conta?
GA G1: Deixa eu ler: “Exemplo: a expressão $x^2 + 10x + 25$ representa o trinômio quadrado perfeito que pode ser fatorado em $(x + 5)^2$. Assim: $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$”.
TAM G1: José Divino, por favor. A gente já terminou de ler.
Enquanto aguardavam o próximo exercício, os alunos começaram a questionar.
LE G1: A L, o que é incógnita?
GA G1: O que é álgebra?
LE G1: É todo conteúdo matemático que possui letras e números e que produz significado.
JD: Agora, nós vamos refazer os exercícios do pré-teste. Não façam nada sem ter a certeza de que está correto; qualquer dúvida, perguntem antes de responder.
A V G1: Chama ele (JD); chama o Vinícius.
GA G1: Vinícius, aqui deu 4m + 5, tem que descobrir o valor de m, não é?
VINÍCIUS (Colaborador): Não, não tem necessidade. Vocês acertaram: qual o perímetro do pentágono da figura? 4m + 5. É literal a questão.
LE G1: É só igual a P, não é?
VINÍCIUS: Isso. O perímetro é a soma dos seus ... (Vários componentes do grupo responderam em coro: “lados”).
THA G1: Aí, viu, aprendi matemática.</td><td>O texto foi entregue a todos os grupos com as devidas orientações.

Após a leitura do texto, todos os alunos concordaram que já haviam estudado álgebra.</td></tr>
<tr><td>Formação do Conceito - FC</td><td>GA G1: Qual é o perímetro? Ah! Já sei qual é: m + m + m + m + 5.
JD: Veja, o lado mede 6 cm. CP mede x, a parte que eu quero calcular é DP. O lado mede 6 cm (encobrindo CP com o dedo), se aqui tem x (encoberto), quanto falta?
LE G1: 6 – x ?
JD: Isso.
A V G1: Então, não tem que descobrir o número?
JD: Não; isso que estamos fazendo é relação algébrica.
GA G1: Ah, então, não precisa descobrir o resultado; 6 – x = PD.
JD: Essa é uma relação algébrica. Nós trabalhamos com valores desconhecidos o tempo todo. Mesmo sem conhecer o valor, podemos efetuar cálculos ou relações com a expressão.</td><td></td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos - DMPA</td><td>A L G1: Sabia que matemática tem relação com a comida?
LE G1: Com a comida?
A L G1: É; grama, quantidade.
A V G1: Nós já estudamos isso aqui: potenciação e radiciação.
GA G1: Quais os conteúdos de álgebra você já estudou?
LE G1: Álgebra como aritmética generalizada, potenciação e radiciação, propriedades, etc.
GA G1: Equações.
LE G1: Relações entre grandezas.
GA G1: Você já estudou equações?</td><td>Todos os grupos terminaram as atividades no tempo previsto e com ótimo índice de aproveitamento.</td></tr>
</table>

	LE G1: Sim. GA G1: O que são equações? Equação é uma expressão algébrica que apresenta igualdade e um valor desconhecido. ERIKA (Colaboradora): Vocês querem que chame o Vinícius? GA G1: Sim. GA G1: Seja a expressão $3y^2 - 2y + 3$. Qual é o valor numérico dessa expressão quando atribuímos a y o valor (-5)? LE G1: Numérico? Então tem que descobrir. Vinícius, confere aí se a gente pensou certo. VINÍCIUS: O que vocês fizeram? O que está pedindo? O valor de y? Então é só deixar o y sozinho, passa isso aqui pra cá. O y pode estar de um lado ou do outro da igualdade, de todo jeito eles são iguais, tipo assim, se y é igual a x, x é igual a y, não altera. Essa aqui: quanto vale x – y? é nessa ordem. LE G1: É só passar esse pra cá. VINÍCIUS: Pode passar, sim. Você passa o y pra cá menos, certo? E esse aqui pra cá, menos também. Então x – y vai dar isso menos isso. GA G1: Então, aqui vai ficar: x – 7b = y. A V G1: Deixa-me tentar entender a ‘b’. GA G1: Eu vou te explicar: esse aqui passou para cá, então fica menos.	
Autorregulação - AR e Autoavaliação – AA	GA G1: Qual é o perímetro? Ah! Já sei qual é: m + m + m + m + 5. A V G1: Igual a $m^4 + 5$. GA G1: Gente, é mais, não é vezes, A V. A V G1: Mas quantos “emes” (m) tem? LE G1: 4 A V G1: 4m + 5 GA G1: Isso. A V G1: Igual a 9m. LE G1: Não, não pode somar. TAM G1: Menos com menos é mais? GA G1: Vezes, gente, é quando é multiplicação. A V G1: Quanto é (-5) ao quadrado, Ana Laura? A L G1: É 25. GA G1: é -2 vezes -5 é 10. LE G1: Tá certo. A L G1: Tem menos com menos e menos vezes menos. LE G1: Então, menos com menos dá mais. Vamos pra próxima, depois a gente pergunta se está certo.	

Quadro 9: Síntese da análise da Aula 03: Avaliação diagnóstica.
Fonte: O autor, 2014.

Após a correção da avaliação diagnóstica respondida de forma individual, propusemos uma análise em grupos. Reunidos, os alunos analisaram suas respostas individuais e propuseram outras a partir da análise do texto, das discussões no grupo e da mediação do professor/pesquisador. Nesse processo foi possível observar o avanço em direção ao desenvolvimento mental, pois os alunos assimilaram as questões das expressões algébricas, promoveram discussões a respeito das respostas atribuídas aos exercícios da avaliação diagnóstica e refizeram os exercícios com mais de 90% de acertos. Isso revela que parece não ser preocupação do ensino de matemática, ao introduzir as expressões algébricas e as equações, fazer uma abordagem que dê sentido ao que está sendo estudado, buscando os nexos conceituais do que está sendo ensinado.

Assim, concluímos essa terceira atividade com a certeza de que os alunos pesquisados evoluíram e avançaram na questão da compreensão e entendimento do que é álgebra e suas expressões.

3.2 Análise dos resultados da primeira atividade proposta: O estudo do texto

A primeira atividade de pesquisa proposta aos alunos foi a leitura e interpretação do texto "O que são relações?", adaptado do livro "**Conceitos Fundamentais da Matemática"**, de Bento de Jesus Caraça**.** A partir do texto procuramos explorar o conceito 'cotidiano' que os alunos têm sobre relações; evidenciar a atitude intencional do ser humano na construção histórica da sociedade e destacar a importância do conhecimento na evolução da humanidade; motivar os alunos para a aprendizagem do conceito de *função*, objeto da nossa pesquisa.

Decidimos iniciar a nossa atividade de pesquisa na turma do 9º ano 'C' com a leitura e interpretação do texto, atentando para o que nos diz Davidov (1988), ao afirmar que devemos organizar o ensino do abstrato ao concreto para que possibilite a formação do pensamento teórico. A nossa intenção era de que os alunos pudessem abstrair do texto alguns aspectos ligados à necessidade de se apropriar do conhecimento acumulado historicamente e a sua importância para a evolução da humanidade. Além disso, tentamos mostrar com o texto que as relações estão presentes no nosso dia a dia; há relações em tudo o que existe.

As condições objetivas para a realização da atividade foram organizadas; os alunos foram divididos em grupos e receberam as devidas orientações e o pesquisador esteve atento às dúvidas e dificuldades dos alunos para interagir com os mesmos e mediar o processo de compreensão. Os nexos da formação do conceito de *função*, como por exemplo, a noção de relação, a reflexão sobre significado e sentido das palavras, a atenção voluntária e a linguagem científica foram evidenciadas durante a leitura e a interpretação do texto. Dessa forma, tentamos desenvolver a motivação e a participação dos alunos, não somente para a leitura e análise do texto, mas também para as próximas atividades. Além da motivação, procuramos desenvolver nos componentes de cada grupo procedimentos de controle das ações em função do seu desenvolvimento pessoal e do grupo (autorregulação), bem como a necessidade de se posicionar diante de todas as decisões do grupo (autoavaliação). Por isso, entendemos que o ambiente de pesquisa ficou estabelecido de maneira satisfatória e os alunos tiveram as condições necessárias e suficientes para realizar as atividades. Assim, a atividade, segundo Leontiev, esteve provida de *objeto*, *motivo*, *necessidades*, *condições*, *meios de alcance*, *ações* e *operações*.

TEXTO: FOLHA DE ATIVIDADE – 01: **Relações e funções - o conceito de função. Aula 01**

Escola Municipal Urbana "Frei Eugênio" Data: ____/____/2014

Nome: ____ Nº: ______ Série: ______

01 - O QUE SÃO RELAÇÕES?

Quando se fala em relações, você se lembra de quê? O que você entende por relações? Responda à primeira pergunta da folha de atividades antes de prosseguir na leitura do texto.

Na natureza, tudo se relaciona: terra, água, ar, fogo, minerais, animais e vegetais. As pessoas se relacionam entre elas, com os seres vivos e com tudo o que existe no mundo. Para satisfazer às suas necessidades, o homem transforma a natureza, cria, muda, altera, constrói, destrói e procura cada vez mais compreender e 'dominar' tudo o que nela existe. Todas essas transformações, no entanto, requerem o conhecimento e os instrumentos necessários, que são obtidos por meio das relações entre os seres humanos. Para dominar o mundo e tudo o que nele existe, o homem se apropria do conhecimento acumulado pela humanidade ao longo da história, ao mesmo tempo em que agrega novos conhecimentos para as gerações futuras. Isso se chama "evolução da espécie humana". "Quando o homem age intencionalmente sobre a natureza, visando transformá-la de modo a satisfazer suas necessidades de produção, o homem deixa na natureza as marcas da sua atividade e, também sofre transformações constituindo-se humano." (RIGON, ASBAHR & MORETTI, 2010, p. 17).

Algumas dessas relações, no entanto, são de dependência; como por exemplo: planta e água; planta e luz; animais e ar; animais e água; animais e comida; pais e filho; aluno e escola, dentre tantas outras. Isso significa, por exemplo, que, quando o homem quer dominar as plantas, deve se preocupar com a água; quando quer melhorar o conhecimento, deve se preocupar com a escola. O homem, criatura dotada de razão, de vontades, da capacidade de agir conscientemente, desenvolve atividades a partir dos conhecimentos cada vez mais complexos, para compreender e dominar os fenômenos e as principais relações existentes no mundo que o rodeia. Essa atitude do homem, de investigar, questionar, saber o porquê de cada fenômeno, é que o torna humano e o distingue dos outros animais. Quanto mais o homem consegue compreender e prever os fenômenos naturais e sociais, maior e melhor será o domínio sobre eles, sobre a natureza e tudo o que nela existe. Assim, poderá aumentar a sua segurança, o seu conforto e a sua liberdade.

Segundo Caraça (1984), as coisas do mundo apresentam duas características essenciais**: interdependência e fluência**. A primeira diz que todas as coisas estão relacionadas umas com as outras. O mundo e tudo o que nele existe é um organismo vivo com intensa comunicação e participação constante da vida uns dos outros. A segunda quer dizer que o mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo o momento, se transformam; tudo flui, tudo devém. Assim, tudo se relaciona; tudo muda o tempo todo. Morte e vida estão unidas, formando um processo único de transformação e evolução. "A morte do ar causa a vida do fogo e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a morte da água favorece a vida da terra". Desse modo, a morte não é o fim, a destruição total do ser, mas a fonte de uma nova vida, de um novo ciclo. Quando a morte atua, outra vida surge.

*Texto adaptado do livro "**Conceitos Fundamentais da Matemática"** de Bento de Jesus Caraça. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.*

Quadro 10: Folha de atividade 01 – Aula 01 – texto: "O que são relações?".
Fonte: O autor, 2014.

Atividade. Troque ideias no grupo e responda às seguintes questões:

1. Qual é o seu conceito de relações? Cite quatro exemplos de relações.

2. O que mais lhe chamou a atenção no texto?

3. O que difere o homem dos outros animais e o torna humano?

4. Após a leitura do texto, você mudaria alguma coisa na resposta da primeira questão? O seu conceito de relações continua o mesmo?

5. Com base no texto, qual é o papel do conhecimento na história da humanidade?

6. O que são relações de dependência?

7. Qual a diferença ente uma relação de dependência e uma relação sem dependência?

8. Escreva duas ou três linhas, emitindo sua opinião sobre o texto.

Muito obrigado pela sua participação.

Professor José Divino Neves.

Quadro 11: Folha de atividade 01 – Aula 01 - questões sobre o texto.
Fonte: O autor, 2014.

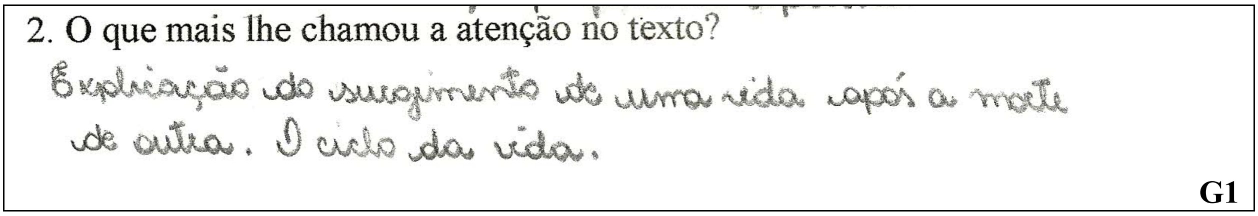
<table>
<tr><td colspan="3">AULA 01: Leitura e análise do texto “O que são relações?”</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I – Promover o questionamento entre os componentes dos grupos, a partir dos conceitos cotidianos que os alunos têm sobre relações, a respeito do que são e como ocorrem essas relações.
II – Refletir sobre a importância do conhecimento historicamente elaborado para a evolução da humanidade.
III – Perceber as características essenciais de interdependência (inter-relação) e fluência (mudança constante) em tudo o que existe.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições Objetivas da Atividade de Estudo – COAE</td><td>LU G5: Com base no texto, qual é o papel do conhecimento na história da humanidade?
ISA G5: O que vocês colocaram?
LU G5: Nada, ainda.
ISA G5: Qual é o papel do conhecimento?
MA G5: A evolução humana.
JD: Vocês já leram? Agora podem responder.
LU G5: A primeira está certa?
JD: É, vocês vão dizer o que entendem por relação.
LU G5: Tem que dar quatro exemplos?
JD: Sim.
ISA G5: Eu me lembrei de um: relação alimentar.
LU G5: Pode ser qualquer relação?
JD: Sim; qualquer relação. Nós vamos estudar algumas, no entanto, que estão ligadas à matemática.
LU G5: Relações sexuais, amorosas, numéricas...</td><td>Usamos as iniciais dos nomes dos alunos (duas ou três letras); JD indica o pesquisador e VINÍCIUS, o colaborador. G1, G2, G3; G4, G5 e G6 representam os grupos.

Mediação; interação; Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).</td></tr>
<tr><td>Formação do Conceito - FC</td><td>LU G5: O que difere o homem dos outros animais e o torna humano?
MA G5: A atitude de investigar, questionar. Tá no texto. Saber o porquê de cada fenômeno. É o que o torna humano e difere de outros animais.
ISA G5: O que difere o homem dos outros animais?
LU G5: O homem pensa e o animal não pensa.
MA G5: Animal não pensa?!?!
LU G5: É inteligente irracional. Ele não é racional.
ISA G5: Pode colocar que o homem possui raciocínio lógico e o animal, não.</td><td>Significado e sentido; capacidades psíquicas superiores; linguagem científica.</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos – DMPA</td><td>JD: Após a leitura do texto, vocês vão responder às questões da folha. Quem for fazer a lápis, faça bem forte para eu poder xerocar.
ISA G5: Eu quero ler também.
THI G5: Toma cuidado com o que vocês vão falar porque tá gravando.
LU G5: Eu leio primeiro. (Começou a ler o texto). É para responder a primeira questão antes de prosseguir na leitura do texto.
ISA G5: Qual o seu conceito de relações? Cite quatro exemplos de relações.
LU G5: Sexual, amorosa.
J V G5: São quatro.
ISA G5: Eu acho que é de matemática.
LU G5: Não é de matemática, não.
ISA G5: Vamos continuar... Na natureza tudo são relações...
THI G5: Eu continuo. (Começou a ler com certa dificuldade).</td><td>Necessidades e motivos dos alunos para desenvolver as ações propostas.</td></tr>
</table>

Autorregulação - AR	ISA G5: Eu pensei nas relações alimentares porque é um ciclo. LU G5: Um vai depender do outro. ISA G5: Então, relação. LU G5: Eu vou pegar os dois exemplos do M E os meus dois. ISA G5: Mas aqui está perguntando qual é o conceito de relação. LU G5: Vamos colocar comparação. MA G5: Relação numérica entra? LU G5: Sim; eu falei relação numérica. Falta mais uma relação.	Atitudes e argumentações dos alunos perante o grupo para alcançar os objetivos propostos.
Autoavaliação - AA	LU G5: O que difere o homem dos outros animais e o torna humano? MA G5: A atitude de investigar, questionar. Tá no texto. Saber o porquê de cada fenômeno. É o que o torna humano e difere de outros animais. ISA G5: O que difere o homem dos outros animais? LU G5: O homem pensa e o animal não pensa. MA G5: Animal não pensa?!?! LU G5: É inteligente irracional. Ele não é racional. ISA G5: Pode colocar que o homem possui raciocínio lógico e o animal, não. ISA G5: Qual é o papel do conhecimento? MA G5: A evolução humana. O que são relações de dependência? ISA G5: Eu dependo dos meus pais para viver; sem eles eu não estaria aqui.	Atitudes individuais dos alunos e sua participação nas decisões para o sucesso dos trabalhos.

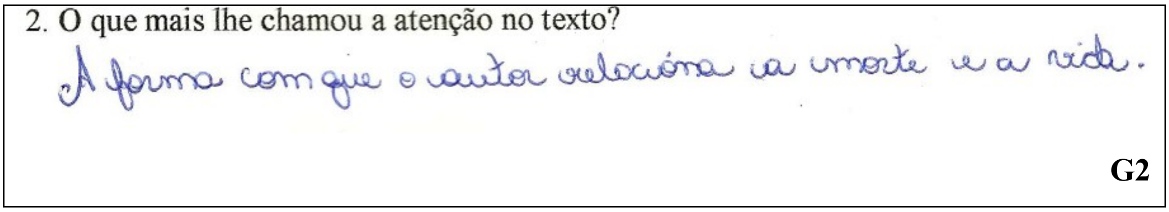
Quadro 12: Síntese da análise da Aula 01: Objetivos e categorias de análise.
Fonte: O autor, 2014.

Nessa primeira atividade (texto), foi possível notar que, enquanto o pesquisador focava a sua preocupação (o seu objetivo) na questão das relações que favorecem a propagação do conhecimento e a evolução da humanidade, os alunos focavam suas atenções em detalhes do texto, como ‘vida e morte’, e outros aspectos de outras dimensões cognitivas, como a existencial, nesse caso. Para os alunos, o texto apresentou significados além dos esperados pelo pesquisador, como se pode observar nas respostas de três dos seis grupos (G1, G2 e G5) sobre ‘o que mais lhe chamou atenção no texto’. Apenas um grupo (G4) destacou as relações entre os seres como o que mais lhe chamou atenção no texto. Isso nos permite inferir que o texto teve um sentido para os alunos, que os permitiu associar um conceito matemático à vida.


2. O que mais lhe chamou a atenção no texto?
Explicação do surgimento de uma vida após a morte de outra. O ciclo da vida.

G1

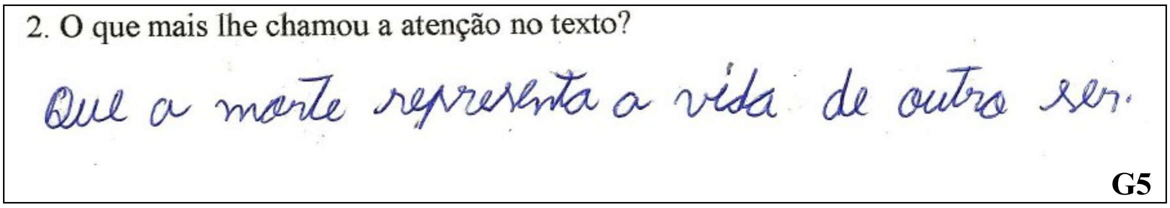
Figura 3: Resposta do Grupo 1 à questão 2 sobre o texto.
Fonte: Folha de atividades da Aula 01, respondida pelos alunos do Grupo 1.


2. O que mais lhe chamou a atenção no texto?

A forma com que o autor relacióna a morte e a vida.

G2

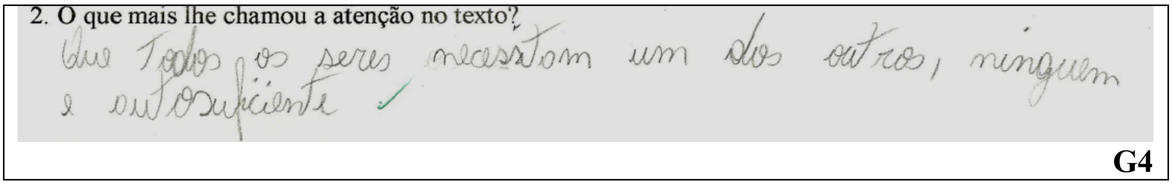
Figura 4: Resposta do Grupo 2 à questão 2 sobre o texto.
Fonte: Folha de atividades da Aula 01, respondida pelos alunos do Grupo 2.


2. O que mais lhe chamou a atenção no texto?

Que a morte representa a vida de outro ser.

G5

Figura 5: Resposta do Grupo 5 à questão 2 sobre o texto.
Fonte: Folha de atividades da Aula 01, respondida pelos alunos do Grupo 5.


2. O que mais lhe chamou a atenção no texto?

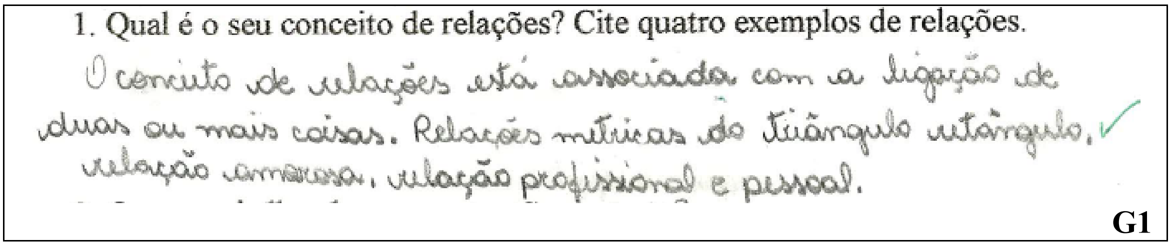
Que Todos os seres necessitam um dos outros, ninguem é autosuficiente

G4

Figura 6: Resposta do Grupo 4 à questão 2 sobre o texto.
Fonte: Folha de atividades da Aula 01, respondida pelos alunos do Grupo 4.

Observamos que realmente a maioria dos alunos tem um conceito cotidiano formado sobre relações e também sobre conjuntos. A primeira noção de relação não precisa necessariamente ser matemática, mas que entendam como ligação entre dois elementos. Quase todos os grupos citaram como exemplos de relações, “amorosas”, “sexuais” e “profissionais”, como se pode constatar na resposta do Grupo 1 para o conceito de relações e como eles interpretam as relações.

Já o Grupo 5 evidenciou, no conceito de relação, a dependência entre as coisas e citou como exemplos a “cadeia alimentar”, a “relação numérica” a “relação entre pessoas” e a “relação química”. Parece que, na verdade, queriam dizer “reação química”.


1. Qual é o seu conceito de relações? Cite quatro exemplos de relações.

O conceito de relações está associada com a ligação de duas ou mais coisas. Relações métricas do triângulo retângulo, relação amorosa, relação profissional e pessoal.

G1

Figura 7: Resposta do Grupo 1 à questão 1 sobre o texto.
Fonte: Folha de atividades da Aula 01, respondida pelos alunos do Grupo 1.

1. Qual é o seu conceito de relações? Cite quatro exemplos de relações.

Uma coisa depende da outra. Exemplo: cadeia alimentar, relação numérica, relação química, relação entre pessoas.

G5

Figura 8: Resposta do Grupo 5 à questão 1 sobre o texto.
Fonte: Folha de atividades da Aula 01, respondida pelos alunos do Grupo 5.

Nesse primeiro momento da nossa pesquisa, sobre o desenvolvimento dos alunos em relação à questão ligada à formação do conceito de *função*, eles iniciaram a apropriação de uma ideia mais geral de *função*, ligada à necessidade humana de expressar a interdependência e a fluência que estão presentes no mundo em que vivemos; embora a atividade ficasse restrita basicamente à leitura e à interpretação do texto. Mas, como nos ressalta Moura (2010), a educação escolar é responsável pelo desenvolvimento do pensamento teórico e pela formação de conceitos científicos.

> Esta, entende-se, é primordialmente a responsável pela aprendizagem de conceitos científicos e pelo desenvolvimento do pensamento teórico, orientada pela intencionalidade de impactar os sujeitos, proporcionando as alterações no desenvolvimento de suas funções psíquicas e a apropriação de conceitos científicos. (MOURA et al., 2010, p. 99).

Nesse sentido, a leitura, análise, interpretação e discussão do texto em grupos puderam impactar os alunos rumo ao desenvolvimento de funções psíquicas e à apropriação dos conceitos científicos. É como se estivéssemos, com o texto, estimulando os sentidos dos alunos para a aprendizagem dos conceitos.

3.3 Análise dos resultados: Relações e *funções* – o conceito de *função*

Nesse episódio foi possível perceber a importância do trabalho coletivo para a manifestação e expressão dos alunos. Analisando as conversas e discussões dos componentes de cada grupo, percebemos o nível de envolvimento e o interesse deles com as questões propostas. Ficou evidente, na maioria dos pesquisados, a fluência com que expressaram suas ideias e buscaram o entendimento do grupo. Como evidência, ficou caracterizada a importância das intervenções do pesquisador e da sua mediação como fundamentais para o desenvolvimento da atividade de ensino e do trabalho coletivo.

A partir dos registros filmados, gravados e das respostas dos alunos, a tarefa de analisar parece complexa, tendo em vista o seu caráter qualitativo. Analisar é buscar a essência do fenômeno que não se apresenta de forma imediata, conforme Duarte (2000) nos afirma:

> Por sua vez, a essência do fenômeno na sua forma mais desenvolvida não se apresenta ao pesquisador de forma imediata, mas sim de maneira mediatizada e essa mediação é realizada pelo processo de análise, o qual trabalha com abstrações. Trata-se do método dialético de apropriação do concreto pelo pensamento científico através da mediação do abstrato. A análise seria um momento do processo de conhecimento, necessário à compreensão da realidade investigada em seu todo concreto. (DUARTE, 2000, p. 5).

Assim, após permanecer em campo, propondo atividades, registrando, observando e acompanhando as ações dos alunos, chega o momento de traduzir para um entendimento teórico os resultados obtidos. Esse processo, no entanto, é parte fundamental da pesquisa, conforme esclarece Rigon (2010):

> [...] criar condições de pesquisa que permitam ao pesquisador analisar o processo de desenvolvimento de seu objeto de estudo, o que exige acompanhamento das ações realizadas pelos sujeitos da investigação e também a permanência em campo no decorrer de um período de tempo que possibilite compreender a gênese e o desenvolvimento do fenômeno estudado. (RIGON et al., 2010, p. 40).

A atividade desenvolvida com a árvore genealógica teve como objetivo principal o contato dos alunos com representações simbólicas. Assim, quando apresentamos a eles os símbolos: p(x); m(x); io(x); ia(x); fa(x) e fo(x), a nossa intenção era de que tivessem os primeiros contatos com representações algébricas (simbólicas) que, no caso, representam relações. As letras ‘p’, ‘m’, ‘io’, ‘ia’, ‘fa’ e ‘fo’ estão representando de forma abreviada as palavras ‘pai’, ‘mãe’, ‘irmão’, ‘irmã’, ‘filha’ e ‘filho’. A letra ‘x’ que aparece dentro dos parênteses representa um elemento que pode variar (variável): p(x) quer dizer “pai de alguém”; de alguma pessoa que devemos descobrir observando a relação. De forma semelhante, nas *funções*, utilizamos representações simbólicas. Na expressão f(x), por exemplo, a letra ‘f’ representa ‘*função*’, e a letra ‘x’, um valor que varia de acordo com a relação estabelecida.

A linguagem humana, segundo Vigotski (2009), possui as funções básicas de comunicação social e pensamento generalizante. Então, além de propiciar a comunicação, a linguagem facilita o processo de abstração e generalização, que favorecem a criação de categorias conceituais. Assim, ao introduzir termos e expressões representativas de *funções* e seus elementos, tivemos o cuidado de apresentar antes, aos alunos, esses termos e expressões em contextos do seu convívio social, o que permite por parte dos alunos uma melhor compreensão e interpretação.

FOLHA DE ATIVIDADE – 01: **Relações e funções - o conceito de função**. **Aula 02**

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio Data: ____/____/2014

Nome: ____ Nº: ______ Série: ______

02 – Árvore genealógica

Você já ouviu falar em árvore genealógica? ( ) Sim; ( ) Não

A árvore genealógica é um diagrama que mostra a relação ent

membros de uma mesma família. Veja o exemplo.

Qual a relação existente entre os membros de uma árvore gene

R.: _____________________________________

Veja alguns exemplos de notações que representam as relaçõe

na árvore:

- p(x) significa “pai de x”, por exemplo, p(António) = Manuel
- m(x) significa “mãe de x”, por exemplo, m(Luísa) = Francisca
- io(x) significa “irmão de x”, por exemplo, io(Sofia) = David
- ia(x) significa “irmã de x”, por exemplo, ia(David) = Sofia
- fa(x) significa “filha de x”, por exemplo, fa(Francisca) = Luísa
- fo(x) significa “filho de x”, por exemplo, fo(Maria) = António

1. Observando os dados da árvore acima e os exemplos dados, complete os itens a seguir:

a) p(Carlos) = d) io(Carlos) =

b) m(David) = e) ia(Miguel) =

c) m(Sofia) = f) io(Luísa) =

2. Observando a árvore, você pode notar que p(m(Carlos) = António. Complete os itens a seguir:

a) m(m(Carlos) = d) p(p(Sofia) =

b) m(io(Sofia) = e) p(oi(Luísa) =

c) p(m(Miguel) = f) m(p(David) =

3. Será que io(m(Carlos)) = m(io(Carlos))? (   ) Sim   (   ) Não. Por quê? ____________________

____

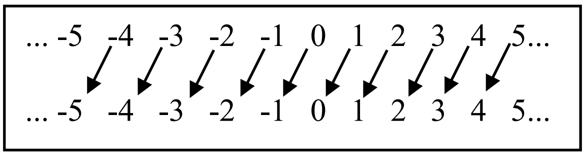
4. Agora você vai escrever dentro de cada parêntese o que falta para completar a igualdade.

a) m(   ) = Rosa   d) fa(   ) = Luísa

b) p(   ) = José   e) fo(   ) = Carlos

c) m(   ) = Luísa   f) p(   ) = António

5. Podemos estabelecer relações entre tudo o que existe; algumas relações, no entanto, são mais evidentes e tem maior importância para a humanidade. A árvore genealógica é uma delas. Vamos analisar outras relações. O quadro abaixo apresenta outro diagrama com uma relação entre números. Veja.



a). Uma seta partindo do -5 na linha superior iria para qual o número na linha inferior? R.: _____

b). E partindo do 6? R.: _______.

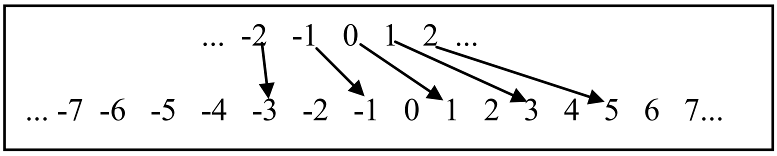
c) De que número da linha superior partiria a seta que aponta para o 10 da linha inferior? R.:_____

d) Para todo número da linha superior haverá um correspondente na linha inferior? (   ) Sim (   ) Não. Por quê?____

e). Você pode explicar o que está acontecendo com os números da linha superior? R.:____

f). Se existisse um número ‘n’ na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: _

6. Observe essa outra relação. Procure descobrir qual é a lei da relação.



a). Uma seta partindo do -3 na linha superior iria para qual o número na linha inferior? R.: _____

b). E partindo do 3? R.: _______.

c) De que número da linha superior partiria a seta que aponta para o nº (-7)? R.: _______.

d) Para todo número da linha superior haverá um correspondente na linha inferior? (   ) Sim (   ) Não. Por quê?____

e). Você pode explicar o que está acontecendo com os números da linha superior? R.:____

f). Se existisse um número ‘n’ na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior?

R.: __

7. Observe mais essa relação e tente descobrir a sua lei.

... -3 -2 -1 0 1 2 3...

... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

a). Uma seta partindo do -4 na linha superior iria para qual o número na linha inferior? R.: _____

b). E partindo do 4? R.: _______.

c) De qual número da linha superior partiria a seta que aponta para o número (-4)? R.: ____________.

d) Para todo número da linha superior haverá um correspondente na linha inferior? (   ) Sim (   ) Não. Por quê?____

e). Você pode explicar o que está acontecendo com os números da linha superior? R.:____

f). Se existisse um número ‘n’ na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: __

I – Todos os números da linha superior têm relação com algum número da linha inferior.
II – Cada número da linha superior está relacionado com apenas um número da linha inferior.

As três relações anteriores apresentaram duas características muito importantes e especiais. Você é capaz de identificá-las?

Toda vez que a relação entre os elementos de dois conjuntos obedece a essas duas características, ela é chamada de <u>FUNÇÃO</u>.

... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

8. Vamos chamar a função acima de *s* (de subtração). Complete, seguindo o exemplo:

a) s(5) = 5 – 1 = 4

b) s(0) = _________= ____

c) s(-10) = _______= _____

d) s (   ) = 16

e) s(-4) = ________= ____

f) s(   ) = -8

g) s(26) = ________= ____

h) s(n) = _________

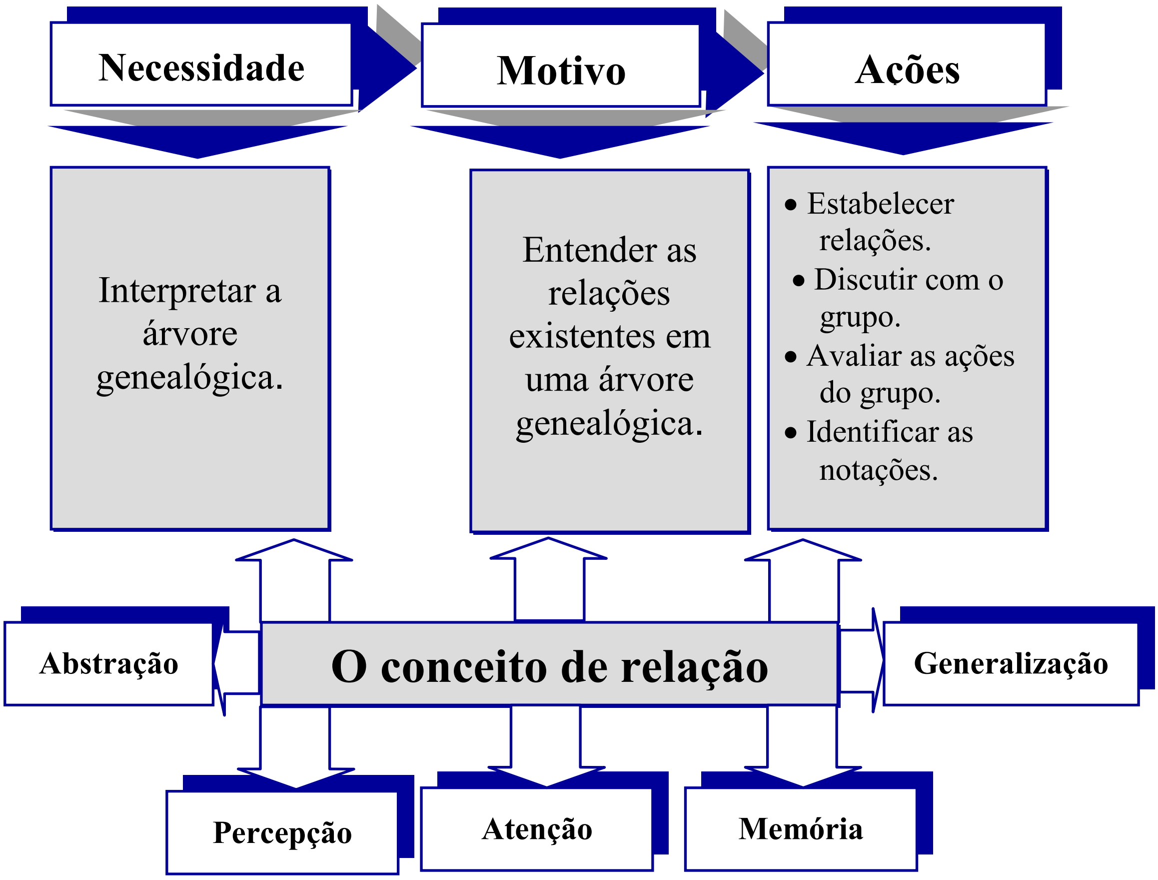
Quadro 13: Folha de atividade 01 – Aula 02 – Relações e *funções*: o conceito de *função*.
Fonte: O autor, 2014.

<table>
<tr><td colspan="3">AULA 02: Relações e funções – o conceito de função. A árvore genealógica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I – Discutir os primeiros conceitos ‘cotidianos’ de relações.
II - Familiarizar-se com termos utilizados nas relações e funções, tais como: p(x); m(x),... f(x).
III – Abstrair e estabelecer a regra que determina a relação entre os elementos de dois conjuntos.
IV - Entender os significados dos primeiros termos que compõem o conceito de função.
V - Abstrair e generalizar elementos da formação da lei que caracteriza uma função.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos - DMPA</td><td>LE G1: Tem que pensar.
GA G1: Tem que prestar atenção, primeiro.
YA G1: Eu estou na 01, eu tô tentando entender.
LE G1: É só vocês ‘prestar’ atenção aqui em cima, ó, tá explicando tudo.
GA G1: Se você não olhar em cima, você não vai entender.</td><td>Todos os grupos terminaram as atividades no tempo previsto e com ótimo índice de aproveitamento.</td></tr>
<tr><td>Autorregulação - AR</td><td>GA G1: Não, “pera” aí. O irmão da mãe do Carlos é?
LE G1: A mãe do Carlos é Luísa, o irmão de Luísa é o Miguel.
A L G1: Vocês têm certeza que está certo? O irmão da mãe do Carlos é igual à mãe do irmão do Carlos. Vocês puseram ‘Sim’?
A VI G1: Sim, pois a ordem dos fatores não altera o produto.
GA G1 Presta a atenção: o irmão da mãe é igual à mãe?
LE G1: O Miguel é mãe? Obrigado! [Risos.]
JO G5: Nós temos que saber responder essa daqui. Põe aí, TH, pelo amor de Deus e para de ficar conversando.
MA G5: É de baixo para cima; os bisavós, avós, os pais e os filhos.
CA G5: O pai de Carlos é o José. Gente, pode ser o contrário também; nós estamos fazendo errado. Olha aqui, a mãe de David é Rosa.
JO G5: Nada a ver, Carol, olha aqui, a setinha está apontando para cima, ou seja, a relação desses dois deu Antônio.</td><td>A participação de cada membro do grupo se torna tarefa imprescindível nos resultados obtidos. A troca de informações abre espaço para o crescimento de cada aluno.</td></tr>
<tr><td>Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE): utilização dos signos. Formação do Conceito - FC</td><td>LE G1: Agora a relação é com números.
A VI G1: Estão crescendo, porque começou do menos e foi pro mais.
THA G1: Não tem começo.
YA G1: “Se existisse um número n na linha superior, qual seria o seu correspondente”? Seria n.
LE G1: Mas é o número n, nós não sabemos que número é.
THA G1: Uai, fala que é o n.
LE G1: Não, antes do n é o m.
JO G5: José Divino? E se tiver assim, ó?
JD: É uma relação dupla: pai da mãe do Miguel. Não está definido.
CA G5: A mãe de alguém é Rosa; a Rosa é mãe de quem?
LU G5: De David e de Sofia.
MA G5: Vocês entenderam a 4?
LU G5: José Divino? A resposta dessa eu troquei.
JD: Põe uma seta aqui dizendo que a resposta é daquela.
JD: Estão se relacionando...
MA G5: Com os números da linha inferior.
JD: E essa aqui não está?
LU G5: Não, está procurando seus múltiplos: 3 com 9, 2 com 4.
JD: O que o 9 é do 3?
LU G5: Múltiplo.
JO G5: Múltiplo comum.
JD: O que o 9 é do -3? Não tem outra relação?
MA G5: É a potência.
JD: Isso.
LU G5: Vocês sabem que a 2 está errada, né?
CA G5: Por quê?</td><td>JD (José Divino) é o pesquisador.</td></tr>
</table>

	LU G5: Porque cada número da linha superior está se relacionando com apenas um número. MA G5: Não é, não. MA G5: Olha aqui na 7: o -3 está com 9 e o 3 também está com 9. Então, não é apenas um número. CA G5: Não, é apenas um número no total.	
Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos - DMPA Autorregulação - AR e Autoavaliação – AA	GA G1: "Para todo número da linha superior haverá um correspondente na linha inferior"? LE; THA G1 (juntas): Sim. LE G1: Foi a mesma da outra, porque as reticências significam continuidade. LE G1: Então uma seta partindo do 'menos quatro' vai dar dezesseis. YA G1: Certeza? LU G5: É sim ou não, aqui? JO G5: É sim, mas agora eu não sei o porquê. LU G5: Porque os números nunca têm fim. JO G5: Não, porque você só coloca 'Não' o que você vai responder porque, não é o 'Sim'. LU G5: É o 'Sim', porque os números nunca vão acabar. JO G5: Porque os números são infinitos. LU G5: A outra, na letra 'a' é -5. Repara que sempre pula um e pega o outro, pula um e pega o outro. LE G1: E partindo do quatro é dezesseis também. Não, é menos 2 (-2). YA G1: É dois. A L G1: Duas vezes dois é 4, não dá negativo. LE G1: Então, nós pensamos errado.	A participação dos alunos no grupo: 4 alunos opinaram na discussão acerca de uma questão.
Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE) e Formação do Conceito – FC (Desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores)	A L: A última é n – 1. Quanto dá? LE: Na (h)? n - 1 = m MA G5: Cara, você põe 'Sim' aqui; porque os números são infinitos. A letra 'f' é 'o', letra 'o', porque a linha superior está relacionada com um a mais, depois do 'n' é o 'o'. JO – G5: Põe aí, TH, 'm', não é 'o'. LU G5: O 'n' 'ferrou', qual é o múltiplo do n? JO G5: Ele mesmo.	Os alunos fizeram a generalização, mas não abstraíram corretamente a representação do número por meio de uma letra.

Quadro 14: Síntese da análise da Aula 02: Objetivos e categorias de análise.
Fonte: O autor, 2014.

As atividades para a formação do conceito de *função* foram elaboradas de acordo com a proposta do ensino desenvolvimental, a partir de uma necessidade, por um determinado motivo e sob a realização de algumas ações devidamente elaboradas. Conforme Moura (2010): "o motivo da atividade de aprendizagem deve ser, por parte dos alunos, a aquisição de conceitos teóricos, mediante ações conscientes que permitam a construção de um modo generalizado de ação". Segundo o autor, a atividade proposta deve conter: "uma necessidade (apropriação da cultura), um motivo real (apropriação do conhecimento historicamente acumulado), objetivos (ensinar e aprender) e ações que considerem as condições objetivas da instituição escolar." (MOURA et al., 2010, p. 96). No quadro a seguir, sintetizamos esse pensamento.



Quadro 15: Esquema da atividade de ensino e aprendizagem: A árvore genealógica e o conceito de relação.
Fonte: O autor, 2014.

Na análise desta atividade buscamos obter os primeiros indícios de que os alunos estavam caminhando em direção à formação do conceito de *função*. Entendemos que o processo de aquisição de conhecimentos ocorre a partir de um exercício mental complexo e, portanto, é necessário que os alunos estejam imbuídos de necessidade e motivo para agir. Para que haja uma aprendizagem satisfatória é necessário que o professor/pesquisador conduza esse trabalho mental dos alunos a partir do movimento lógico de relações que envolvam de forma dinâmica: o seu conhecimento e o conhecimento dos alunos sobre o tema proposto; o envolvimento interpessoal entre professor/aluno, aluno/professor e aluno/aluno. Assim fica evidente o papel do compartilhamento como elemento indispensável no processo de desenvolvimento mental dos alunos. O intercâmbio entre a mediação, os objetos e a produção do conhecimento age no interpsicológico dos sujeitos e caminha para o intrapsicológico, onde acontece a assimilação e a aprendizagem. Segundo Vigotski (2009), a apropriação do conhecimento se dá por processos internos ao sujeito e ocorre na atividade mediada. Porém, o conteúdo do pensamento do sujeito primeiro é social (interpsíquico) e depois, individual (intrapsíquico). É o que nos esclarece Moura (2010):

> É nesse movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, que se dá a apropriação da experiência social da humanidade. Dessa forma, podemos entender que a aprendizagem não ocorre espontaneamente e apenas tomando-se por base as condições biológicas do sujeito, mas que é mediada culturalmente. (MOURA, 2010, p. 83).

As diferentes cenas de diálogos entre os componentes dos grupos selecionados para análise têm como característica comum o fato de evidenciar as limitações individuais dos alunos no processo de assimilação e apropriação do pensamento teórico. Somente após algum tempo de diálogo entre os elementos do grupo, regado por uma mediação externa do pesquisador, é possível observar um esboço de consenso e de entendimento entre os alunos.

Para Vigotski (2010), o papel das funções psíquicas superiores está ligado à capacidade dos alunos em pensar em objetos ausentes, controlar suas atividades psíquicas, planejar ações, criar, avaliar. Nas cenas de diálogos dos componentes do G1, fica evidente a análise dos alunos sobre a questão da letra 'n' que representa um número. Várias interpretações são elaboradas por eles com o objeto ausente. Os alunos deveriam pensar em um número que seria substituído por uma letra e que, ainda, representasse a relação existente entre os dois conjuntos numéricos. Essa atividade deixa evidente que, quando numa aula de matemática, o professor transfere o valor de um número para uma letra, o aluno pode não assimilar corretamente essa relação de signos, o que interfere na aprendizagem, pois a palavra constitui uma forma primária do conceito e pode reproduzir generalizações da realidade. Nesse sentido a maneira como se conduz a linguagem matemática utilizada em sala de aula pode ser fundamental para a formação, ou não, dos conceitos.

Ainda, com relação à letra 'n', no exercício nº 8, letra 'h', foi solicitado aos alunos que indicassem o valor de s(n) (subtração de n). A regra era subtrair 'um' do número 'n'. Logo, s(n) seria n – 1. Percebemos que nessa atividade os alunos tiveram dificuldades na abstração. Alguns alunos entendiam que quando se subtrai 1 (um) da letra 'n', obtém-se a letra 'm', que é imediatamente anterior (noção de antecessor e sucessor). A função do signo, nesse caso, não está bem definida para os alunos, pois se coloca em outro contexto de referência, que necessita de novo sistema semântico. Vigotski (2009) afirma que o desenvolvimento dos significados das palavras (dos conceitos) envolve o desenvolvimento de muitas funções intelectuais. Neste caso específico, a abstração e a capacidade para comparar e diferenciar.

Para Vigotski, a sociogênese do processo de formação de conceitos passa por três fases básicas com diferentes estágios[13]: pensamento sincrético, pensamento por complexos e pensamento conceitual. Percebemos que as atitudes dos alunos pesquisados (quando afirmam que s(n) = m) aproximam-se da fase do pensamento sincrético, pois as relações entre as letras do alfabeto são coerentes e do seu pleno domínio, porém a generalização ainda não alcançou o nível de ordenação indicado para a formação do conceito.

5.
f). Se existisse um número 'n' na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: m

8. h) s(n) = n - 1 = m

G1

Figura 9: Resposta do Grupo 1 às questões 5 e 8 da Aula 02: Relações e *funções* – o conceito de *função*. A árvore genealógica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 02, respondida pelos alunos do Grupo 1.

5.
f). Se existisse um número 'n' na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: m

h) s(n) = m
8.

G2

Figura 10: Resposta do Grupo 2 às questões 5 e 8 da Aula 02: Relações e *funções* – o conceito de *função.* A árvore genealógica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 02, respondida pelos alunos do Grupo 2.

5.
f). Se existisse um número 'n' na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: m

8.
h) s(n) = m

G3

Figura 11: Resposta do Grupo 3 às questões 5 e 8 da Aula 02: Relações e *funções* – o conceito de *função*. A árvore genealógica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 02, respondida pelos alunos do Grupo 3.

---

[13] Pensamento sincrético: nesse estágio a criança forma amontoados de objetos sem nenhuma relação factual ou concreta real; pensamento por complexos: as relações e ligações entre os elementos de um complexo são concretas e factuais produzidas por impressões subjetivas. O pensamento por complexos é coerente e objetivo. Um complexo pode ser: associativo, coleção, em cadeia, difuso ou pseudoconceito; pensamento por conceitos: o pensamento por conceitos envolve de forma articulada a relação entre generalização e abstração. (VIGOTSKI, 2011).

5.

f). Se existisse um número 'n' na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: n - 1

8.

h) s(n) = __________

G4

Figura 12: Resposta do Grupo 4 às questões 5 e 8 da Aula 02: Relações e *funções* – o conceito de *função*. A árvore genealógica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 02, respondida pelos alunos do Grupo 5.

5.

f). Se existisse um número 'n' na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: n

8.

h) s(n) = n - 1 = n

G5

Figura 13: Resposta do Grupo 5 às questões 5 e 8 da Aula 02: Relações e *funções* – o conceito de *função*. A árvore genealógica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 02, respondida pelos alunos do Grupo 5.

5.

f). Se existisse um número 'n' na linha superior qual seria o seu correspondente na linha inferior? R.: n

8.

h) s(n) = __________

G6

Figura 14: Resposta do Grupo 6 às questões 5 e 8 da Aula 02: Relações e *funções* – o conceito de *função*. A árvore genealógica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 02, respondida pelos alunos do Grupo 6.

Nessa atividade ficou evidente a importância da mediação exercida pelo pesquisador, bem como a sua relação com os componentes dos grupos. Assim, a nossa conclusão é de que a primeira atividade sobre relações e *funções* para a formação do conceito de *função* foi realizada e concluída pelos alunos dentro do previsto. Os principais aspectos observados nesse episódio foram o trabalho coletivo, as manifestações e expressões dos alunos e suas ações de discutir, relacionar, identificar e avaliar.

As imagens a seguir mostram os grupos desenvolvendo a atividade da "Árvore genealógica". É notório observar o envolvimento dos alunos. Todos os grupos concluíram a atividade proposta.

Figuras 15, 16, 17 e 18: Fotos dos alunos desenvolvendo as atividades da Aula 02.
Fonte: O autor, 2014.

3.4 Análise dos resultados da quarta atividade proposta: relações e *funções* – o conceito de *função* e representação

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio Data: ____/____/2014

Nome: ____ 9º ano C - Grupo: ______

Agora, nós vamos focar os nossos estudos no conceito de função.

Vocês viram, nas atividades realizadas nos encontros anteriores, que algumas relações apresentaram duas características importantes e especiais:

I – Todos os números do conjunto da linha superior têm relação com algum número do conjunto da linha inferior.

II – Cada número do conjunto da linha superior está relacionado com apenas um número do conjunto da linha inferior.

Toda vez que a relação entre os elementos de dois conjuntos obedece a essas duas características, essa relação é chamada de <u>FUNÇÃO</u>.

... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

01. Vamos chamar a função acima de ***s*** (de subtração). Complete, seguindo o exemplo:

a) s(5) = 5 – 1 = 4

b) s(0) = _________= ____

e) s(-4) = ________= ____

f) s( ) = -8

c) s(-10) = _______= _____ g) s(26) = ________= ____

d) s (   ) = 16 h) s(n) = _________

Vamos analisar, com bastante atenção, a relação acima.

i) O que significa a letra 's' antes de cada parênteses?

ii) Cada número da linha superior forma um 'par' com um número correspondente da linha inferior. Vamos forma esses pares com os números visíveis no quadro acima. Ex.: (-4; -5).

iii) Para encontrar o correspondente da linha inferior, basta subtrair 1 (um) ao número da linha superior. Assim, qual é o par formado com um número 'n' da linha superior?

02. A regra agora é **d(x) = dobro de x**. Assim, para cada número do conjunto da linha superior, faça uma seta indicando o seu correspondente no conjunto da linha inferior.

... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...

... -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7...

Essa relação representa uma função? (   ) Sim (   ) Não. Por quê?________________________

____

03. Complete corretamente:

a) d(5) = ________ d) d(s(3)) = _________

b) d(   ) = 7 e) s(d(6)) = _________

c) d(s(   ) = 10 f) d(s(n)) = ____________

04. A relação agora é **q(x) = elevar x ao quadrado**. Para cada número do conjunto da linha superior, faça uma seta indicando o seu correspondente no conjunto da linha inferior.

... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

... -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25...

Essa relação representa uma função? (   ) Sim (   ) Não. Por quê?______________________________

____

05. A regra agora é: metade de x considerando somente números inteiros.

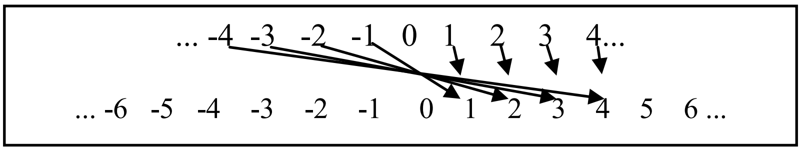
... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

... -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 ...

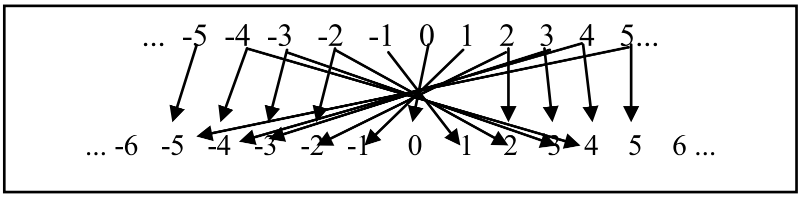
Essa relação representa uma função? (   ) Sim (   ) Não. Por quê?________________________________

06. Verifique se as relações abaixo são funções. Em caso afirmativo, aponte a regra que define cada função.

a) Qual é a lei? ____



b) Qual é a lei? ____



Quadro 16: Folha de atividade 01 – Aula 04 – Relações e *funções*: representação simbólica.
Fonte: O autor, 2014.

AULA 04: **Relações e *funções* – representação simbólica: d(x); q(x)**		
OBJETIVOS: I – Identificar se uma relação é ou não *função*. II - Aplicar as evidências do conceito de *função* nas atividades propostas. III - Estabelecer a relação entre os elementos de dois conjuntos a partir da regra ou 'lei' de formação. IV - Abstrair e generalizar elementos da formação da lei que caracteriza uma *função*.		
Categorias de análise	**Ações/atividades dos alunos**	**Observações**
Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE) e Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos - DMPA	**Tarefa 01** GA G1: s(5) = 5 – 1 = 4; s(0) = ... A V: Não entendi. LE: Nem eu. Vai sempre subtrair por um? YA: É. GA: Ou não. YA: Ou sim, porque é 5 por 4, 4 por 3, 3 por 2; sempre por um. GA: É verdade. LE: O 'n' vai dar 'm', não é? GA: Não, é só n-1. GA: Gente, eu não sei qual que é com n – 1. THA: É m. A V: É n. GA: Gente, é só n-1.	As dificuldades sobre as abstrações permanecem em alguns alunos.
Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE); Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos alunos (DMPA) e Formação do	**Tarefa 02 e 03** GA: A regra agora é d(x), dobro de x. Ah, tá, o 'd' significa dobro de x. Presta atenção, YA, eu estou lendo, mas tem de prestar atenção. A regra agora... A cada número do conjunto da linha superior, faça uma seta indicando o seu correspondente na linha inferior. Temos que fazer o dobro de cada. Qual é o dobro de 3? YA: 6	Nesse trecho da discussão entre os componentes do grupo podemos perceber a interação entre eles e a sua evolução quanto à formação do conceito de *função*.

Conceito - FC	LE: GA, tem que rever o que é *função* para responder. GA: *Função...* YA: É a relação... GA: Esta relação representa uma *função*? Não sei. YA: Ele acabou de explicar, é a relação... sei lá. LE: Todo número da linha superior tem relação com algum número da linha inferior. A V: Sim, pois está obedecendo às características... tem que obedecer à regra de relacionar com apenas um número da outra linha e sempre ter uma relação entre os dois. Tem que obedecer às características da relação.	
Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE); Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	**Tarefas 03 e 04** GA: O dobro da subtração de 10. LE: O dobro de 10 é 5; 5 mais 5 dá 10. GA: O dobro de 10? A V: O dobro de 10 dá 20. GA: O dobro de 10 é 20, menos 10; não, -20 não dá. GA: Ah, a gente tá fazendo errado. LE: Vinte? É? Subtração de 10? A V: Como assim? É 5. GA: 5, é. YA: A subtração de 10 é 5? Subtração de quê tá pedindo aí? YA: Então, vamos pegar aqui, 20. O dobro da subtração, gente. LE: Vamos fazer os outros; vamos pular o 10.	Nesse trecho da discussão dos alunos, é possível perceber a dificuldade para interpretar a representação d(s(10)).
Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE)	**Tarefa 04** JD (pesquisador): Deixa-me ver o que vocês fizeram. Vamos ver os anteriores. Você vai fazer um par de ‘n’ com quem? GA: Com n - 1. JD: Então, faz um parzinho, igual você fez “esses”. GA: Ah, tá. GA: q(x), elevar x ao quadrado. GA: Agora é ao quadrado: $(-4)^2$. LE: Dá 16. GA: $(-4)^2$? LE: É. YA: $(-3)^2$ é igual a 9. $(-2)^2$ é igual a 4. LE: Esta relação representa uma *função*? Sim, pois está obedecendo à característica da relação.	Mediação: relação professor-aluno; aluno-aluno e aluno-professor. ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal.
Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos (DMPA)	LE: Pelo menos, a gente tá se dedicando, não tá fazendo individualmente, tá discutindo em grupo. YA: Lá é cada um por si. GA: Você não vê nenhum grupo conversando (sobre os exercícios), só o nosso grupo é que tá discutindo.	O grupo reconhece a importância da discussão entre os alunos.
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	**Tarefa 05 e 06** YA: Sabe por que tá errada? É porque fala que todos os números só podem ligar com apenas um da linha inferior. LE: Então, não é. GA: Não é melhor colocar fora dos parênteses? JD: Primeiro, você vai colocar 2 . (n – 1), depois você pode multiplicar o dois por cada um dos termos dentro dos parênteses. THA: Ah, entendi. YA: Vai dar n^2... JD: Não; duas vezes ‘n’ não é n^2. Preste atenção. A V: Duas vezes ‘n’? É 2n. JD: Então, vai ficar: GA: 2n -2.	

Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE)	**Tarefa 03 e 04** GA: A lei é tipo, a regra: dobro de (x), entendeu? O dobro de alguma coisa; a divisão de alguma coisa; a igualdade de alguma coisa. Isso que é a regra, a lei. GA: José Divino, pelo que a gente percebeu, isso aí sempre vai dar positivo. E não tem outra coisa que possamos fazer. JD: Veja bem, o -4 tá relacionado com qual? GA: Com o quatro. JD: O que o 4 é do -4? GA: Então, é isso que eu estou falando: sempre dará um número positivo. A V: Não, o que o 4 é do -4? JD: Tá relacionando: -4 com 4; -3 com 3; -2 com 2 ... 1 com 1; 2 com 2; 3 com 3 ... LE: Sempre com positivo. JD: Mas o que esse número positivo tem de característica? O que ele é daquele lá de cima? JD: Quando tira o sinal do número negativo, fica o quê? GA: Neutro. JD: Absoluto; módulo. GA: Ah. Então vai dar tudo valor absoluto. JD: Todo número está relacionado com o seu valor absoluto.	Mediação: ZDP – Zona de Desenvolvimento Proximal. Interação aluno-aluno, aluno-professor, professor-aluno.

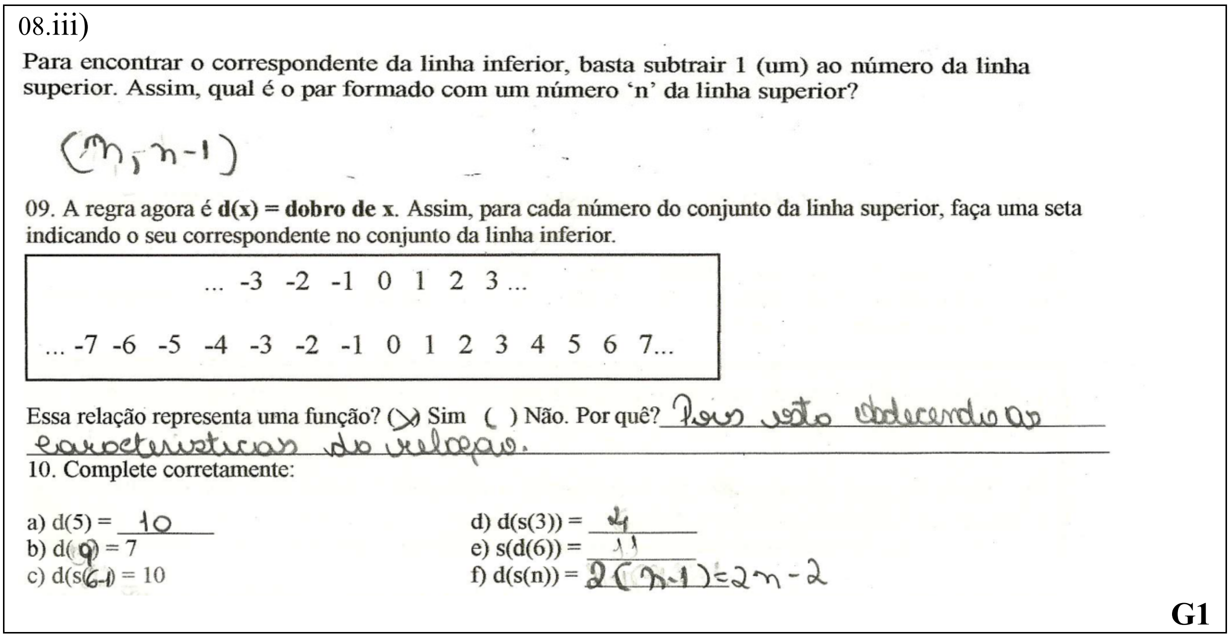
Quadro 17: Síntese da análise da Aula 04: Representação simbólica.
Fonte: O autor, 2014.

Para Vigotski, “a base da observação científica consiste em sair dos limites do visível e buscar seu significado, que não pode ser observado” (VIGOTSKI, 1999, p. 289). Essa afirmação nos reveste da responsabilidade de encontrar significados para as manifestações dos alunos diante das atividades propostas. Os resultados nem sempre são visíveis e expressivos à nossa percepção. Assim, diante das cenas de diálogo selecionadas para análise, vamos evidenciar e destacar aquelas situações em que ficou evidente para nós a evolução do pensamento teórico dos alunos.

Os conceitos científicos são desenvolvidos a partir das atividades escolares e ocorrem com a mediação do professor. Desse modo, conforme Davidov (1988), a escolha dos conteúdos a serem desenvolvidos e a forma de ensiná-los são decisivas no processo de ensino e aprendizagem e de desenvolvimento dos alunos. Nesse processo, a preocupação do professor deve envolver não apenas a aplicação dos conceitos, mas principalmente a sua formação. Por isso, a nossa intenção com a atividade da quarta aula foi envolver gradativamente os alunos em situações que aplicassem os conceitos de relação e *função*, bem como a apropriação de termos científicos importantes na formação desses conceitos. Para Núñez (2009), “o conceito teórico se apoia na generalização teórica”. Desse modo, as atividades propostas encadeavam generalizações teóricas para a formação do conceito de *função*. Após a introdução do conceito de *função* (na folha de atividades da Aula 01 e retomado na Aula 04), propusemos aos alunos ações para que eles pudessem identificar e utilizar padrões e generalizações desse conceito. A verbalização das características comuns aos objetos presentes nas atividades, segundo Núñez (2009), reflete as propriedades externas destes e conduz à formação do conceito. O autor afirma, ainda, que a formação dos conceitos científicos na escola produz uma ruptura com o pensamento cotidiano (do senso comum). A formação do pensamento teórico exige do aluno uma orientação em relação ao conteúdo do conceito. Para tanto, são necessárias ações que envolvam a aplicação do conceito. "É preciso que se aplique o conceito na solução das tarefas que exijam usar as características essenciais [...]" (NÚÑEZ, 2009, p. 47). No processo de formação de conceitos científicos, segundo o autor, o aluno adquire uma linguagem científica, um novo sistema semântico e um novo modo de pensar e de ver a realidade.

Nesse episódio, após a leitura e interpretação do texto sobre álgebra e a análise e discussão com os pesquisados sobre concepções e expressões algébricas, nós retomamos com eles o conceito de *função* que havia sido apresentado na aula anterior. Reiteramos as características importantes e essenciais do conceito de *função* e propusemos atividades para aplicação desse conceito. As atividades envolveram elementos essenciais na formação do conceito, como por exemplo, o desenvolvimento da linguagem. Vigotski (2009) afirma que a formação de conceitos está diretamente ligada ao desenvolvimento da linguagem. Assim, insistimos com os alunos para que refletissem sobre o significado das letras nas expressões algébricas, bem como de alguns termos relacionados, como por exemplo, par ordenado e variável. Nesse momento, começamos a trabalhar a apropriação do significado para a expressão f(x). Solicitamos a eles que formassem os pares 'ordenados' com os elementos dos conjuntos dados e a relação que foi estabelecida.

Na atividade seguinte solicitamos que eles respondessem se as relações indicadas representavam ou não uma *função* e por quê. Todos os grupos responderam corretamente a essa questão, afirmando quais representavam uma *função* (a relação representa uma *função* porque obedece às características essenciais) e quais não representavam uma *função*. Assim, ficou evidente (como se pode observar nos recortes das respostas dos alunos) que houve uma evolução quanto à interpretação dos significados das letras nas expressões algébricas.



08.iii)

Para encontrar o correspondente da linha inferior, basta subtrair 1 (um) ao número da linha superior. Assim, qual é o par formado com um número 'n' da linha superior?

(n; n-1)

09. A regra agora é **d(x) = dobro de x**. Assim, para cada número do conjunto da linha superior, faça uma seta indicando o seu correspondente no conjunto da linha inferior.

... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...

... -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7...

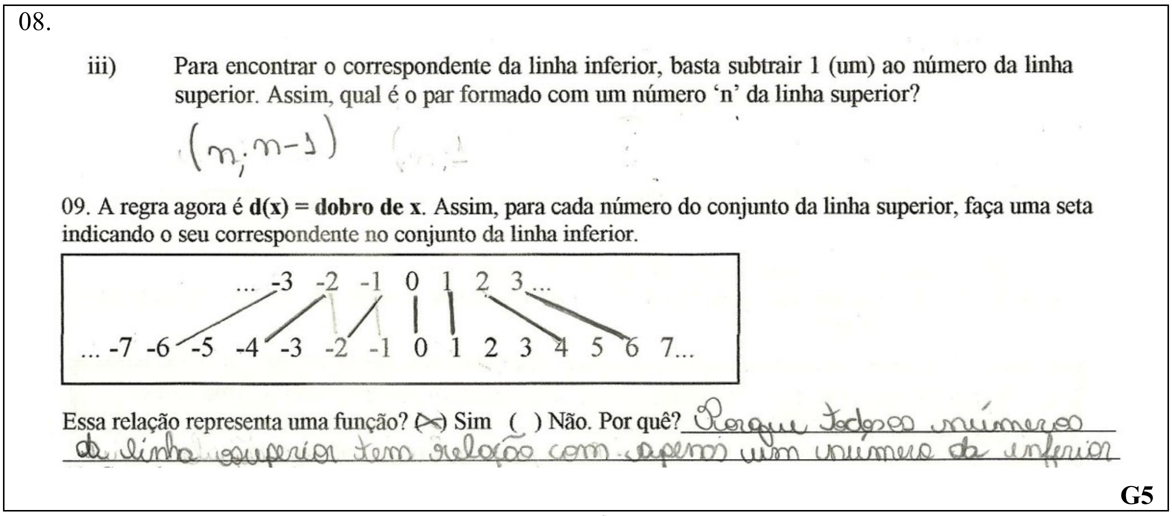
Essa relação representa uma função? (X) Sim ( ) Não. Por quê? Pois esta obedecendo as características da relação.

10. Complete corretamente:

a) d(5) = 10
b) d(9) = 7
c) d(s(6-1)) = 10
d) d(s(3)) = 4
e) s(d(6)) = 11
f) d(s(n)) = 2(n-1)=2n-2

G1

Figura 19: Resposta do Grupo 1 às questões de n^os^ 8, item iii), 9 e 10 da Aula 04: Relações e *funções* - representação simbólica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 04, respondida pelos alunos do Grupo 1.



08.

iii) Para encontrar o correspondente da linha inferior, basta subtrair 1 (um) ao número da linha superior. Assim, qual é o par formado com um número 'n' da linha superior?

(n; n-1)

09. A regra agora é **d(x) = dobro de x**. Assim, para cada número do conjunto da linha superior, faça uma seta indicando o seu correspondente no conjunto da linha inferior.

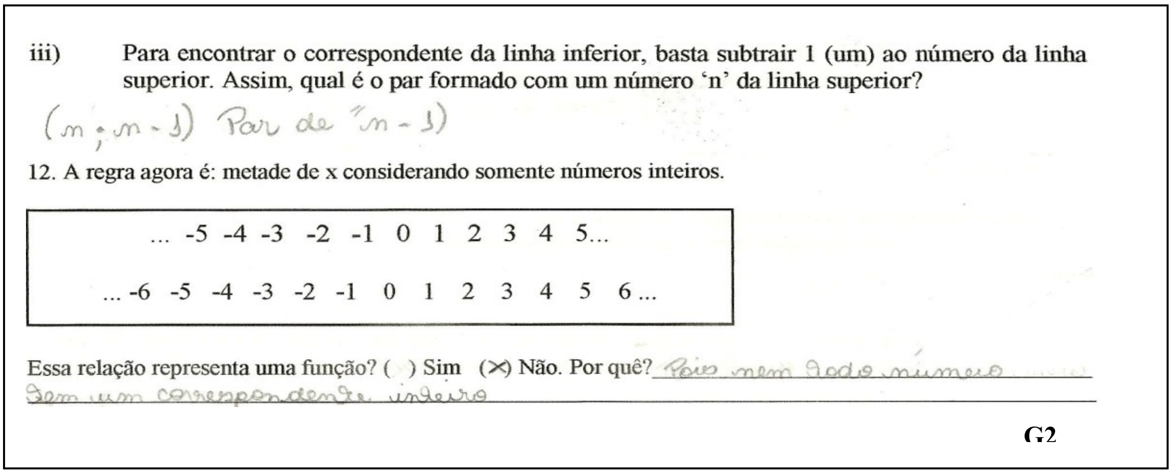
... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...

... -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7...

Essa relação representa uma função? (X) Sim ( ) Não. Por quê? Porque todos os números da linha superior tem relação com apenas um número da inferior

G5

Figura 20: Resposta do Grupo 5 às questões de n^os^ 8, item iii) e 9 da Aula 04: Relações e *funções* – representação simbólica.
Fonte: Folha de atividades da Aula 04, respondida pelos alunos do Grupo 5.



iii) Para encontrar o correspondente da linha inferior, basta subtrair 1 (um) ao número da linha superior. Assim, qual é o par formado com um número 'n' da linha superior?

(n ; n - 1) Par de (n - 1)

12. A regra agora é: metade de x considerando somente números inteiros.

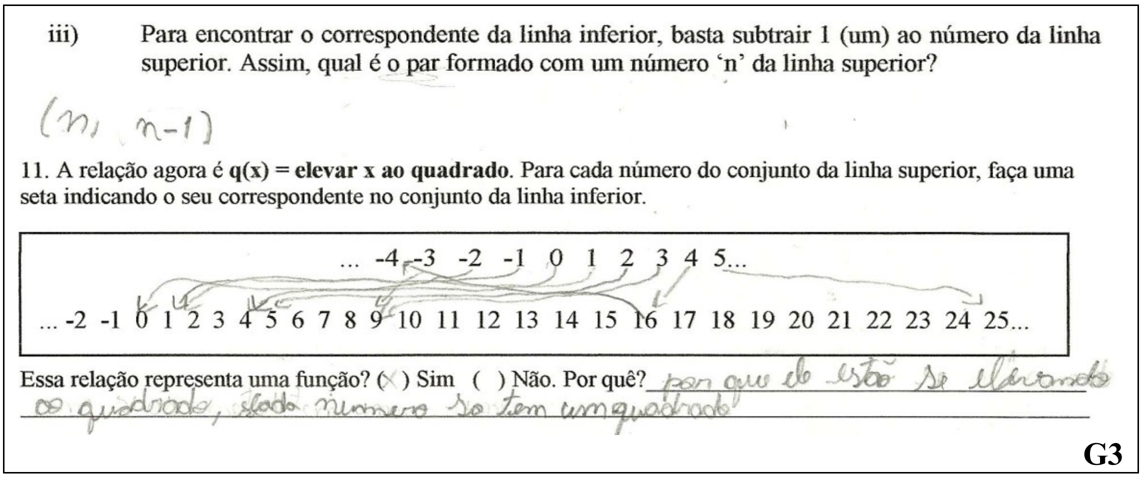
... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...
... -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 ...

Essa relação representa uma função? ( ) Sim (X) Não. Por quê? Pois nem todo número tem um correspondente inteiro

G2

Figura 21: Resposta do Grupo 2 às questões de nos 8, item iii) e 12 da Aula 04: Relações e *funções* – representação simbólica.

Fonte: Folha de atividades da Aula 04, respondida pelos alunos do Grupo 2.



iii) Para encontrar o correspondente da linha inferior, basta subtrair 1 (um) ao número da linha superior. Assim, qual é o par formado com um número 'n' da linha superior?

(n, n-1)

11. A relação agora é **q(x) = elevar x ao quadrado**. Para cada número do conjunto da linha superior, faça uma seta indicando o seu correspondente no conjunto da linha inferior.

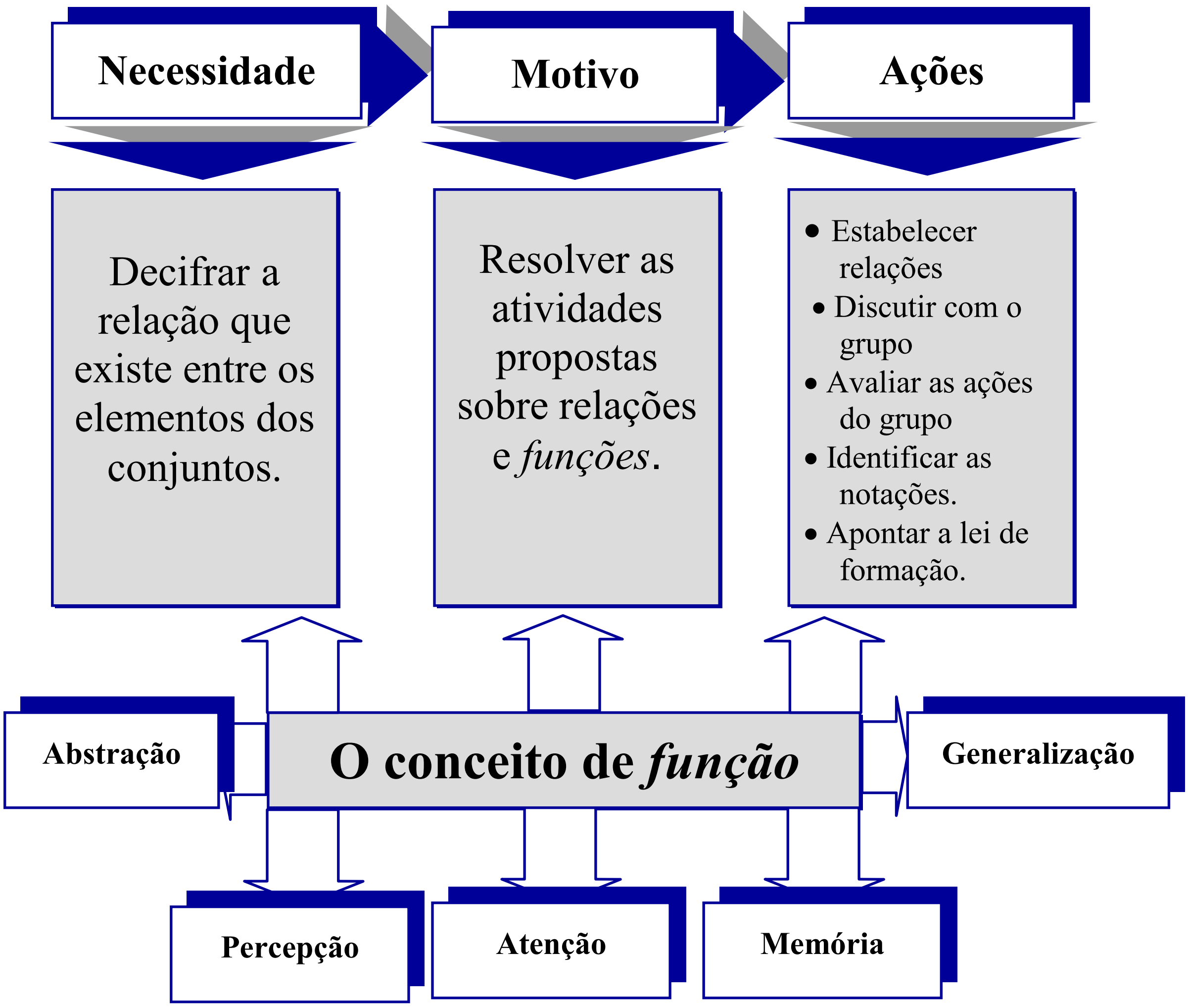
... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...
... -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25...

Essa relação representa uma função? (X) Sim ( ) Não. Por quê? por que ele estão se elevando os quadrado, cada número so tem um quadrado

G3

Figura 22: Resposta do Grupo 3 às questões de nºs 8, item iii) e 11 da Aula 04: Relações e *funções* – representação simbólica.

Fonte: Folha de atividades da Aula 04, respondida pelos alunos do Grupo 3.



Quadro 18: Esquema da atividade de ensino e aprendizagem: Relações e *funções* – o conceito de *função*.
Fonte: O autor, 2014.

3.5 Análise dos resultados: Relações, *funções* e variáveis

DOMÍNIO, CONTRA-DOMÍNIO E IMAGEM.

Se uma relação é função, podemos destacar 3 (três) conjuntos de elementos envolvidos na relação: o conjunto dos números da linha superior, que é chamado de DOMÍNIO (D); o conjunto dos números da linha inferior, que constituem o CONTRADOMÍNIO (Cd) e o conjunto dos números da linha inferior que receberam setas, que é chamado de conjunto IMAGEM (I).

02. Domínio – Contradomínio e Imagem

Encontre o Domínio (D), o Contradomínio (Cd) e a imagem (I) de todas as funções que você identificou nos exercícios de 8 a 13.

Quadro 19: Folha de atividade 01 – Aula 05 – Relações e *funções:* domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: O autor, 2014.

Seguem os episódios registrados nessa aula.

<table>
<tr><td colspan="3">AULA 05: Relações e funções – domínio, contradomínio e imagem</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I - Citar exemplos do dia a dia que representam relações e funções.
II - Reconhecer que, em uma função, podemos identificar dois valores (grandezas) em que um deles varia de acordo com a variação do outro e, por isso são chamados variáveis.
III - Identificar o Domínio (D); o Contradomínio (Cd) e a Imagem de uma função.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições objetivas da Atividade de Estudo (COAE)</td><td>JD: Então, vamos começar.
A L G1: A V, me explica aqui, por favor.
ERIKA: Ficou claro o que vocês têm que fazer na primeira? São exemplos do cotidiano, mesmo.
JD: Eu vou deixar com vocês o exercício da aula passada, pois vocês vão precisar dele para resolver a segunda questão.
A L G1: Tem que desenhar?
LE G1: Não. Mas pode desenhar.
JD: Está tudo bem aí, gente? Aqui na primeira, vocês relacionaram com as duas condições necessárias para ser uma função? O ser humano e a água pode ser função, mas cadê a relação? Aqui no carro e a gasolina; vocês podem fazer o seguinte: cada litro de gasolina custa cerca de R$ 3,00. Aí, a gasolina está em função do preço. O valor que eu vou pagar estará em função da quantidade de litros que eu compro. Então, vocês devem estabelecer dessa forma: quem está em função de quem.
YA G1: O da gasolina está errado?
LE G1: Tá, tem que ser dessa forma: tem que pegar o preço.
A L G1: O que a gente fez está errado?
YA G1: Tá, tem que colocar assim: um litro custa R$ 3,00; dois litros custam R$ 6,00...
GA G1: Mas o do “ser humano e a água” está certo.
GA G1: Nós vamos ver se está certo. José Divino, Vinícius, por favor. Veja se está certo.
VINÍCIUS: Aqui, ó; o preço em função da quantidade de produtos. Ok. O preço aumenta de acordo com a quantidade de produtos. Quanto mais se gasta, maior o preço; esta é a função. Essa última aqui, você consegue estabelecer a relação? Cada produto tem um preço, mas ele quer a função do preço com o produto. Quanto mais produtos você compra, mais você gasta.</td><td>ERIKA é auxiliar de pesquisa, do Projeto OBEDUC.

As atividades foram entregues aos grupos, que receberam as orientações necessárias para executá-las.</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos - DMPA</td><td>A L G1: Ela tá desenhando?
LE G1: Não, ela tá escrevendo, mas eu prefiro desenhar.
ERIKA: Você desenha bem! Eu não sei fazer nenhuma florzinha direito.
YA G1: É, a da água também ficou legal. A planta e a água.
GA G1: A gente já colocou. Você está colocando tudo igual a nós?
LE G1: Estou.
GA G1: É só cinco, tá? A terra e o sol.
YA G1: O ser humano e a água; a planta e a água, vocês colocaram?
LE G1: É.
GA G1: O que está falando aqui? O preço e o produto?
A V G1: Por exemplo: o ser humano e o alimento?
GA G1: A terra fértil e o sol.
YA G1: Ah, então a gente precisa do ar e como é que desenha o ar?</td><td>Os exercícios propostos nessa atividade aguçavam a criatividade dos alunos para apontar exemplos de fatos do dia-a-dia, que representam funções. Além dos exemplos de relações que representam funções, a atividade procurou evidenciar a relação entre duas grandezas em que os valores de uma dependem dos valores da outra.</td></tr>
</table>

	GA G1: Assim, ó. Uma coisa assim, muito legal. LE G1: Quanto mais combustível... pronto. YA G1: Nossa, nós deveríamos ter feito a sete. GA G1: Oh! Aluguel: quanto maior sua estadia, maior o valor. Num ano é R$ 59,00; no outro ano vai ser R$ 69,00. Aumento de R$ 10,00. A V G1: É mesmo; lá em casa é R$ 20,00, parece. GA G1: Tem casa que é R$ 100,00. LE G1: O do aluguel é o quê? GA G1: Quanto maior a estadia, maior o preço. Agora, vamos ver se está certo. José Divino, Vinícius, por favor. Veja se está certo. VINÍCIUS: Aqui, ó. O preço aumenta de acordo com a quantidade de produtos. GA G1: Aumenta, viu? VINÍCIUS: Quanto maior for o gasto, maior o preço; essa é a função. Quanto maior a estadia, maior... Essa última aqui, você pode ter alguns com preço fixo. GA G1: Mas de ano em ano aumenta. VINÍCIUS: Ah, entendi o que você quis dizer. E, nessa aqui, vocês deem uma olhada. Cada produto tem um preço, mas tem que relacionar a função do preço com o produto. Entendeu?	
Formação do conceito - FC	GA G1: Oh. Vamos ler de novo, que eu não entendi nada. (Ele leu novamente o texto). A V G1: É tipo assim: o conjunto da linha superior é o domínio. Onde tem seta é imagem. GA G1: Eu entendi. A seta é a imagem. A V G1: E aqui é o contradomínio. GA G1: O último não tem domínio, nem contradomínio e nem imagem; não tem seta. Não tem nada. LE G1: O 'oito' aqui. Todos os números da linha superior é o domínio. GA G1: Eu sei disso; só que o 'oito' não tem. LE G1: Tem sim: -5; -4... GA G1: E cadê a seta?	As noções de domínio, contradomínio e imagem começam a compor os nexos do conceito de função.
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	YA G1: A perna precisa do pé. GA G1: Então, é o corpo que precisa do pé. A L G1: O pé e o corpo; é melhor. GA G1: Porque é o pé que sustenta o corpo. YA G1: As plantas também precisam do sol. Eu só acho. A L G1: Tudo tem dependência. LE G1: Tem que por coisa mais no jeito; só mais uma. Vocês estão pondo coisas... por exemplo: o pé depende da perna? LE G1: O coração depende do cérebro. GA G1: É, o coração precisa do cérebro. YA G1: O cérebro precisa do coração? GA G1: Não. YA G1: Se o coração parar, o cérebro morre. GA G1: Precisa de sangue. YA G1: Então escreve, por favor. GA G1: É coração e sangue; é mais fácil. LE G1: Precisa especificar. GA G1: Então, tem que fazer isso: cada produto tem apenas um preço. LE G1: É. YA G1: Cada produto só tem um preço, mas se eu colocar o produto e o seu preço, já vai entender.	

Quadro 20: Síntese da análise da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: O autor, 2014.

A aprendizagem está intrinsecamente ligada ao ensino e este está diretamente ligado ao desenvolvimento do ser humano. Nem sempre aprendizagem é sinônimo de desenvolvimento, mas este perpassa pelo ensino. Assim, devemos nos preocupar em avaliar se o que ensinamos foi realmente aprendido pelos alunos. A quinta atividade foi realizada no dia 18 de setembro de 2014, no mesmo horário de costume (2º e 3º horários – das 7h50min às 9h30min). Antes de falarmos da atividade do dia e solicitar que os alunos se reunissem em grupos para desenvolvê-la, fizemos uma "mesa redonda" com a turma e propusemos uma discussão (uma avaliação) sobre o que havíamos estudado até aquele momento. Perguntei a eles sobre o que havíamos falado nos quatro encontros anteriores. Deixei livre para que a resposta fosse natural e de acordo com a vontade de cada um, mas alertei que, se ninguém falasse espontaneamente, eu iria fazer a pergunta para os grupos, respeitando a ordem do primeiro ao sexto. Os alunos não apresentaram espontaneidade para falar e preferiram que eu fizesse a condução do diálogo, começando pelo G1. Assim, comecei o diálogo pedindo que algum aluno do Grupo 1 se pronunciasse sobre o que havíamos estudado até aquele momento. Adotei o mesmo procedimento com todos os grupos. A conversa com os alunos durou cerca de 40 minutos e alguns trechos (transcritos a seguir) revelam alguma evolução no desenvolvimento dos alunos com relação à formação do conceito de *função*.

A V G1: Na linha de cima, sempre vai aparecer um número que se liga com apenas um da linha de baixo, e se isso acontecer, é chamado de *função*.

JD: Olha só que legal. Ela realmente está lembrando o que é uma *função*. O que mais o G1 gostaria de falar?

Figura 23: Trecho da fala de aluna do Grupo 1, durante discussão de avaliação das atividades desenvolvidas até aquele momento.
Fonte: Transcrição de áudio feita pelo autor, 2014.

JD: Então, agora, o Grupo 4: Quem do Grupo 4 vai falar o que achou das quatro aulas?

ISAB G4: O que a gente está vendo é sobre conceitos que servem de base para o ano que vem, e muitas coisas que a gente estudou, a gente não se preocupava com os conceitos.

Figura 24: Trecho da fala de aluna do Grupo 4, durante discussão de avaliação das atividades desenvolvidas até aquele momento.
Fonte: Transcrição de áudio feita pelo autor, 2014.

Mais alguém do G4? G5, Quem gostaria de falar?

ISAD G5: O que ficou pra mim é que a gente viu sobre relação, várias relações envolvendo potência, equação e outras coisas.

JD: A Isad falou várias coisas ali, sobre relações, envolvendo potências, equações, dentre outras. Tudo isso a gente viu de uma maneira diferente. O que é, na verdade, equação?

ISAD G5: É uma expressão algébrica.

JD: É uma expressão algébrica. Aliás, nós vimos que têm várias expressões algébricas que vocês já estudaram e que não sabiam que estavam relacionadas com álgebra. E agora, vocês estão vendo que a álgebra está muito mais presente do imaginamos. Então, veja o que ela falou: a equação é uma relação algébrica, mas ela não é *função*. Qual é a diferença entre equação e *função*? As duas são relações algébricas.

ISAB G4: Equação tem igualdade?

JD: A *função* também tem igualdade. Qual é a diferença? Quando vocês resolvem uma equação, o que vocês fazem?

ISAD G5: Descobre o valor desconhecido.

JD: Descobrem um ou dois valores desconhecidos? Como são chamados esses valores?

ISAB G4: Incógnitas.

JD: Isso, incógnitas. A diferença é essa. Equação não tem infinitos valores e são chamados de incógnitas. E na *função* esses valores variam; à medida que um valor varia o outro varia em função dele.

Figura 25: Trecho da fala de alunas dos Grupos 4 e 5, durante discussão de avaliação das atividades desenvolvidas até aquele momento.
Fonte: Transcrição de áudio feita pelo autor, 2014.

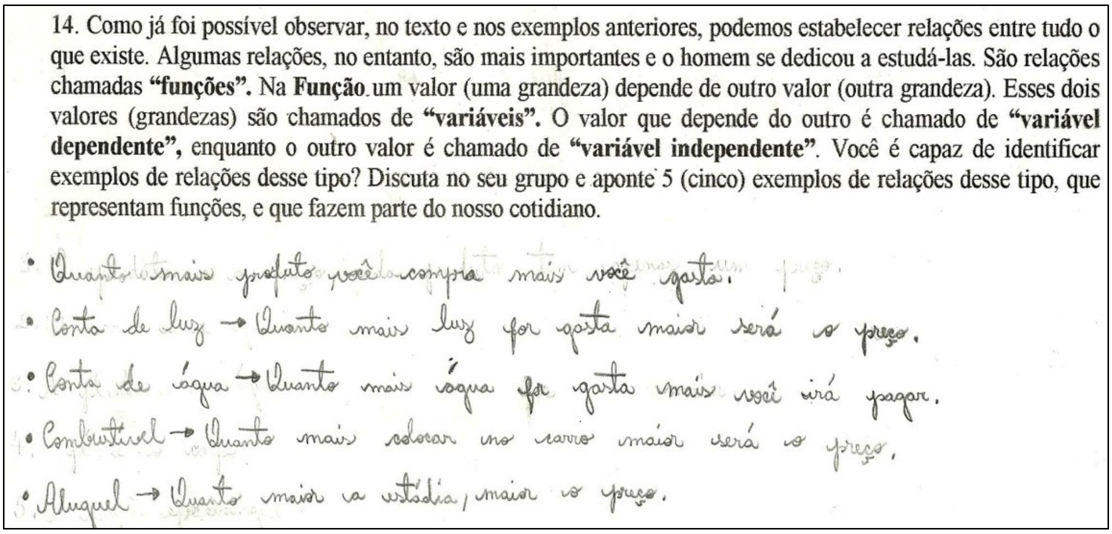
JD: E o G6?

VIN G6: Na natureza, tudo se relaciona e algumas relações são funções.

Figura 26: Trecho da fala de aluno do Grupo 6 durante discussão de avaliação das atividades desenvolvidas até aquele momento.
Fonte: Transcrição de áudio feita pelo autor, 2014.

Após a manifestação de todos os grupos, fizemos algumas perguntas específicas e indagamos como eles assimilaram aquelas questões. Lembramos que o nosso trabalho era focado na participação intensa deles como agentes do processo de aprendizagem e, por isso, nós ainda não havíamos passado nada no quadro para copiar, nem para responder de forma padronizada, como de costume. Perguntamos se eles aprovavam essa maneira de apresentar o conteúdo e as atividades. A maioria levantou a mão, concordando. Falamos que a matemática, assim como uma língua estrangeira, tem alguns termos que devemos decifrar e saber o significado para compreender bem o que representam. A pergunta era: quem se lembra de algum termo ‘técnico’ de matemática que foi utilizado nos quatro encontros que tivemos? Alguns alunos citaram incógnitas; outros responderam variáveis, igualdade, equação, expressões algébricas e *função*. Perguntamos então ao grupo: O que é uma *função*? Imediatamente, uma aluna (A V G1) apressou-se em responder: “É quando nós temos dois conjuntos e cada elemento do conjunto superior se liga com apenas um elemento do conjunto da linha inferior.”. Perguntamos se todos concordavam com a resposta da colega e a maioria respondeu que sim. Mesmo sem uma participação ativa dos alunos nas respostas, foi possível perceber que eles gostaram do momento de discussão. Reafirmamos com eles os principais pontos da discussão: o que é uma *função*; os elementos e termos envolvidos no conceito de *função*; e propusemos o encerramento daquele momento de análise para darmos prosseguimento aos trabalhos.

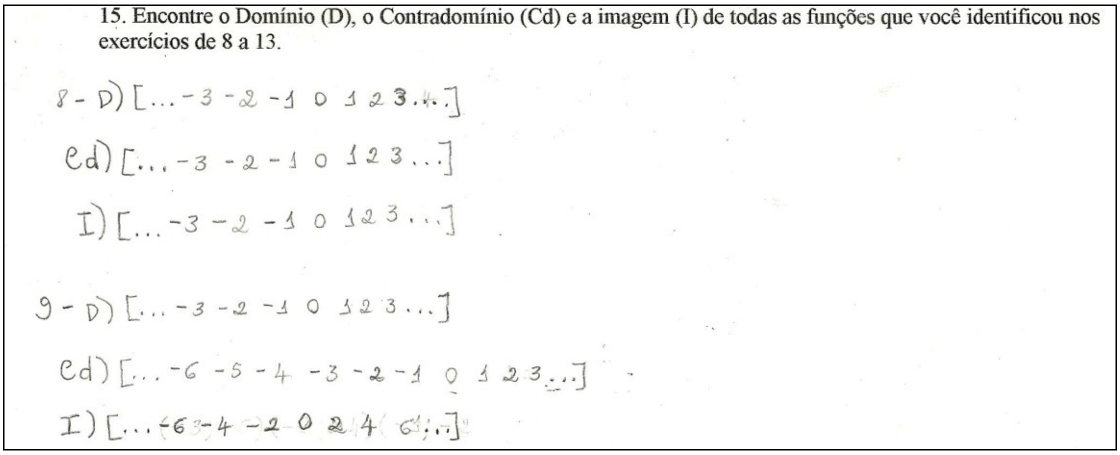
Os alunos se reuniram em grupos, na mesma configuração das aulas anteriores, e a folha de atividades foi entregue aos componentes. Foram repassadas as recomendações gerais e as instruções específicas para aquela atividade. Como se pode observar na folha anterior (Aula 05), foram propostas apenas duas atividades: na primeira, após a leitura de um pequeno texto, recordando o que é *função* e seus principais elementos, os alunos deveriam apontar cinco exemplos de relações que representassem *funções*; e na segunda, após a leitura explicativa do que são os conjuntos domínio, contradomínio e imagem, os alunos deveriam escrever o conjunto domínio (D), contradomínio (Cd) e imagem (I) dos exercícios propostos na aula anterior. Nesse episódio houve muita discussão por parte dos componentes dos grupos, com relação à questão das relações que representariam ou não uma *função*. A aplicação do conceito de ‘relação’ foi muito positiva para a formação do conceito de *função*, pois, conforme Vigotski, um conceito está atrelado a uma rede de outros conceitos. O conceito de *função* está associado a outros conceitos, tais como: o conceito de relação; o conceito de variáveis (dependente e independente); os conceitos de domínio, contradomínio e imagem. O conceito de variável por sua vez está vinculado, ainda, à linguagem algébrica. Dessa forma, o ‘mapa conceitual’ do conceito de *função* vai sendo composto ao longo do experimento, de forma gradativa e ordenada. Se, por um lado, houve muita discussão para encontrar exemplos de relações que representem *funções*, os alunos foram rápidos e responderam de forma satisfatória a questão dos conjuntos domínio (D); contradomínio (Cd) e imagem (I). A seguir, apresentamos algumas respostas dos grupos sobre relações que representam *funções*:



14. Como já foi possível observar, no texto e nos exemplos anteriores, podemos estabelecer relações entre tudo o que existe. Algumas relações, no entanto, são mais importantes e o homem se dedicou a estudá-las. São relações chamadas **"funções"**. Na **Função** um valor (uma grandeza) depende de outro valor (outra grandeza). Esses dois valores (grandezas) são chamados de **"variáveis"**. O valor que depende do outro é chamado de **"variável dependente"**, enquanto o outro valor é chamado de **"variável independente"**. Você é capaz de identificar exemplos de relações desse tipo? Discuta no seu grupo e aponte 5 (cinco) exemplos de relações desse tipo, que representam funções, e que fazem parte do nosso cotidiano.

- Quanto mais produto você compra mais você gasta.
- Conta de luz → Quanto mais luz for gasta maior será o preço.
- Conta de água → Quanto mais água for gasta mais você irá pagar.
- Combustível → Quanto mais colocar no carro maior será o preço.
- Aluguel → Quanto maior a estádia, maior o preço.

Figura 27: Resposta do Grupo 1 à questão de nº 14 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 1.

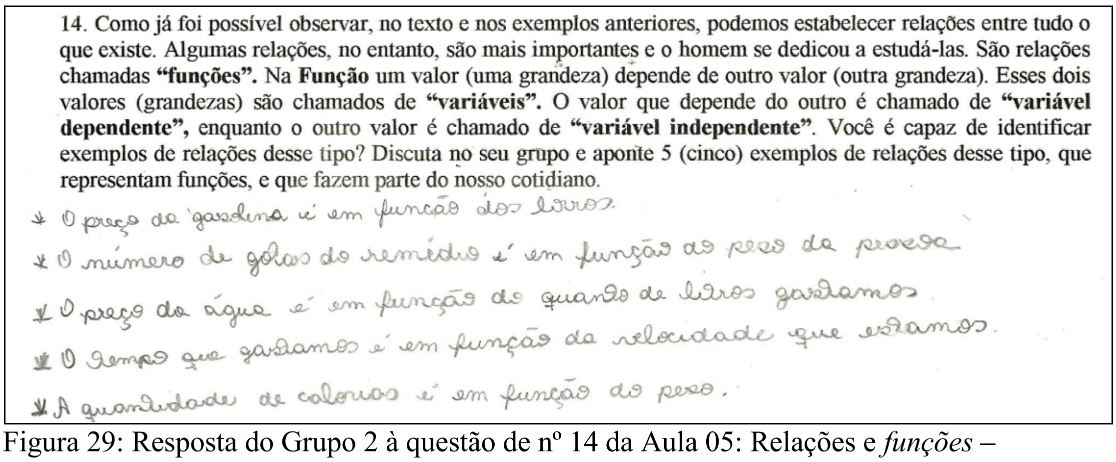


15. Encontre o Domínio (D), o Contradomínio (Cd) e a imagem (I) de todas as funções que você identificou nos exercícios de 8 a 13.

8 - D) [... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ...]
Cd) [... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...]
I) [... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...]

9 - D) [... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...]
Cd) [... -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 ...]
I) [... -6 -4 -2 0 2 4 6 ...]

Figura 28: Resposta do Grupo 1 à questão de nº 15 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 1.



14. Como já foi possível observar, no texto e nos exemplos anteriores, podemos estabelecer relações entre tudo o que existe. Algumas relações, no entanto, são mais importantes e o homem se dedicou a estudá-las. São relações chamadas **"funções"**. Na **Função** um valor (uma grandeza) depende de outro valor (outra grandeza). Esses dois valores (grandezas) são chamados de **"variáveis"**. O valor que depende do outro é chamado de **"variável dependente"**, enquanto o outro valor é chamado de **"variável independente"**. Você é capaz de identificar exemplos de relações desse tipo? Discuta no seu grupo e aponte 5 (cinco) exemplos de relações desse tipo, que representam funções, e que fazem parte do nosso cotidiano.

* O preço da gasolina é em função dos litros.
* O número de gotas do remédio é em função do peso da pessoa
* O preço da água é em função do quanto de litros gastamos
* O tempo que gastamos é em função da velocidade que estamos.
* A quantidade de calorias é em função do peso.

Figura 29: Resposta do Grupo 2 à questão de nº 14 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 2.

15. Encontre o Domínio (D), o Contradomínio (Cd) e a imagem (I) de todas as funções que você identificou nos exercícios de 8 a 13.

8 - D = { ... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 ... }

CD = { ... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 ... }

I = { ... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 ... }

9 - D = { ... -3 -2 -1 0 1 2 3 ... }

CD = { ... -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 ... }

I = { ... -6 -4 -2 1 2 3 6 ... }

11 - D = { ... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 ... }

Cd = { ... -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ... }

I = { 0 1 4 9 16 25 ... }

12 - D = { ... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 ... }

Cd = { ... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 ... }

I = { 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ... }

13 a) D = { ... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ... }

Cd = { ... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 ... }

I = { 0 1 2 3 4 ... }

b) D = { ... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 ... }

Cd = { ... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 ... }

I = { ... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 ... }

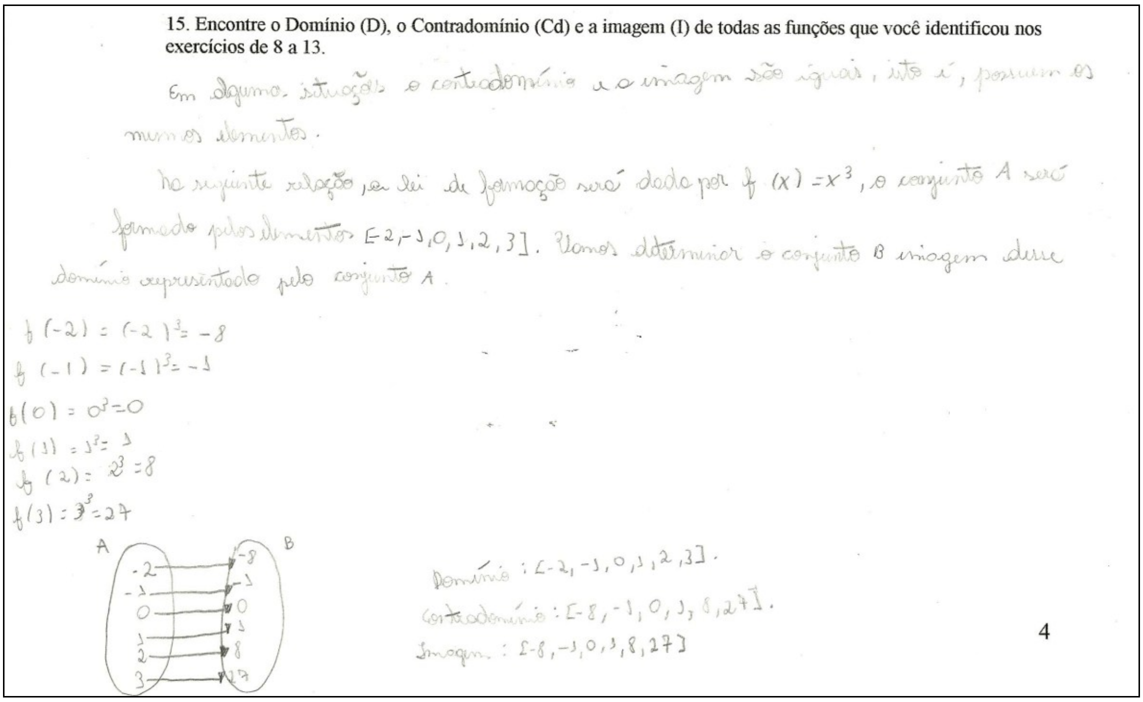
Figura 30: Resposta do Grupo 2 à questão de nº 15 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 2.

14. Como já foi possível observar, no texto e nos exemplos anteriores, podemos estabelecer relações entre tudo o que existe. Algumas relações, no entanto, são mais importantes e o homem se dedicou a estudá-las. São relações chamadas **"funções".** Na **Função** um valor (uma grandeza) depende de outro valor (outra grandeza). Esses dois valores (grandezas) são chamados de **"variáveis".** O valor que depende do outro é chamado de **"variável dependente",** enquanto o outro valor é chamado de **"variável independente".** Você é capaz de identificar exemplos de relações desse tipo? Discuta no seu grupo e aponte 5 (cinco) exemplos de relações desse tipo, que representam funções, e que fazem parte do nosso cotidiano.

Muitas grandezas presentes no nosso dia-a-dia se relacionam de forma especial.

- número de pães que vou comprar, com o preço a pagar.
- número de questões que acertei num teste, com a nota que eu vou tirar.
- Valor do meu salário, com o valor do desconto do INSS.
- medida do contorno do meu terreno, com a quantidade de metros de arame de que preciso para cercá-lo.
- Velocidade média de um automóvel, com o tempo de duração de uma viagem.

Figura 31: Resposta do Grupo 5 à questão de nº 14 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 5.



15. Encontre o Domínio (D), o Contradomínio (Cd) e a imagem (I) de todas as funções que você identificou nos exercícios de 8 a 13.

Em algumas situações o contradomínio e a imagem são iguais, isto é, possuem os mesmos elementos.

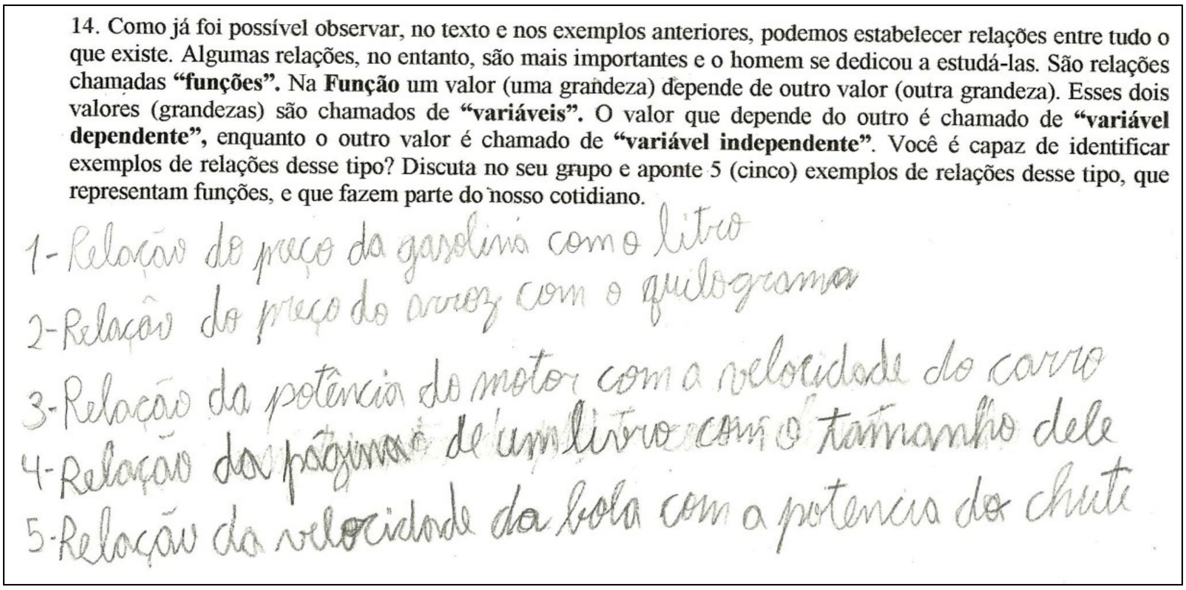
Na seguinte relação, a lei de formação será dado por $f(x) = x^3$, o conjunto A será formado pelos elementos $[-2,-1,0,1,2,3]$. Vamos determinar o conjunto B imagem desse domínio representado pelo conjunto A.

$f(-2) = (-2)^3 = -8$
$f(-1) = (-1)^3 = -1$
$f(0) = 0^3 = 0$
$f(1) = 1^3 = 1$
$f(2) = 2^3 = 8$
$f(3) = 3^3 = 27$

Domínio: $[-2,-1,0,1,2,3]$.
Contradomínio: $[-8,-1,0,1,8,27]$.
Imagem: $[-8,-1,0,1,8,27]$

4

Figura 32: Resposta do Grupo 5 à questão de nº 15 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 5.



14. Como já foi possível observar, no texto e nos exemplos anteriores, podemos estabelecer relações entre tudo o que existe. Algumas relações, no entanto, são mais importantes e o homem se dedicou a estudá-las. São relações chamadas **"funções".** Na **Função** um valor (uma grandeza) depende de outro valor (outra grandeza). Esses dois valores (grandezas) são chamados de **"variáveis".** O valor que depende do outro é chamado de **"variável dependente",** enquanto o outro valor é chamado de **"variável independente".** Você é capaz de identificar exemplos de relações desse tipo? Discuta no seu grupo e aponte 5 (cinco) exemplos de relações desse tipo, que representam funções, e que fazem parte do nosso cotidiano.

1- Relação do preço da gasolina com o litro
2- Relação do preço do arroz com o quilograma
3- Relação da potência do motor com a velocidade do carro
4- Relação das páginas de um livro com o tamanho dele
5- Relação da velocidade da bola com a potencia do chute

Figura 33: Resposta do Grupo 6 à questão de nº 14 da Aula 05: Relações e *funções* – domínio, contradomínio e imagem.
Fonte: Folha de atividades da Aula 05, respondida pelos alunos do Grupo 6.

3.6 Análise dos resultados: Vídeo sobre *funções* e seus elementos

06. Vídeo: "A noção de função" - sobre funções e seus elementos

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **Aula 06** Data: ____/____/2014

Nome: ____ Grupo: ______

Hoje, nós vamos assistir a um vídeo de 18 minutos sobre função. Após o vídeo, cada grupo vai se reunir para responder às questões abaixo. Prestem bastante atenção no vídeo para responder corretamente às questões propostas.

1) Vamos recordar: escreva o que é função e os principais elementos envolvidos numa função.

2) Qual foi o principal assunto do filme?

3) Qual é o significado da palavra "função", de acordo com o dicionário, conforme apresentado no vídeo?

4) Quais as duas grandezas relacionadas na função evidenciada no filme? Qual das duas é independente e qual é dependente?

5) No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função.

6) Preencha a tabela abaixo com 8 (oito) pares ordenados dessa função, tendo como referência a que aparece no filme.

7) De acordo com os preços citados no filme, quanto custaria um armário medindo 2m de altura e 3,4m de largura?

8) De acordo com o vídeo, qual a letra representa os valores do domínio e qual letra representa os valores da imagem de uma função?

9) Estabeleça a lei de formação (a representação algébrica) da função apresentada na tabela acima.

10) Vocês acham que a aula apresentada no vídeo foi importante? Por quê?

Obrigado pela participação.
Pesquisador: José Divino Neves

Quadro 21: Folha de atividade 01 – Aula 06 -Vídeo: "A noção de *função*".
Fonte: O autor, 2014.

<table>
<tr><th colspan="3">AULA 06: Vídeo: “A noção de função” - sobre funções e seus elementos</th></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I – Observar, por meio dos exemplos do vídeo, a inter-relação entre as coisas da natureza.
II – Aplicar, nos exercícios propostos, os conceitos de relação, função, domínio, contradomínio e imagem.
III – Perceber a utilização dos símbolos e notações das funções, para facilitar a representação.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE)</td><td>JD: Está rodando o filme lá no notebook, naquele grupo; se precisar, pode rever.
GA G1: Cadê? Onde está? Eu não estou vendo.
JD: Está ali naquele grupo; se vocês precisarem posso trazer aqui.
LE G1: José Divino; os elementos envolvidos são domínio e imagem?
JD: Esses dois são elementos envolvidos, mas tem mais. No filme ele falou outras coisas.
GA G1: Falou?
LE G1: Falou do remédio; das gotas.
JD: Não; aí são exemplos. Quando você fala de função, o que está relacionado? Os dois conjuntos: domínio e imagem e o que mais?
GA G1: A área e o preço.
JD: Não; isso são exemplos. Como são chamados os elementos que vão variando?
GA G1: Variáveis?
JD: Sim. Então, você tem: domínio, imagem e variáveis. Quantas variáveis?
GA G1: Infinitas?
LE G1: Duas.
GA G1: Duas? Não.
LE G1: Que ela falou, foi.
JD: Que ela falou, foi. Por quê? Uma do domínio e a outra de imagem. Elas vão variando, veja: a área do armário e o preço do armário; o preço em função da área.
JD: Deixa-me ver. Olha, aqui tem uma generalização. Qual é? Generalizar é colocar o geral; a fórmula geral. Qual é a fórmula geral? Se eu colocar ‘x’ m² aqui em cima, quanto eu vou pagar?
GA G1: x².
LE G1: ‘x’ reais.
JD: Não.
GA G1: ‘x’ vezes dois.
JD: Vezes dois? Por quê? Um m² paga quanto?
LE e GA G1: Cento e vinte.
JD: Dois m²?
LE e GA G1: Duzentos e quarenta.
JD: Que é dois vezes...
LE G1: Cento e vinte.
JD: Três m²?
LE G1: Três vezes cento e vinte.
JD: ‘x’ m²?
LE e GA: ‘’x’ vezes cento e vinte.
JD: Certo. Isso se chama generalização. Veja que eu vou aumentando até chegar num valor geral. O que a palavra “genérico” significa?
LE, A V e GA G1: Remédio.
JD: Contém a essência.</td><td>Por meio do vídeo os alunos puderam confirmar algumas das informações que haviam sido apresentadas a eles nas atividades anteriores. Assim, eles puderam constatar, de forma um pouco mais clara e visual, exemplos de função, grandezas, relação de dependência, domínio e imagem.</td></tr>
</table>

	GA G1: Contém a mesma coisa só que tem outro nome. JD: A generalização é isso; contém a essência. Se você escrever “x.120” você está representando qualquer um valor para ‘x’.	
Desenvolvimento da Motivação e a Participação dos Alunos (DMPA)	LE G1: Não, eu já prestei atenção no filme. A V G1: Qual o principal assunto do filme? *Função*. GA G1: *Função*; anota aí. LE G1: Conceito de função. GA G1: Espera aí; primeiro: vamos recordar. O que é *função*? Quais os elementos que estão envolvidos...? A *função* é a relação entre duas ou mais grandezas. LE G1: É a relação entre duas grandezas. GA G1: E os elementos envolvidos são domínio e imagem.	
Formação do Conceito (FC)	LE G1: Põe aí: domínio, imagem e duas variáveis. O principal assunto foi o conceito de *função*? THA G1: Foi; eu acho que foi *função*. GA G1: Tá. *Função* e suas grandezas. LE G1: É o conceito, moço. GA G1: Não é só o conceito; é tudo que tem na *função*. LE G1: Não; é o conceito de *função*. GA G1: Não; é tudo. LE G1: Tudo é o conceito, cara. GA G1: Não é não. Sabe por quê? Porque fórmula não é conceito. A V G1: Espera aí que eu anotei. Correspondência de um ou mais conjuntos. GA G1: Ah. Só correspondência entre dois ou mais conjuntos; está ótimo. E quais as duas grandezas relacionadas à *função* evidenciada no filme? Qual das duas é a independente e qual é a dependente? A V G1: É aquele negócio do preço? GA G1: É. É o domínio e a imagem. O domínio é independente e a imagem é dependente. GA G1: Qual a letra representa o domínio e qual a letra representa a imagem da *função*? LE e GA: Era A e P. A V: Era ‘x’ e ‘y’. GA: Os dois. LE: Podia ser qualquer um. Vamos fazer do A e P que é mais fácil. GA: A e P é melhor: Área e produto. LE: Então; área e ‘perímetro’. GA: *Função* de A em P. GA G1: ‘x’ vezes 120. JD: Então, você pode escrever: y = x.120. Vocês se lembram que ela falou que a imagem era representada por ‘y’ e o domínio, de ‘x’? Vocês podem falar que a imagem ‘y’ vale ... (o ‘de baixo’ é igual ao ‘de cima’ vezes 120). GA G1: Função de ‘x’ é igual a ‘y’. JD: Ou você coloca ‘y’ ou coloca *função* de ‘x’, tanto faz. GA G1: Eu acho melhor *função* de ‘x’. JD: Ou vocês colocam y = ... ou f(x) = ...; o valor de baixo está em função do valor de cima. Se você tem um armário medindo ‘x’, quanto ele vai custar? A V G1: ‘x vezes 120? JD: Isso. LE G1: GA, põe aí x = x.120? A V G1: Não, ele falou *função* de x ou y. GA G1: *Função* de x é igual a x vezes 120.	O diálogo dos alunos indica que eles conseguiram assimilar a essência do conceito de *função* como uma relação entre duas grandezas.

Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	LE G1: Eu não entendi a cinco. GA e A V: Eu também, não. GA G1: No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função. LE G1: Era de R$ 120, 00 em R$ 120,00 o metro quadrado do armário, não é? GA G1: Não precisa ser exatamente o que está no filme. É só a gente pegar: 1m²; 2m²; 3m²... YA G1: Entendi. No caso exemplificado..., identifique e represente os possíveis valores para domínio e imagem da função. Qual a *função*? LE G1: Vai ter que por 1m²; 2m²; 3m²...? GA G1: É. Aí vai pondo: um, dois, três, quatro... e, agora, o preço, coloca R$. Coloca 1m² → R$ 120,00. LE G1: Então vai aumentando: R$ 240,00 aqui. GA G1: Então, tem que multiplicar por dois. Certo? Cento e vinte vezes dois é 240. LE G1: E quanto é 5 m²? GA G1: 25. Mentira; desculpa. Dá mil e alguma coisa. LE G1: Que mil? GA G1: Dá quanto, então? LE G1: 600. GA G1: Gente, o que eu falei para fazer? Metros quadrados em cima e preço em baixo. Coloca aqui. Pois, se está pedindo para fazer oito pares. A V G1: Eu acho que é assim: tem que fazer 2 x 3,6, depois faz vezes 120. GA G1: Por que vezes 3,4? Tem que colocar 2². A V G1: Por quê? GA G1: Porque é a fórmula. LE G1: Tem que fazer o resultado desse aqui (7). GA G1: Quanto dá 2 x 3,4? 6,8. LE G1: Deu 6,8. GA G1: Agora, multiplica. LE G1: Quanto custaria? A V G1: Agora, vezes 120. GA G1: É. Quanto dá, A V? A V G1: Espere aí, eu vou fazer. GA G1: Dá 716. Eu acho que não é isso não, gente. Coloquei errado. LE G1: A gente vai voltar na cinco? GA G1: É só a gente fazer; coloca aí. Domínio: 1, 2, 3, 4, ... em baixo, a gente coloca: 2, 4, 6, 8, ... A V G1: Como assim, GA? O que você está falando? GA G1: Multiplica por dois. A V G1: O preço? Por quê? GA G1: Porque ele que um exemplo; não precisa ser o preço; é só relacionar com os números que estão em cima. GA G1: A gente aprendeu uma coisa importante: a fórmula da *função*. LE G1: Então: "Sim, pois aprendemos a fórmula da *função*". GA G1: A gente nunca estudou fórmula da *função*. Eu acho que terminamos, não é? LE G1: Terminamos.	As discussões entre os componentes dos grupos nos revelam a participação de todos na construção das respostas. Isso confirma a importância do papel de cada um nas decisões do grupo.

Quadro 22: Síntese da análise da Aula 06. Vídeo: "A noção de *função*" – sobre *função* e seus elementos.
Fonte: O autor, 2014.

Segundo Caraça (1984), o conceito de *função* é de fundamental importância na aprendizagem de matemática. O uso de *funções* pode ser verificado nos mais variados campos da matemática, bem como em várias situações do cotidiano das pessoas. Nos anos finais do ensino fundamental os aspectos da álgebra ligados a generalizações e relações entre grandezas devem ser intensificados de modo a possibilitar a exploração do conceito de *função*. Quando ensinamos algum conteúdo de matemática é importante estabelecer suas relações e aplicações pela humanidade, pois a matemática é uma criação humana para satisfazer seus interesses e necessidades. A matemática é um produto da atividade humana, como nos informa Moura:

> Portanto, trabalhar com a unidade lógico-histórica no ensino de matemática constitui-se um modo de desenvolver os conhecimentos matemáticos considerando o seu processo de produção, ou seja, eles são entendidos como produto da atividade humana diante das necessidades objetivas enfrentadas historicamente. (MOURA et al., 2010, p. 136).

Moura nos esclarece, ainda, que educar alguém "é possibilitar que este desenvolva a capacidade de lidar com informações, [...] é a capacidade de resolver problemas não só do ponto de vista matemático, mas também do ponto de vista da construção social do conhecimento humano." (MOURA, 1996, p. 34).

Com foco nesse pensamento, a atividade do 6º encontro com os alunos versou sobre a apresentação do vídeo: "A noção de *função*", com aproximadamente 15 minutos e que apresenta uma aplicação de *função* com fato do nosso cotidiano. O vídeo enfatiza a noção de relação, grandezas, variáveis (dependente e independente), conjunto domínio e conjunto imagem. A linguagem é adequada e de fácil compreensão pelos alunos e, por isso, constituiu-se em um aliado importante na formação do conceito de *função*. Os alunos, então, foram convidados a se dirigir até o anfiteatro da escola, onde seria apresentado o vídeo com o recurso de multimídia da instituição. O professor/pesquisador orientou os alunos para que prestassem bastante atenção ao filme, pois, em seguida, teriam que responder a uma folha de atividades. Durante a apresentação do vídeo, percebemos que a maioria dos alunos demonstrou interesse e permaneceu atenta. No entanto, três alunos apresentaram atitudes incompatíveis, como conversas e risos. O professor/pesquisador conversou com eles e pediu que assentassem na primeira fila para acompanhar o filme. Assim que terminou a apresentação do vídeo, os alunos retornaram à sala de aula e se organizaram em grupos para a realização da atividade proposta. Seguem as fotos dos alunos assistindo ao filme.


Figuras 34 e 35: Fotos dos alunos assistindo ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: O autor, 2014.

Já reunidos em grupos, o professor/pesquisador distribuiu as folhas de atividades para os grupos com as devidas orientações sobre o que fazer.

1) Vamos recordar: escreva o que é função e os principais elementos envolvidos numa função.

A função é a relação entre duas ou mais grandezas. Domínio, imagem e duas variáveis.

Figura 36: Resposta do Grupo 1 à primeira questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 1.

4) Quais as duas grandezas relacionadas na função evidenciada no filme? Qual das duas é independente e qual é dependente?

Domínio (independente) e Imagem (dependente).

Figura 37: Resposta do Grupo 1 à quarta questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 1.

5) No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função.

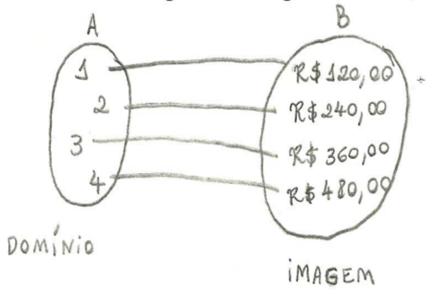


Figura 38: Resposta do Grupo 1 à quinta questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 1.

8) De acordo com o vídeo, qual a letra representa os valores do domínio e qual letra representa os valores da imagem de uma função?

Domínio = X

Imagem = Y

Figura 39: Resposta do Grupo 1 à oitava questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 1.

9) Estabeleça a lei de formação (a representação algébrica) da função apresentada na tabela acima.

$F(y) = X . 120$

Figura 40: Resposta do Grupo 1 à nona questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 1.

10) Vocês acham que a aula apresentada no vídeo foi importante? Por quê?

Sim, pois aprendemos a fórmula da função.

Figura 41: Resposta do Grupo 1 à décima questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 1.

1) Vamos recordar: escreva o que é função e os principais elementos envolvidos numa função.

Função é a relação entre duas grandezas, domínio e imagem.

Figura 42: Resposta do Grupo 2 à primeira questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 2.

3) Qual é o significado da palavra “função”, de acordo com o dicionário, conforme apresentado no vídeo?

Função em matemática é a relação entre duas grandezas.

Figura 43: Resposta do Grupo 2 à terceira questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 2.

5) No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função.

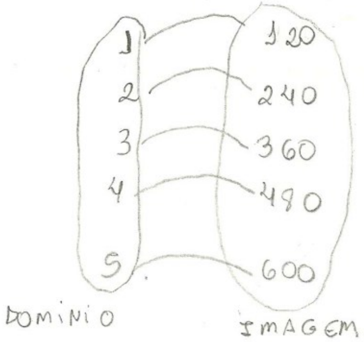


Figura 44: Resposta do Grupo 2 à quinta questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 2.

8) De acordo com o vídeo, qual a letra representa os valores do domínio e qual letra representa os valores da imagem de uma função?

Domínio - A
Imagem - B

Figura 45: Resposta do Grupo 2 à oitava questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 2.

10) Vocês acham que a aula apresentada no vídeo foi importante? Por quê?

Sim, porque o vídeo explicou muito sobre função, com isso podemos aprender um pouco melhor como ou seja o que é uma função.

Figura 46: Resposta do Grupo 2 à décima questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 2.

1) Vamos recordar: escreva o que é função e os principais elementos envolvidos numa função.

A função estabelece uma relação entre duas grandezas

Figura 47: Resposta do Grupo 4 à primeira questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

3) Qual é o significado da palavra "função", de acordo com o dicionário, conforme apresentado no vídeo?

Uma correspondência entre dois ou mais conjuntos

Figura 48: Resposta do Grupo 4 à terceira questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

4) Quais as duas grandezas relacionadas na função evidenciada no filme? Qual das duas é independente e qual é dependente?

Dominio e Imagem,

Figura 49: Resposta do Grupo 4 à quarta questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

5) No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função.

Dominio	Imagem
$1 m^2$	120
$2 m^2$	240
$3 m^2$	360

Figura 50: Resposta do Grupo 4 à quinta questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

8) De acordo com o vídeo, qual a letra representa os valores do domínio e qual letra representa os valores da imagem de uma função?

A B

Figura 51: Resposta do Grupo 4 à oitava questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

9) Estabeleça a lei de formação (a representação algébrica) da função apresentada na tabela acima.

$Y = X \cdot 120$

Figura 52: Resposta do Grupo 4 à nona questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

10) Vocês acham que a aula apresentada no vídeo foi importante? Por quê?

Que amplio o conhecimento sobre função

Figura 53: Resposta do Grupo 4 à décima questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 4.

1) Vamos recordar: escreva o que é função e os principais elementos envolvidos numa função.

É a relação entre duas grandezas. Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se função de A em B, qualquer relação de A e B que associa a cada elemento de A um único elemento de B, ou seja, a função de A em B é uma relação entre duas grandezas variáveis.

Figura 54: Resposta do Grupo 5 à primeira questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

3) Qual é o significado da palavra "função", de acordo com o dicionário, conforme apresentado no vídeo?

Função é quando uma coisa muda porque outra muda também, ou seja, uma correspondência entre dois ou mais conjuntos.

Figura 55: Resposta do Grupo 5 à terceira questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

4) Quais as duas grandezas relacionadas na função evidenciada no filme? Qual das duas é independente e qual é dependente?

Domínio é independente e imagem é dependente.

Figura 56: Resposta do Grupo 5 à quarta questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

5) No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função.

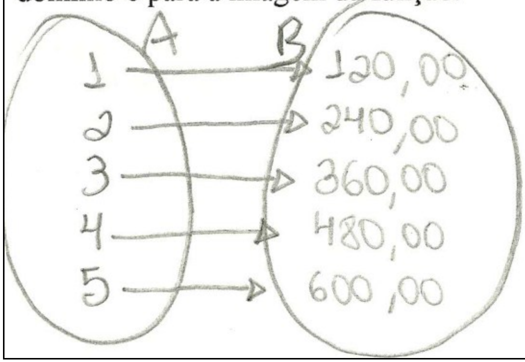


Figura 57: Resposta do Grupo 5 à quinta questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

8) De acordo com o vídeo, qual a letra representa os valores do domínio e qual letra representa os valores da imagem de uma função?

domínio = x

imagem = y

Figura 58: Resposta do Grupo 5 à oitava questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

9) Estabeleça a lei de formação (a representação algébrica) da função apresentada na tabela acima.

$y = x . 120$

Figura 59: Resposta do Grupo 5 à nona questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

10) Vocês acham que a aula apresentada no vídeo foi importante? Por quê?

Sim. Porque reforçou o que nos foi ensinado nas aulas anteriores, e além disso aprendemos coisas novas.

Figura 60: Resposta do Grupo 5 à décima questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 5.

1) Vamos recordar: escreva o que é função e os principais elementos envolvidos numa função.

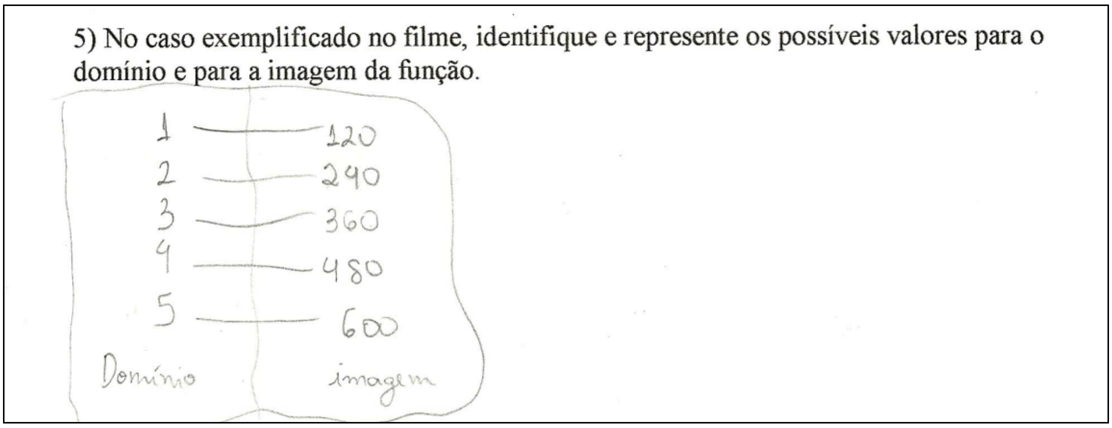
Função é a relação de duas grandezas que se ligam com exatamente um número.

Figura 61: Resposta do Grupo 6 à primeira questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 6.

3) Qual é o significado da palavra "função", de acordo com o dicionário, conforme apresentado no vídeo?

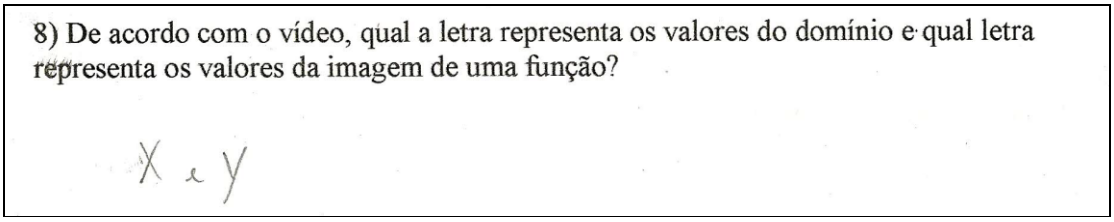
Uma correspondência entre dois ou mais conjuntos.

Figura 62: Resposta do Grupo 6 à terceira questão da atividade referente ao vídeo "A noção de *função*".
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 6.



5) No caso exemplificado no filme, identifique e represente os possíveis valores para o domínio e para a imagem da função.

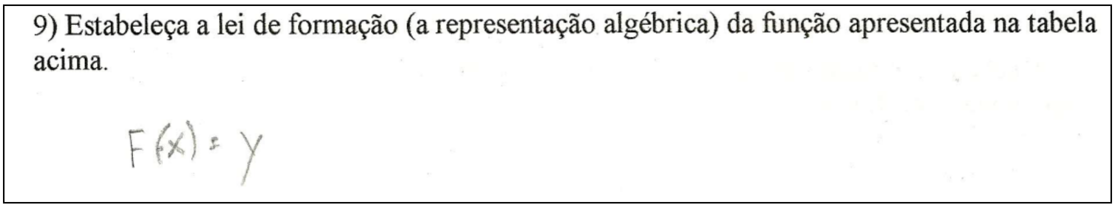
Figura 63: Resposta do Grupo 6 à quinta questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 6.



8) De acordo com o vídeo, qual a letra representa os valores do domínio e qual letra representa os valores da imagem de uma função?

X e Y

Figura 64: Resposta do Grupo 6 à oitava questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 6.



9) Estabeleça a lei de formação (a representação algébrica) da função apresentada na tabela acima.

F(x) = y

Figura 65: Resposta do Grupo 6 à nona questão da atividade referente ao vídeo “A noção de *função*”.
Fonte: Folha de atividades da Aula 06, respondida pelos alunos do Grupo 6.

A compreensão e o pensamento dos alunos quanto aos elementos do conceito de *função* ainda se apresentam como complexos e difusos. Percebe-se que os mesmos ainda se atrapalham um pouco com a representação de *função* e com o significado da expressão: y = f(x). Outra questão que ficou evidente foi com relação às grandezas envolvidas na questão abordada pelo vídeo.

Os alunos apontaram as duas grandezas como sendo domínio (D) e imagem (I). No entanto, estabeleceram de forma correta a relação ente os dois conjuntos (domínio e imagem) e indicaram qual é a variável dependente e qual é a independente.

Outra questão que ficou evidente nas respostas dos alunos foi a proporcionalidade entendida por eles no preenchimento do quadro com os pares ordenados da *função* em questão.

O vídeo colaborou também com a notação e representação dos elementos da *função*, o que foi bem assimilado pelos alunos, pois todos os grupos responderam de forma correta qual a letra que representa o domínio (variável independente) e a imagem (variável dependente).

A generalização e abstração da lei de formação foi outro fator bem assimilado pelos alunos. Dos seis grupos, apenas um não chegou à resposta correta, ou seja, a representação algébrica ou lei de formação: $y = 120.x$.

Quanto à aula em forma de vídeo, todos os grupos acharam importante, pois “aprenderam a fórmula da *função*”; aprenderam “um pouco mais sobre o que é uma *função*”; “aprofundou um pouco mais o conhecimento sobre *função*”; “reforçou o que havia sido ensinado nas aulas anteriores”; “deu uma base melhor sobre o que é *função*” e “deu mais informações sobre o que é *função*”.

Após analisar as respostas sobre essa atividade, esclarecemos os alunos sobre grandezas e também com relação à representação de *função*.

De um modo geral, entendemos que o episódio do 6º encontro com os alunos foi bastante interessante e proveitoso. O poder da comunicação fica evidente no vídeo, quando artistas diferentes do professor e bem preparados incorporam personagens atrativos para explicar aos alunos os significados matemáticos relativos às *funções*, papel este que o professor nem sempre consegue exercer de forma eficiente. Assim, conforme nos enfatiza Moura (2010), a qualidade da atividade de ensino ocorre pela necessidade de apropriação da cultura envolvendo bens culturais, tais como linguagem, objetos, ferramenta e modo de ação.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE ENSINO: A *FUNÇÃO* AFIM E A *FUNÇÃO* QUADRÁTICA

4.1 Análise dos resultados: Generalizações e *funções*

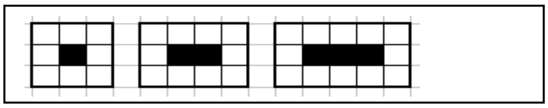
Na primeira parte das atividades com os alunos: "Relações e *funções* – o conceito de *função*", o foco eram as questões das relações, da fluência, da interdependência, do campo de variação, que são os primeiros nexos do conceito de *função*. Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014, p.65), "Os nexos conceituais são 'elos' que podem 'ligar' os conceitos que historicamente foram construídos pelas diversas civilizações.". Os autores afirmam que eles "[...] podem auxiliar os estudantes e professores [...] na compreensão da relação existente entre movimento da vida e pensamento algébrico."

Na segunda e terceira parte "*Funções* e expressões algébricas – *função* afim e *função* quadrática" e "*Funções* e expressões gráficas – *função* afim e *função* quadrática", foram propostas atividades relacionadas com a aplicação daqueles conceitos anteriores. No sétimo encontro com os alunos foi proposta uma atividade aplicando as noções de relações, variável, dependência, domínio e imagem, já evidenciadas nos encontros anteriores. Como de costume, os alunos receberam a folha de atividades e, anexa, uma folha de papel quadriculado onde deveriam representar, por meio de desenhos, a quantidade de azulejos brancos em relação à quantidade de azulejos pretos, com estes variando de um a dez. Após representar todas as sequências eles deveriam responder às questões, preencher o quadro, encontrar a regra que estabelecia a quantidade de azulejos brancos em relação à pretos, o total de azulejos, o domínio e a imagem em cada caso.

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **Aula 07** Data: ____/____/2014

Nome: ____ Grupo: ______

07. A**zulejos e funções**. Um azulejista adota, como estratégia de decoração, assentar os azulejos pretos contornados por brancos, conforme os exemplos na figura a seguir.



Com base na figura, desenvolva as atividades a seguir:

a) Faça, na folha de papel quadriculado (no verso), os desenhos - seguindo o padrão - de 1 até 10 azulejos pretos.

b) Quantos azulejos brancos são necessários, se o número de azulejos pretos enfileirados for 20? E se fosse 25?
E se fosse um número representado por ‘x’?
R.:____________; _______________; _______________.

c) Se ele assentou um total de 81 azulejos, quantos são os azulejos pretos enfileirados? E se ele assentou um total de 102 azulejos, quantos são os pretos?
R.:____________; _____________.

d) Preencha a tabela abaixo relacionando as quantidades os azulejos pretos (P), brancos (B) e total de azulejos (T). Estabeleça 15 variações para (P).

e) A relação entre o número de azulejos brancos e pretos representa uma função? Por quê? R.:

f) Escreva uma regra (fórmula) que relaciona o número de azulejos brancos (B) em função do número de azulejos pretos (P). Lembre-se de que temos dois valores variáveis: um independente e o outro que varia em função dele (dependente). R.:_____________________; _____________________.

g) Escreva uma regra (fórmula) que relaciona o número total de azulejos (T) em função do número de azulejos pretos (P). Lembre-se de que temos dois valores variáveis: um independente e o outro que varia em função dele (dependente). R.:________________________; ________________________.

h) Escreva o domínio e a imagem dessas funções.
R.:

i) As funções obtidas acima são afim ou quadrática? Por quê?
R.:

Quadro 23: Generalizações e *funções*.
Fonte: O autor, 2014.

Essa atividade foi bastante interessante porque nos possibilitou perceber que os alunos fizeram os cálculos aritméticos com certa facilidade e, com raras exceções, logo conseguiram preencher corretamente o quadro proposto na letra ‘d’ do exercício. Responderam com facilidade, também, as letras ‘h’ e ‘i’ referentes ao domínio, à imagem e à classificação das *funções* em “afim” ou “quadrática”. A questão mais difícil de ser respondida foi aquela referente à regra geral, a expressão algébrica que relacionava os azulejos pretos com os brancos. Praticamente todos os grupos chegaram à resposta correta, mas com muita discussão, troca de informações e mediação por parte do pesquisador e o auxiliar de pesquisa. Nesse caso, conforme Sousa, Panossian e Cedro (2014), o problema está relacionado com as "dificuldades para interpretar a letra quando aparece acompanhada de um coeficiente ou expoente (por exemplo, 2m ou m^2).". Os alunos sabiam expressar verbalmente a relação "o dobro mais seis", mas não conseguiam expressá-la algebricamente.

<table>
<tr><td colspan="3">AULA 07: Generalizações e funções</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I – Abstrair, a partir da construção na folha quadriculada, a relação existente entre os azulejos pretos e brancos.
II – Generalizar, a partir do preenchimento da tabela e da construção na folha quadriculada, a expressão algébrica que relaciona os azulejos brancos e os pretos.
III - Aplicar os conceitos de variável dependente e variável independente na expressão algébrica.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições objetivas da Atividade de Estudo (COAE)</td><td>A L G1: É muito difícil, isso aqui.
GA G1: Nossa, você nem começou a fazer.
A L G1: Então, lê aqui.
GA G1 Eu já li - começou a ler alto - Um azulejista...
LE G1: Leia baixo, leia para você.
A V G1: O que é para fazer?
LE G1: Se você ler... ‘se a senhora lesse’, entenderia.
GA G1: Faça numa folha de papel quadriculado, seguindo o modelo, os desenhos até 10 azulejos pretos. Você faz... um, pintou de preto, dois...
A L G1: Até chegar em 10.
A V G1: É fácil isso.
GA G1: Eu vou fazer com canetinha; vai ficar legal.
JD: Vai desenhando e prestando atenção no retângulo. O que é que acontece com os azulejos brancos quando se aumentam os pretos de um em um? Como é que os brancos aumentam em função dos pretos?
JD: E aí? Terminaram de descobrir?
GA: Eu descobri mais ou menos.
JD: Qual é a regra?
GA G1: Sempre vai aumentar dois.
JD: Por quê?
GA G1: Aqui. Eu tô falando dos azulejos pretos: um, dois, três. ...os brancos: oito, 10, 12... cada vez aumenta dois.
JD: Você não concluiu que tinha um valor fixo?
GA G1: Sim; três.
JD: Não. Três de cada lado. Então são seis.
GA G1: É.
JD: Agora, o que é que está mudando nos azulejos brancos em relação aos pretos? Aqui tem um preto, seis brancos fixos e quantos outros brancos?
GA e A L G1: Dois.
JD: Aqui tem dois pretos e quantos brancos?
GA G1: Quatro.
JD: E três pretos?
GA G1: Seis.
JD: Como está aumentando?
GA G1: Duas vezes (dobro).
LE G1: Aqui a gente tem que fazer assim: você tem 20 pretos; você tira seis dos lados. Fica 20 menos seis é igual a 14; multiplica por dois, dá 28. Eu acho que é assim. Vinte e cinco menos seis dá 19; vezes dois dão “quarenta menos dois”, 38.
A L G1: José Divino, na letra ‘b’ tem que subtrair seis, não tem?
JD: Veja: o que você precisa fazer? Vinte pretos. A regra é o dobro mais seis. Se tiver 20 pretos, tem o dobro mais seis ‘brancos’.
YA G1: Mais seis?
JD: Sim; vocês não concluíram que são seis azulejos fixos? Então, é só dobrar o número de pretos e somar</td><td>Nessa categoria, a fala dos alunos deixa evidente a preocupação de alguns com as dificuldades apresentadas na atividade, mas, por outro lado, demonstra que a interação e a discussão entre os componentes dos grupos direcionam e amenizam a questão inicial de ‘dificuldade’. As condições objetivas da atividade facilitam o seu desenvolvimento por parte dos alunos.</td></tr>
</table>

	seis. GA: Você entendeu?	
Desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos (DMPA)	A L G1: Tem que ir de um em um. GA G1: Até chegar no dez. LE G1: Nós vamos colorir isso aqui tudo, você vai ver. A L G1: Se vocês perceberem, para cada dois vai ficar quatro. GA G1: Como assim, para cada dois? A L G1: Faz aí, você faz dois pretos e o 'quadrado' em volta; se você fizer três, vai ficar seis. É por isso que vai a dois (*provavelmente ela quis dizer 'elevado a dois'*). GA G1: Tá errado, porque se eleva um ao quadrado vai ficar um; não vai ficar dois. GA G1: Uma coisa que eu percebi é que sempre vai juntar com um quadradinho de cinco. A L G1: Como assim? JD: O que vocês descobriram até agora? GA G1: Eu descobri que o de baixo vai 'coisar' com o de cima. JD: O que é "coisar"? GA G1: Juntar. JD: Mas como é que estão se juntando? Como é que estão aumentando? GA G1: Como assim? JD: Você tem achar uma lei que esclareça como os azulejos aumentam. Você vai responder com base nessa lei. GA G1: Ah, tá. JD: Alguns alunos já concluíram que tem uma parte que é fixa (não se altera); qual é essa parte? GA G1: É a parte do lado que sempre vai ficar três. Essa parte da largura sempre vai ficar três. JD: Três? Só três? GA G1: É. JD: Sempre vai ficar três de um lado. E do outro? GA G1: Também. JD: Então, é seis? Essa parte é fixa em todos os desenhos; ela não varia. Então, agora é só vocês observarem a variação dos outros brancos em função da variação dos pretos. A L G1: Não entendi nada. GA G1: Sempre vai ter uma parte fixa. YA G1: Que parte é essa? GA G1: É a do três, aqui. Vai ficar três dos lados do retângulo. A L G1: É mais difícil do que pensa. LE G1: A V, veja a letra 'c'. Qual é do '102'? A V G1: Aí está somando seis, não é? YA G1: Como é que é a 'd', LE? LE G1: Você vai colocar (P – preto), (B – branco) e (T – total). Aí você vem aqui e conta: quantos pretos têm? Quantos brancos? E o total. Soma todos. YA G1: Até chegar no quinze? LE G1: É. A V: Soma esse com esse. Vai somar os pretos com os brancos. YA G1: Vai aumentando de dois, não é? E, aqui de três. A V G1: É verdade; sobe de três. Aqui dá 24, mais seis	Apesar das dificuldades, pode-se observar que o grupo mantém a motivação e os alunos continuam participando das discussões com questionamentos, troca de informações, esclarecimentos e sugestões.

	é 30 mais três é 33. A L G1: É até o 15? A V G1: Você põe: P, B, T. Aqui vai dar dois a mais e aqui três. Aqui de dois em dois e aqui de três em três. A V G1: Então, no final vai dar 15, 36 e 51. GA G1: Eu não estou entendendo o que você está fazendo. A V G1: É 51. No B aumenta três; vai de três em três. YA G1: Por que deu 15 e 51? A V G1: 15 pretos, 36 brancos e o total, 51. GA G1: Que legal: aqui vai de um em um; aqui, de dois em dois; e aqui, de três em três. A L G1: Aqui vai ser cinco e 32? A V G1: Por que que aqui deu 25? GA G1: Deu 25. Já acabei. Agora é a 'e'.	
Formação do conceito (FC)	GA G1: A relação entre o número de azulejos brancos e pretos representa uma *função*? Por quê? Ah, porque cada quantidade de azulejos pretos está relacionada com determinado número de azulejos brancos. Cada quantidade de azulejos pretos tem relação com uma quantidade de azulejos brancos. VINÍCIUS: Sabe aquele exercício que vocês fizeram sobre exemplos de *funções*: a conta de luz aumenta de acordo com o consumo? Nesse caso aqui, quem está aumentando? GA G1: O azulejo preto. O azulejo branco está aumentando de acordo com o azulejo preto. VINÍCIUS: Então, é o branco é função do preto. Entendeu? GA G1: Certo. VINÍCIUS: Você pensa assim: os azulejos brancos são meio que *função* dos pretos. Os dois aumentam, mas a regra é que o branco aumenta em *função* do preto. GA G1: Escreva uma regra que relaciona o número de azulejos brancos em *função* do número de azulejos pretos. Temos dois valores envolvidos: um independente e o outro que varia em função dele (dependente). Então, coloca-se: T..., entre parênteses: 20 mais... não, espera aí. LE G1: Escreva o domínio e a imagem. O branco e o preto. O branco pelo preto. GA G1: Quando você fala o branco pelo preto, você quer dizer: o branco é dependente e o preto, independente? YA G1: Espera aí, como é que é? Como assim? GA G1: Quando a gente fala 'pelo' é porque depende. YA G1: É branco e preto? Domínio é preto e imagem é branco? A L G1: Gente, os azulejos brancos aumentam em função dos azulejos pretos. JD: Vejam aí, a regra está errada. Você pôs aqui B + P igual a T. Mas não foi isso que pediu. GA G1: Não, mas o Vinícius já nos ajudou. Veja aqui. JD: Ah, tá certo: T = 3P + 6. Ok. Agora vejam aqui: domínio; olha, podem colocar esses valores aqui. Você tem duas regras: faça uma imagem para cada. G G1A: Olha; então, lá na letra 'h' vai ficar: D é igual a... JD: Isso. Abre chaves e coloca os valores. GA G1: Vai colocar todos? Pode pôr reticências?	O diálogo dos alunos no grupo nos permite perceber que os nexos conceituais estão sendo desenvolvidos: relação, dependência, domínio e imagem.

	JD: Claro. Coloca aí: 1, 2, 3, alguns e depois coloca reticências. Na imagem B, qual é o primeiro valor? São esses números que vocês colocaram na segunda linha. Na segunda imagem T, segue do mesmo modo. YA G1: Como é? A L G1: Domínio e imagem. O domínio é 1, 2, 3, reticências; a imagem de B é 8, 10, 12, reticências. YA G1: Tem duas imagens, esse aí? A L G1: Tem.	
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	YA G1: O que é isso? Olha a pergunta da letra 'b'. A L G1: A gente tem de descobrir o que acontece. GA G1: Sempre é o dobro do número. YA G1: Não. Vai aumentando de um em um. GA G1: Não. Sempre é o dobro do número. Ó, duas vezes dois é 4; três vezes dois é 6, entendeu? Quatro vezes dois é 8. YA G1: Não. Sempre vai mais dois. GA G1: Gente! Sempre vai mais dois? Ah. Eu não vou discutir com você. YA G1: Você está discutindo com todo mundo, hoje. GA G1: Eu? Desculpe-me. A L G1: Aqui está errado. Você tem que multiplicar por dois e somar seis. LE G1: Vai dar quarenta e seis e cinquenta e seis? A L G1: É, 46; 56 e duas vezes 'x' mais seis. LE G1: Como que é a 'd'? A L G1: Espera aí, só um minutinho. Aqui você vai pôr igual está aqui. É 46; 56 e duas vezes 'x' mais seis. A V G1: É o dobro de 20 mais seis? YA G1: É elevado a dois ou duas vezes? GA G1: É elevado a dois. Se for do 2º grau, é elevado a dois. YA G1: Você já somou mais seis? A V G1: Vai ser 'x' elevado a dois ou duas vezes 'x'? GA G1: Vai ser 'x' elevado a dois. YA G1: Mais seis. GA G1: "Caramba", mano. Oitenta e um azulejos; é dividido por dois. Oitenta e um dividido por dois. Não, não dá. É quarenta? Dá quarenta e meio; mais seis é igual a quarenta e seis. A V G1: Dá quarenta e seis? GA G1: É, dá quarenta e meio mais seis é igual a 46. A V G1: Ah, é muito difícil. Só que aí tem que subtrair os seis, não é? GA G1: Como assim, subtrair os seis? A V G1: Aqui não somou? GA G1: Ah é, 81 seis. É. Oitenta e um menos seis é igual a 75. Trinta, não. Trinta e sete e meio. Nunca vai dar resultado exato. É assim. Cento e dois menos seis é 96, dividido por dois, dá 48. É 48. A V G1: Você errou aqui em baixo (na letra 'd'). Tem que somar esse número mais esse. GA G1: A V, eu resolvi o segundo da letra 'c'. Dá 48. YA G1: Eu comecei a pegar o embalo. YA G1: Gente, me deixa tentar pensar. A L G1: Por que divide por três? GA G1: Ah, não sei. Vamos ver. Trinta e dois vezes dois mais seis. Setenta. Não, não dá. Espera aí. Trinta e dois vezes três mais seis. A L G1: Aí, viu.	Nessa parte do episódio, é possível perceber a importância da fala de cada aluno no grupo. Praticamente todos os alunos participam da discussão e todos têm uma preocupação com os resultados. Percebe-se que os questionamentos entre os alunos têm um papel fundamental na avaliação dos resultados, pois algum erro cometido por um componente é logo percebido e acusado por outro.

	GA G1: Mas, porque que multiplica? Não dá para ser esse valor, não é possível. A L G1: José Divino, veja se tá certa. JD: Mas, por que você pôs 46? A L G1: Porque... não sei. JD: Não, não está certo. GA G1: Viu? Eu disse é vezes dois. YA G1: Não é vezes dois. Não é 46. GA G1: Eu coloquei porque eu não sabia, eu não li o enunciado. JD: Não é ao quadrado; é dobrar e somar seis. Veja a regra. GA G1: Não é ‘x’ ao quadrado; é duas vezes ‘x’. LE G1: A A V tinha falado isso. GA G1: E aqui é 25 vezes dois igual a 50; mais 6 igual a 56. Quanto deu a sua? LE G1: 56. GA G1: Tá certo. A ‘c’ ficou 25 e 32. GA G1: Ó, vai dar (P) igual a 20; (B) igual a 40. Pronto; eu acho que é assim mesmo que faz. GA G1: Escreva uma regra que relaciona o número total de azulejos (T) em função do número de azulejos (P). Então, a gente tem que fazer assim: 20 + 46 igual a 66. 20 (P) mais 46 (B) igual a 66 (T). GA G1: Agora me confundiu, porque o domínio tem duas imagens. YA G1: O mesmo domínio não pode ter duas imagens. LE G1: A imagem pode ter dois domínios; mas o domínio não pode ter duas imagens. GA G1: Então, mas aqui ele está falando que tem duas imagens. LE G1: Então, fala com ele. GA G1: José Divino, esclarece, por favor: por que têm duas imagens? JD: Não têm duas imagens; cada elemento tem uma imagem. Veja, são dois conjuntos: um branco (B) e o outro, total (T). Para cada azulejo preto tem apenas uma quantidade branca (B) e para cada azulejo preto tem apenas um total (T). YA G1: José Divino, aqui é de 1º grau só porque não tem nada elevado a dois? JD: Isso. GA G1: Essa aí está errada. É B = 2P + 6. E a outra é T = 2P + 6 + P. Aí fica T = 3P + 6. Corrigiu de todo mundo?	

Quadro 24: Episódio da Aula 07: Generalizações e *funções.*
Fonte: O autor, 2014.

O ato de preencher (colorir) o papel quadriculado evidencia o contato visual do aluno com o objeto de estudo. Tal atitude se caracteriza como **ação** diante da **necessidade** de descobrir a relação entre os azulejos pretos e brancos. A partir dessa ação, a maioria dos alunos percebeu que os retângulos formados nos desenhos tinham um lado invariável com três quadradinhos. Essa **percepção** conduz à **abstração** que permite a **generalização** da lei de formação dos azulejos.

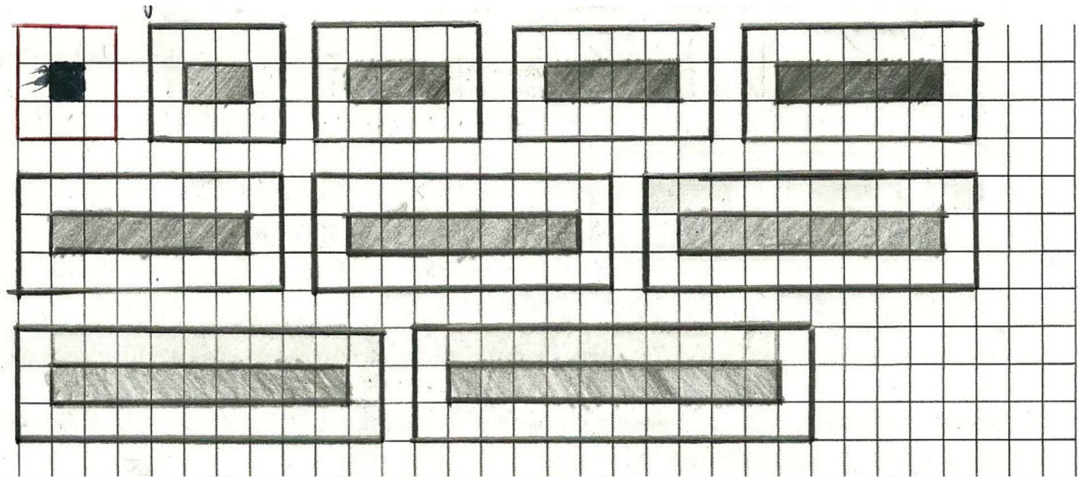


Figura 66: Resposta do Grupo 1 à letra 'a' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 – Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 1.

b) Quantos azulejos brancos são necessários, se o número de azulejos pretos enfileirados for 20? E se fosse 25? E se fosse um número representado por 'x'?

R.: 46 ; 56 ; 2.x+6 .

Figura 67: Resposta do Grupo 1 à letra 'b' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 1.

b) Quantos azulejos brancos são necessários, se o número de azulejos pretos enfileirados for 20? E se fosse 25? E se fosse um número representado por 'x'?

R.: 46 ; 56 ; x.2 +6 .

Figura 68: Resposta do Grupo 5 à letra 'b' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 5.

Apesar da descoberta de que não havia variação na largura do retângulo, os alunos tiveram imensa dificuldade para expressar a regra geral da composição dos azulejos. Alguns chegaram a enunciar verbalmente a regra, mas não tiveram a mesma facilidade para expressá-la algebricamente. Isso evidencia que a linguagem escrita traz mais dificuldades, pois os alunos têm que perceber a sua necessidade e devem dominar os signos necessários.

d) Preencha a tabela abaixo relacionando as quantidades os azulejos pretos (P), brancos (B) e total de azulejos (T). Estabeleça 15 variações para (P);

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
T	9	12	15	18	21	24	24	30	33	36	39	42	45	48	51

Figura 69: Resposta do Grupo 1 à letra 'd' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 1.

d) Preencha a tabela abaixo relacionando as quantidades os azulejos pretos (P), brancos (B) e total de azulejos (T). Estabeleça 15 variações para (P);

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
T	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51

e) A relação entre o número de azulejos brancos e pretos representa uma função? Por quê?

R.: Sim. Cada quantidade de azulejo preto se relaciona com o branco, e preto se relaciona com apenas um.

Figura 70: Resposta do Grupo 5 às letras 'd' e 'e' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 5.

Os alunos concluíram o preenchimento da tabela rapidamente e com muita facilidade. Percebe-se que as relações aritméticas da questão foram decifradas por eles com certa facilidade. Alguns grupos perceberam de imediato que a sequência da linha 2 era formada pelos múltiplos de 2, a partir de 8; a sequência 3, por múltiplos de 3, a partir de 9 *("YA: Vai aumentando de dois, não é? E aqui, de três")*. Assim, não utilizaram a regra (B = 2P + 6), mas apenas a propriedade aritmética.

f) Escreva uma regra (fórmula) que relaciona o número de azulejos brancos (B) em função do número de azulejos pretos (P). Lembre-se que temos dois valores variáveis: Um independente e o outro que varia em função dele (dependente).

R.: B = 2.P+6 ; ________.

Figura 71: Resposta do Grupo 1 à letra 'f' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 1.

g) Escreva uma regra (fórmula) que relaciona o número total de azulejos (T) em função do número de azulejos pretos (P). Lembre-se que temos dois valores variáveis: Um independente e o outro que varia em função dele (dependente).

R.: T = B+P, T = 2P+6+P ; T = 3P+6.

Figura 72: Resposta do Grupo 1 à letra 'g' da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 1.

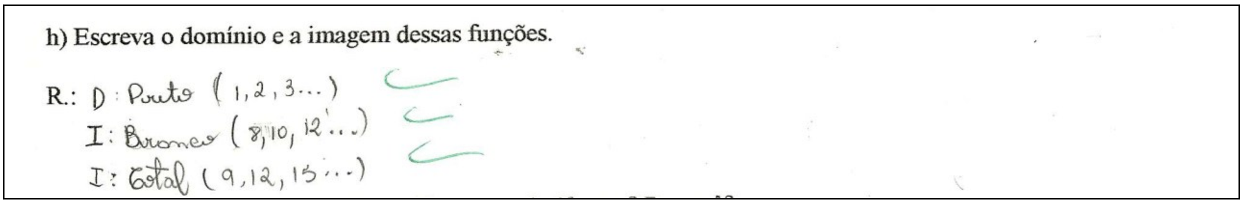


Figura 73: Resposta do Grupo 1 à letra ‘h’ da 1ª questão da atividade referente à Aula 07 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 1.

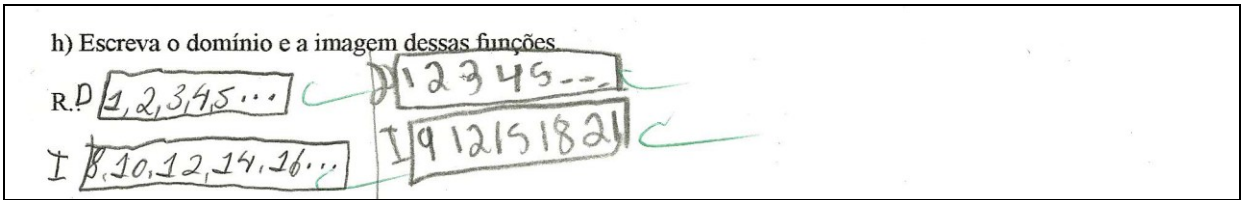
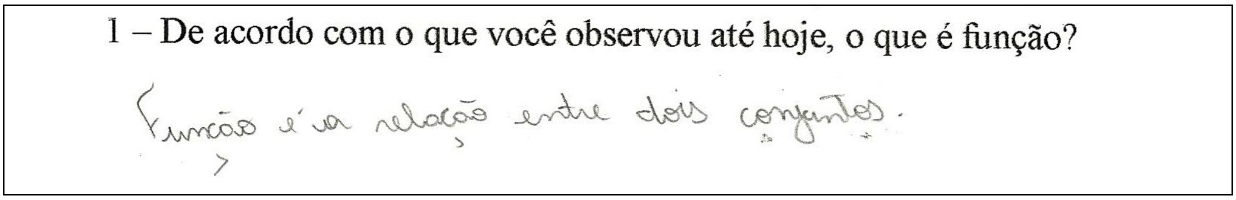


Figura 74: Resposta do Grupo 5 à letra ‘h’ da 1ª questão da atividade referente à Aula 7 - Generalizações e *funções*.
Fonte: Folha de atividades da Aula 07, respondida pelos alunos do Grupo 5.

No conceito de *função*, estão presentes outros conceitos, tais como: o conceito de relação; o conceito de variável; os conceitos de variável dependente e variável independente; os conceitos de conjunto domínio, conjunto contradomínio e conjunto imagem. Tais conceitos devem ser assimilados pelos alunos para que possam compreender a essência do conceito de *função*. Nesse processo percebemos os nexos externos e internos do conceito de *função*, conforme afirmam Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 96): “Os nexos externos se limitam aos elementos perceptíveis do conceito, ao passo que os internos compõem o lógico-histórico do conceito”. Segundo os autores, os nexos externos estão relacionados com a linguagem, como por exemplo, o grau da *função*, enquanto os internos envolvem as questões de interdependência e fluência.

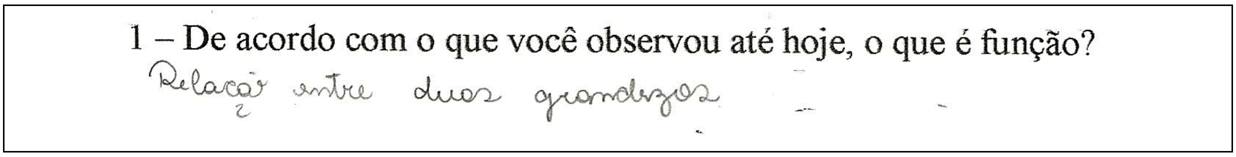
Após a assimilação do conceito de *função*, o aluno adquire elementos suficientes para se apropriar dos conceitos de *função* afim (do 1º grau) e *função* quadrática (do 2º grau). A sequência de ações proposta nessa atividade começa a evidenciar os nexos conceituais do conceito de *função*. A relação entre duas grandezas, a interdependência entre as variáveis, a fluência, os conjuntos domínio e imagem. Tudo começa a se encadear num processo de construção lógica do conceito de *função*.

A evolução dos alunos quanto à assimilação dos nexos conceituais do conceito de *função* pode ser percebida observando-se os resultados da avaliação proposta a eles, antes de iniciarmos as atividades da Aula 08. A maioria conseguiu assimilar a relação de dependência entre dois conjuntos (domínio e imagem) existente na *função*. Alguns alunos conseguiram expressar as condições para que essa relação represente uma *função*, como foi o caso de 'L V', que citou a relação e um contraexemplo.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

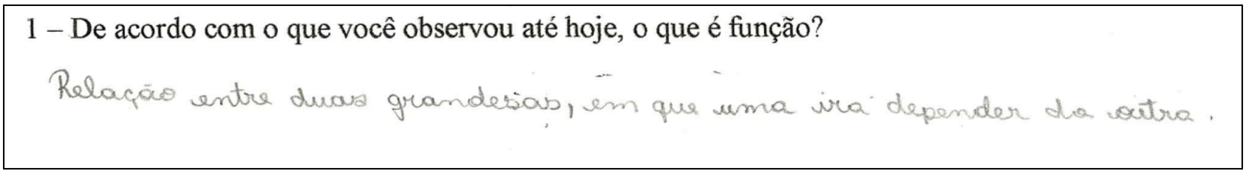
Função é a relação entre dois conjuntos.

Figura 75: Resposta da aluna A V à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna A V do Grupo 1.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

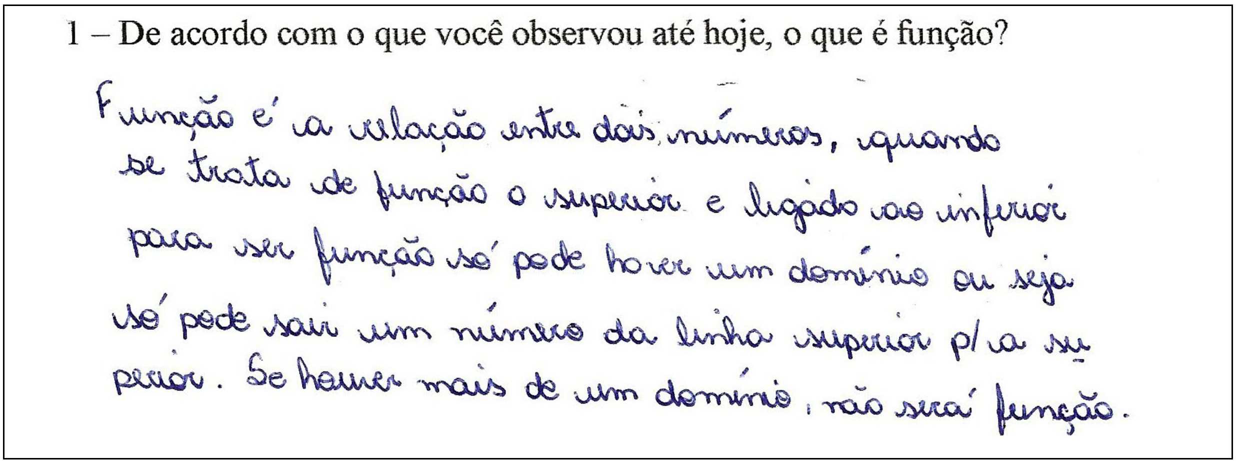
Relação entre duas grandezas

Figura 76: Resposta do aluno GA à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno GA do Grupo 1.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

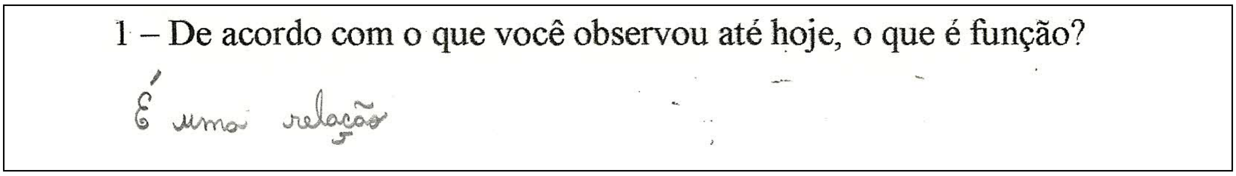
Relação entre duas grandesas, em que uma irá depender da outra.

Figura 77: Resposta da aluna A L à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 8, respondida pela aluna A L do Grupo 1.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

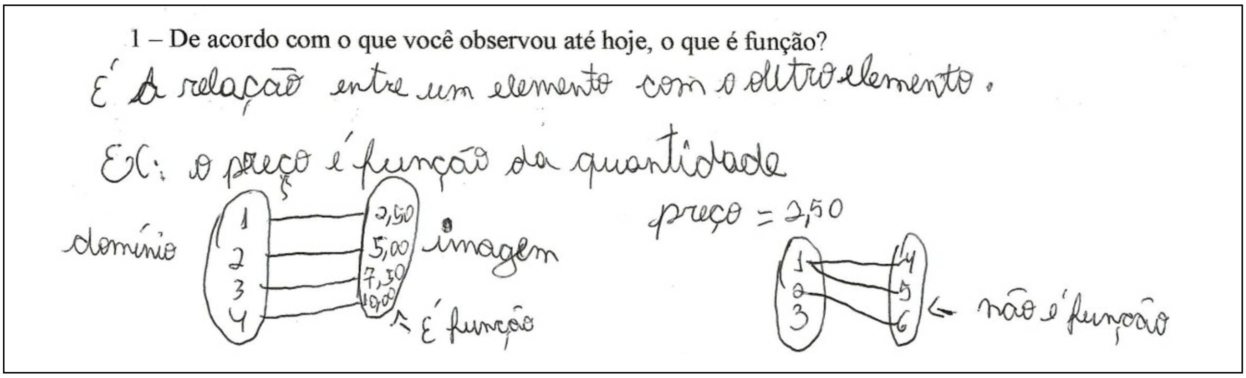
Função é a relação entre dois números, quando se trata de função o superior e ligado ao inferior para ser função só pode hover um domínio ou seja só pode sair um número da linha superior p/ a superior. Se houver mais de um domínio, não será função.

Figura 78: Resposta da aluna YA à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna YA do Grupo 1.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

É uma relação

Figura 79: Resposta da aluna LE à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna LE do Grupo 1.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

É a relação entre um elemento com o outro elemento.

Ex: o preço é função da quantidade

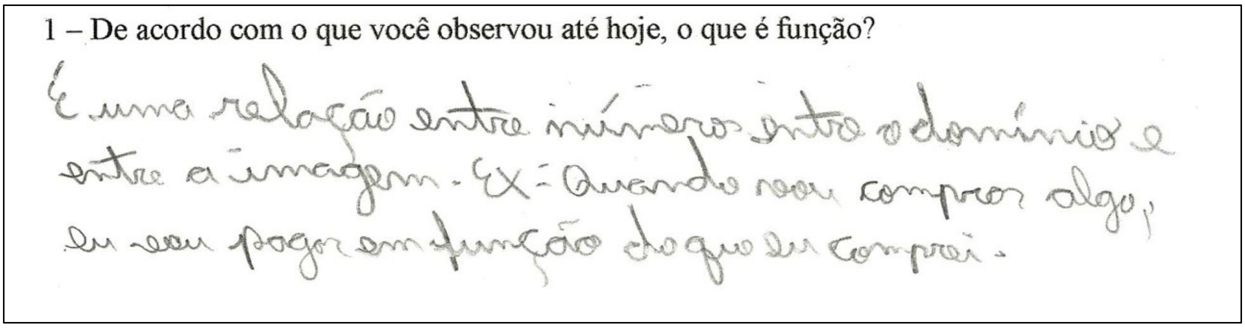
domínio 1 2 3 4 → 2,50 5,00 7,50 10,00 imagem

← É função

preço = 2,50

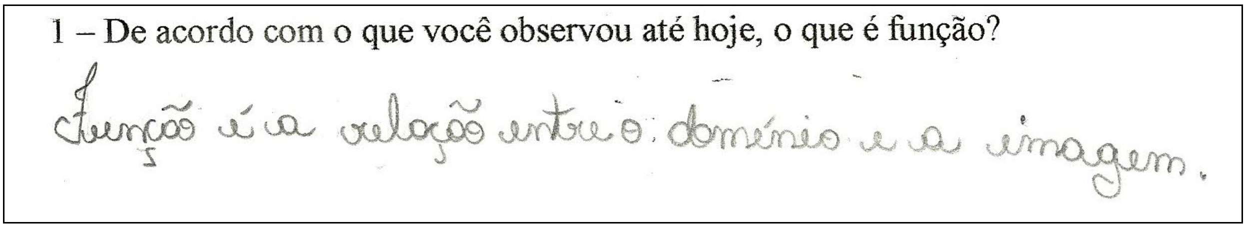
1 2 3 → 4 5 6 ← não é função

Figura 80: Resposta do aluno L V à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno L V do Grupo 5.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

É uma relação entre números entre o domínio e entre a imagem. Ex: Quando vou comprar algo, eu vou pagar em função do que eu comprei.

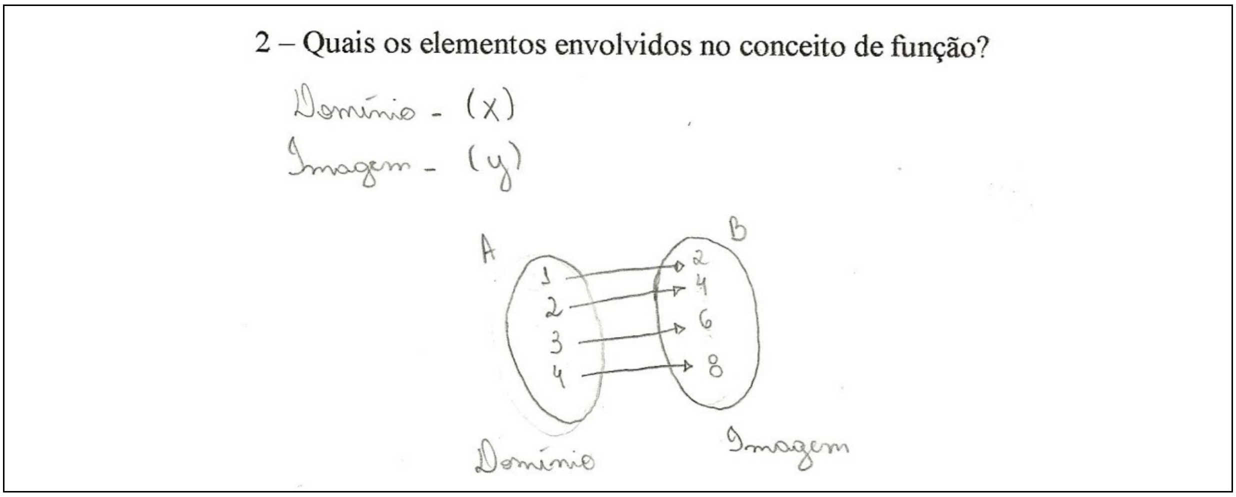
Figura 81: Resposta do aluno MA à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno MA do Grupo 5.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

Função é a relação entre o domínio e a imagem.

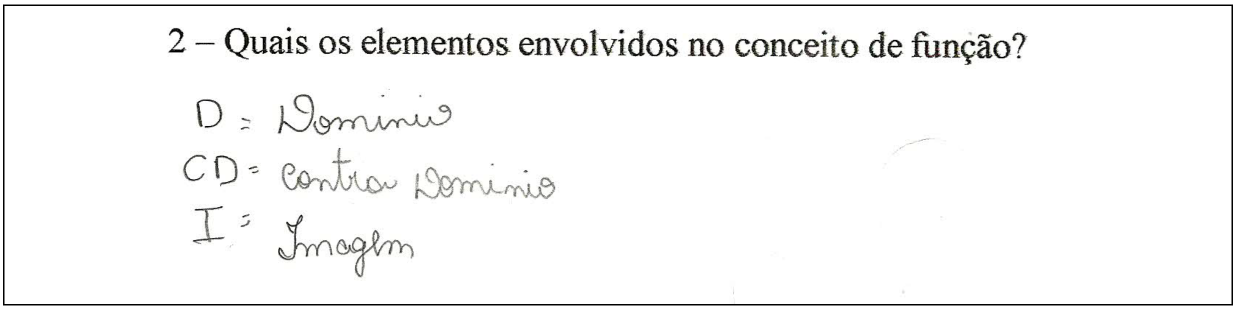
Figura 82: Resposta da aluna ISA à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna ISA do Grupo 1.

Em todas as respostas aparece a palavra “relação”. Isso permite afirmar que há evidências de que os alunos estão num processo de apropriação da essência lógico-histórica do conceito de *função* – a necessidade de expressar a interdependência e a fluência das coisas, traduzida pela ideia de relação entre grandezas, entre conjuntos, como se pode ver nas respostas. As condições para que a relação seja uma *função* não aparecem, a não ser o aluno L V, que faz uma menção a elas, quando apresenta um contraexemplo.


2 – Quais os elementos envolvidos no conceito de função?

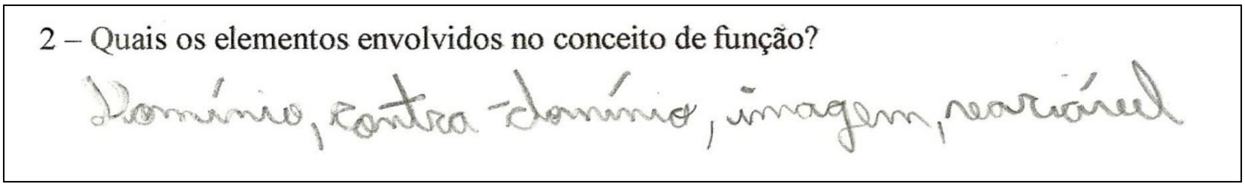
Domínio - (x)
Imagem - (y)

Figura 83: Resposta da aluna A V à 2ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna A V do Grupo 1.


2 – Quais os elementos envolvidos no conceito de função?

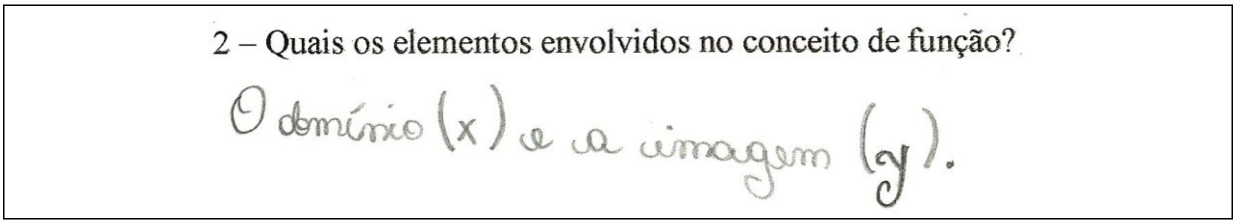
D = Domínio
CD = Contra Domínio
I = Imagem

Figura 84: Resposta do aluno GA à 2ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno GA do Grupo 1.


2 – Quais os elementos envolvidos no conceito de função?

Domínio, contra-domínio, imagem, variável

Figura 85: Resposta do aluno MA à 2ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno MA do Grupo 5.


2 – Quais os elementos envolvidos no conceito de função?

O domínio (x) e a imagem (y).

Figura 86: Resposta da aluna ISA à 2ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna ISA do Grupo 1.

Todos os alunos analisados apontaram os conjuntos domínio e imagem como elementos envolvidos no conceito de *função.* Isso confirma a noção de "relação" da questão anterior e a interdependência entre os elementos dos conjuntos envolvidos na relação.

3 – Quando é que uma função é do 1º grau (função afim) e quando ela é do 2º grau (função quadrática)?

1º grau - quando está elevado a 1

2º grau - quando está elevado a 2

Figura 87: Resposta da aluna A V à 3ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna A V do Grupo 1.

3 – Quando é que uma função é do 1º grau (função afim) e quando ela é do 2º grau (função quadrática)?

1º Grau : quando o dóminio tem só uma imagem

2º Grau : quando o dominio tem duas imagens

Figura 88: Resposta do aluno GA à 3ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno GA do Grupo 1.

3 – Quando é que uma função é do 1º grau (função afim) e quando ela é do 2º grau (função quadrática)?

1º grau = Quando é elevado a 1.

2º grau = Quando é elevado a 2.

Figura 89: Resposta da aluna LE à 3ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna LE do Grupo 1.

3 – Quando é que uma função é do 1º grau (função afim) e quando ela é do 2º grau (função quadrática)?

é de primeiro grau quando esta se elevando a 1

e é de segundo quando está se elevando a 2

Figura 90: Resposta do aluno L V à 3ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pelo aluno L V do Grupo 5.

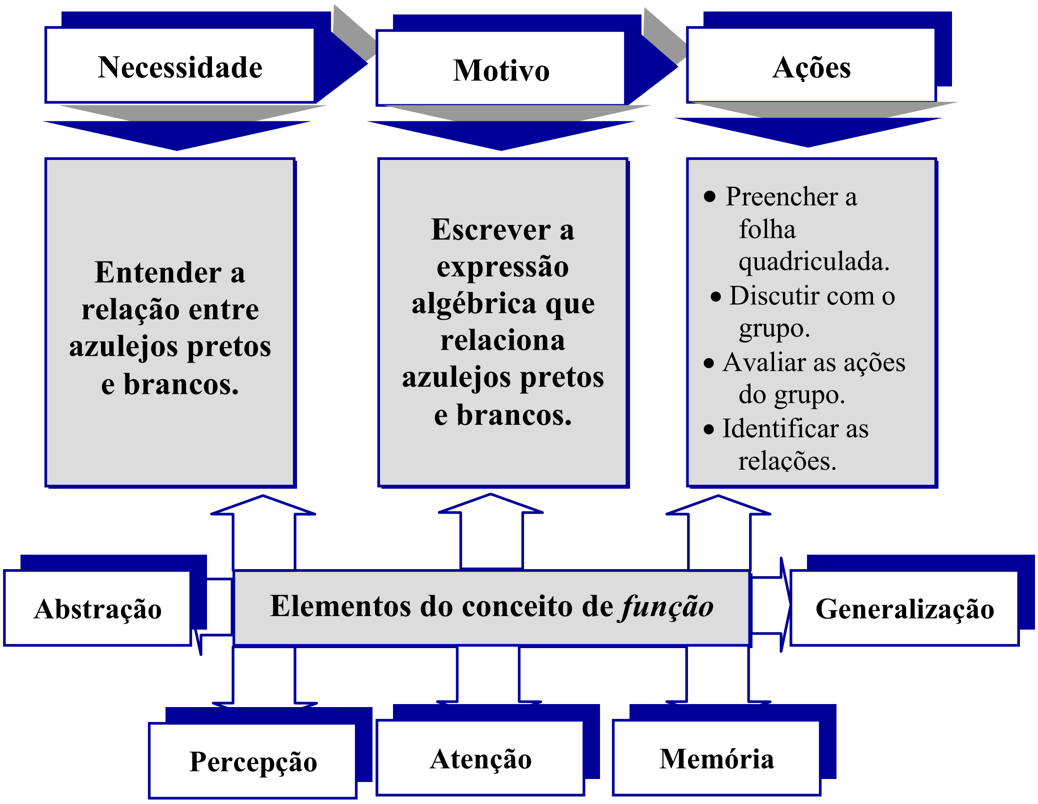
3 – Quando é que uma função é do 1º grau (função afim) e quando ela é do 2º grau (função quadrática)?

O primeiro grau é elevado a 1, e o segundo grau é elevado a 2.

Figura 91: Resposta da aluna ISA à 3ª questão da avaliação proposta na Aula 08.
Fonte: Folha de atividades da Aula 08, respondida pela aluna ISA do Grupo 1.

Segundo alguns autores, a *função* não tem grau. Este é atribuído ao polinômio que expressa a lei de formação da *função*. Nesse episódio foi utilizado “1º grau” e “2º grau” em razão de alguns autores utilizarem essa nomenclatura, especialmente nos livros do ensino fundamental. Porém, foi esclarecido aos alunos que a nomenclatura correta é: “*função* afim” e “*função* quadrática”. Apesar da explicação, os alunos preferiram utilizar os termos “primeiro grau” e “segundo grau”. Percebe-se que eles apresentaram respostas parcialmente corretas, uma vez que não explicaram qual o termo deve ser elevado a um ou a dois. O aluno GA apresentou uma definição diferente. Ele relacionou o tipo da *função* (grau) com o número de ‘imagem’ para cada ‘domínio’. Na verdade, seria o número de ‘domínio’ para cada ‘imagem’.

O quadro a seguir ilustra de forma sintética o processo de organização da atividade de ensino.



Quadro 25: Esquema da atividade de ensino e aprendizagem: Nexos do conceito de *função*.
Elaboração: O autor, 2014.

4.2 Análise dos resultados: Encontrando o seu par

A atividade "Encontrando seu par", realizada com os alunos na Aula 08, contou com a presença da professora Valéria, titular de matemática da turma. Inicialmente os alunos foram organizados em grupos e a folha de atividades, distribuída a todos eles. A parte inicial da folha de atividades, como nas anteriores, relembrava os conceitos de *função*, domínio, contradomínio, imagem e acrescentava as definições de *função* afim e *função* quadrática, indicando suas fórmulas, particularidades, campos de variação e condições de existência. Na folha de atividade foram apresentados aos alunos dois conjuntos de números: domínio, com 11 elementos; e contradomínio, com 21 elementos.

A ação era formar pares com elementos do domínio e do contradomínio a partir das regras (leis para a formação do par) que foram fornecidas. A primeira regra era $\mathbf{f(x) = x + 2}$ e a segunda, $\mathbf{f(x) = x^2}$. A intenção inicial era desenvolver com os alunos pelo menos duas *funções* afins e duas quadráticas, mas, por questões de tempo e de desenvolvimento por parte dos alunos, só foi possível trabalhar com uma de cada.

Ainda em grupos a tarefa dos alunos era formar pares ordenados (como se pode observar nas respostas a seguir): primeiro elemento, do conjunto domínio; e segundo, do conjunto contradomínio. Assim que terminaram de formar os pares, a sala foi dividida em dois grupos: um, com elementos do domínio; e outro, com elementos do contradomínio. Para isso cada aluno recebeu um cartão de cor azul (domínio) ou verde (contradomínio). Esse cartão foi colocado no crachá do aluno para facilitar a visualização. Assim, os alunos que tinham um cartão azul (domínio) sabiam que teriam que encontrar um par com cartão verde (contradomínio) e que passariam a ser a sua imagem. Enquanto compunham os pares ordenados em seus respectivos grupos, os alunos já começaram a procurar e identificar qual seria o seu par.

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **Aula 08** Data: ____/____/2014

Nome: ____ Grupo: ______

VAMOS RELEMBRAR:

FUNÇÃO:
I – Todos os números do conjunto Domínio (D) têm relação com algum número do conjunto Contradomínio (Cd) e,
II - Cada número do conjunto Domínio (D) está relacionado com apenas um número do conjunto Contradomínio (Cd).

Se uma relação é função, podemos destacar 3 (três) conjuntos de elementos envolvidos na relação: o conjunto DOMÍNIO (D) – que contém todos os elementos da variável independente; o conjunto CONTRADOMÍNIO (Cd) – onde estão todos os possíveis valores para a variável dependente; e o conjunto IMAGEM (I) – que contém todos os valores da variável dependente.

O que é uma Função do 1º grau ou função afim? E Função do 2º grau ou função quadrática?

I – Chamamos de ***função polinomial do 1º grau*** ou ***função afim*** a toda função f: R → R definida pela lei ou fórmula matemática: ***f(x) = ax + b*** ou ***y = ax + b*** (com a, b reais e a≠0).

II – Chamamos de ***função polinomial de 2º grau*** ou ***função quadrática*** a função f: R → R. definida pela lei ou fórmula matemática: ***f(x)*** = $ax^2 + bx + c$ ou ***y*** = $ax^2 + bx + c$ (com a, b e c números reais e a ≠ 0).

08. Encontrando o seu par.

Agora, nós vamos fazer um exercício diferente. Vamos dividir os alunos em dois grupos: o primeiro grupo será chamado grupo do '**domínio**' e o segundo, grupo do '**contradomínio**'. Cada elemento do domínio deverá procurar um elemento do contradomínio para formar um par. Porém, deve observar a regra (a lei para a formação do par) que será fornecida pelo pesquisador/professor. (Todos os alunos receberão uma ficha com um número).

Os dois grupos serão divididos de forma que o contradomínio fique com número igual ou maior de elementos que o domínio. Cada aluno receberá uma ficha numerada.

Assim, por exemplo: $D = \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ e

$$Cd = \left\{-7, -5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, 5, 9\right\}$$

I) A lei para a formação do par é **$y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$.**

a) Todos os alunos do conjunto domínio encontraram seus pares? R.:________________________
b) Sobraram alunos no conjunto domínio? R.: ________________
c) Algum aluno do conjunto domínio encontrou mais de um par? R.: ________________________
d) Essa relação é uma função? Sim ( ) Não ( ) Por quê? R.: ________________________________
____
e) Se a resposta anterior foi sim, é função do 1º grau ou do 2º grau? R.: ______________________
f) Escreva todos os pares que foram formados a partir da lei acima: R.: _____________________

____

II) A lei para a formação do par é **$y = x^2$ ou $f(x) = x^2$**

a) Todos os alunos do conjunto domínio encontraram seus pares? R.:________________________
b) Sobraram alunos no conjunto domínio? R.: ________________
c) Algum aluno do conjunto domínio encontrou mais de um par? R.: ________________________
d) Essa relação é uma função? Sim ( ) Não ( ) Por quê? R.: ________________________________
____

e) Se a resposta anterior foi sim, é função do 1º grau ou do 2º grau? R.: ______________________

f) Escreva todos os pares que foram formados a partir da lei acima: R.: ______________________

____

Quadro 26: Encontrando o seu par.
Fonte: O autor, 2014.

<table>
<tr><td colspan="3">AULA 08: Encontrando o seu par</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I – Aplicar os conceitos de domínio, contradomínio e imagem.
II – Compor os pares ordenados de uma função, a partir da expressão algébrica.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições objetivas da Atividade de Estudo (COAE)</td><td>GA G1 (lendo o enunciado): Se uma relação é função, podemos destacar três conjuntos de elementos na relação: o conjunto domínio, que contém todos os elementos da variável independente; o conjunto contradomínio, onde estão todos os possíveis valores da variável independente; e o conjunto imagem, que contém todos os valores da variável dependente. O que é uma função de primeiro grau ou uma função afim? E a função de 2º grau ou função quadrática?
YA G1: Função de primeiro grau é porque não é elevado a nenhum número; ou seja, é elevado a um.
GA G1: Você acertou.
YA G1: A função do 2º grau vai ser elevada a dois, normal.

JD: Já começaram? Entenderam o que é para fazer?
ISA G5: Dividir em dois grupos.
JD: Mas primeiro vamos recordar alguns itens. Estamos relembrando. Depois vamos ler, entender e responder a essas questões. Depois, nós vamos formar dois grupos: um com esses números aqui e outro, com esses. Aí nós vamos formar os pares, que é o nosso objetivo, hoje. Por exemplo: se o seu número for (-2) e a relação for essa aqui, qual vai ser o seu par?
ISA G5: Ah, entendi.
MA G5: Eu não entendi.
JD: Vamos ver se vocês conseguem; se tiverem dúvidas podem chamar. Vamos utilizar o crachá para colocar o cartão com o número do par.
LE G5: Vai ser com a sala inteira?

JD: Agora, faz os outros.
GA G1: Ah, tem que fazer esse aqui? Tem que ligar, né?
JD: Não precisa ligar; você tem que fazer todos.
GA G1: Todos os alunos do contradomínio encontraram seus pares? Com é que a gente vai saber?
LE G1: Não. Aqui, olha.
JD: Então; cadê a relação? É do 1º grau ou do 2º grau?
A L; GA; YA G1: 1º grau.
JD: Então vocês podem responder. Vira a folha. Agora, podem formar os pares.
GA G1: Mas, como vamos formar esses pares?
JD: A regra está aqui. O “y” vale ‘x + 2’. Então, esse aqui vale esse mais dois.

VAL: Você pega o domínio e joga aqui. Só o domínio.
A V G1: Colocou o domínio e o contradomínio.
YA G1: É, o par. Aí, menos três mais dois, vai dar menos um.

VAL: Qual é a lei de formação?
MA G5: É menos três mais dois é igual a menos um.
VAL: Então põe menos um aqui para formar o par. E o segundo valor?</td><td>O termo “VAL” se refere à professora de matemática da turma.

Nessa categoria de análise ficou evidente a dificuldade inicial dos alunos, mas que foi contornada com alguns esclarecimentos entre eles e também com as orientações do pesquisador e da professora.</td></tr>
</table>

	ISA G5: Menos dois. VAL: Menos dois mais dois quanto dá? MA G5: Menos dois mais dois é igual a zero. Ah, então é isso? VAL: É isso que ele quer: escreva todos os pares que foram formados a partir da lei. J V G5: Val, só que eu não consegui acha o par quando é menos meio mais dois. VAL: Agora, gente; uma coisa é você dividir um por dois e dar meio (0,5), está ótimo. E um terço? O que vocês fizeram com um terço? Como vocês acharam a imagem do domínio um terço? GA G1: Deu 0,33, mais ou menos. VAL: Mas esse mais ou menos é que pode te pegar. Pois: 0,33 mais dois é igual a 2,33. E isso representa qual fração? GA G1: É sete terços. Porque sete dividido por três dá 2,333... VAL: Tá. Quando você tem esse pensamento, ótimo. Quando não tem, faz um terço mais dois. O mínimo é três. Três divididos por três dá um, vezes um é um; mais três divididos por um dão três, vezes dois dá seis. Um mais seis é sete. Sete terços. Quando a divisão dá exata é tudo de bom, mas quando não dá, o melhor é somar as frações. Quando são números grandes, não dá. Então, você tem que ter outra linha de pensamento. A L G1: José Divino, vem aqui, por favor. JD: Essa *função* é do... GA G1: Segundo grau. JD: Menos três ao quadrado dá quanto? YA G1: Nove. JD: E três ao quadrado? GA e YA G1: Dá nove. JD: Então, têm dois valores para o nove? GA G1: Têm. JD: E pode ter dois valores? GA G1: Pode. YA G1: São duas imagens. GA G1: São dois domínios para uma mesma imagem. JD: Então, agora vamos formar dois conjuntos. Desse lado aqui vão ficar os alunos que estão com o crachá azul, que é o domínio, e desse lado, vamos fazer a fila dos alunos que estão com o crachá verde, que representam o contradomínio. Os pares, nós vamos fazer no meio. Então vamos afastar as cadeiras para dar espaço. Deixem esse corredor livre para formarmos os pares nele. VAL: As fichas verdes, aqui; e as azuis, ali. GA G1: Gente, tem que ser em ordem. O domínio é aqui. VAL: Não tem que ser em ordem, não. JD: Olha: eu sou verde, fico nessa fila.	
Desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos (DMPA)	ISA G5: O que é para responder aqui na primeira? J V G5: Cara, é só você olhar aqui. MA G5: Eu não entendi esse negócio de domínio e contradomínio. ISA G5: Se você tivesse ficado calado quando ele explicou, eu teria entendido, mas você ficou conversando	

	comigo. LU G5: Eu sou contradomínio. MA G5: Eu sou domínio. Deixa eu ver o seu. LU G5: José Divino, se for verde é contradomínio? JD: Sim. Você quer trocar? LU G5: Eu quero domínio. J V G5: Mas eu sou contradomínio, eu vou lutar contra você. MA G5: Você é contradomíno? Já perdeu. GA G1: Aqui a imagem está tendo dois domínios. LE G1: O que é para fazer agora? GA G1: Dá 2,25. O que é? YA G1: Espera aí. 2,25 é nove partes de quatro. GA G1: Não é. É sete partes de 3. YA G1: Qual que é? Nossa, aqui tá difícil de chegar lá. A L G1: Três divididos por dois é um e meio. GA G1: Três divididos por dois é meio. A L G1: Não, é um e meio. Três meios mais dois é sete meios. YA G1: E com um terço é sete terços? VAL (Professora): Não é melhor fazer os pares ao invés de riscar? GA G1: Como assim? Esse a gente não vai fazer agora. A gente está fazendo os pares aqui. VAL: Mas, é para escrever. A V G1: Com três meios é qual? VAL: É três meios ou dois terços? A V G1: Três meios. YA G1: Sete meios? JD: Todo mundo do grupo já descobriu com quem vai formar par? J V G5: Eu vou formar par com o três. Eu vou formar par com o senhor, o seu número é o três. JD: Comigo? É verdade. Agora verifiquem o seguinte: domínio forma par com contradomínio, contradomínio forma par com domínio. J V G5: E se não tiver nenhum número para formar par? JD: Então. Essa é a relação importante. Se for domínio, cada elemento tem que ter o seu par para ser função; se for contradomínio, pode sobrar. MA G5: Olha com quem eu fui cair. Com o GA. LU G5: Ele é o seu par? Ele é o menos um? MA G5: Sim. J V G5: O TH está com a VAL.	Nessa categoria fica evidente que, em determinados momentos, há uma dispersão dos componentes do grupo. É preciso atenção de quem está no controle para que o grupo retome o foco e não perca tempo com assuntos alheios. A motivação e a participação dos alunos nas discussões e desenvolvimento da atividade devem ser sempre monitoradas.
Formação do conceito (FC)	GA G1: Gente, por favor, vai. Vamos relembrar *função*: todo número do conjunto domínio tem relação com algum número do conjunto contradomínio e cada número do conjunto contradomínio está relacionado com apenas um número do conjunto domínio. YA G1: Eu falei que pode ser só um. Não pode ter duas imagens? GA G1: Não pode; a imagem pode ter dois domínios, mas o domínio não pode ter duas imagens; eu não sei por quê. A L G1: Sabe por que não pode ter duas imagens, é porque seria o caso do produto ter dois preços. GA G1: É verdade.	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>YA G1: Mas eu me lembro de alguma coisa que esse podia ter dois, mas daqui não podia sair dois. Aqui era domínio e aqui era imagem; então, pode ter só um domínio.
J V G5: Então menos dois elevado a dois vai dar quatro e dois elevado a dois vai dar quatro.
JD: Mas veja que cada domínio só tem uma imagem.
J V G5: Então cada imagem vai ter dois domínios?
JD: Só tem uma exceção que é o zero, pois zero não tem sinal.

JD: Agora veja bem: como é chamado esse conjunto?
VÁRIOS ALUNOS: Domínio.
JD: E esse aqui?
VÁRIOS ALUNOS: Contradomínio.
JD: E quando é que teremos o conjunto imagem?
ALGUNS ALUNOS: Quando junta os dois.
JD: Podem sobrar elementos no contradomínio?
VÁRIOS ALUNOS: Pode.
JD: Sim. Vai sobrar, não vai? Por quê?
ALGUNS ALUNOS: Porque de lá tem mais elementos.
JD: Agora, para ser função pode sobrar elemento no domínio?
ALGUNS ALUNOS: Não, se sobrar não é função.
JD: Tem algum elemento do conjunto domínio relacionado com mais de um?
ALGUNS ALUNOS: Não.
JD: Não. Cada um só tem um par. Cada um tem um e todos têm pares, não sobrou nenhum aluno sem para no conjunto domínio. Isso é uma função?
ALGUNS ALUNOS: É.
JD: Olha aqui, gente. Agora é a mesma coisa, só que a relação mudou, os pares serão outros. O que significa f(x)?
ALGUNS ALUNOS: O ‘y’.
JD: Qual é o conjunto que o ‘y’ representa?
ALGUNS ALUNOS: Imagem.
JD: E o ‘x’?
ALGUNS ALUNOS: O domínio.
JD: Quer dizer que quem está aqui está em função daqueles. Não pode sobrar lá no domínio, mas aqui, pode. Então agora nós temos ‘y’ é função de ‘x’. Quanto vale o ‘y’?
VÁRIOS ALUNOS: ‘x’ ao quadrado.
JD: Então vamos formar os pares. O ‘menos três’ forma par com quem?
ALGUNS ALUNOS: Com o nove.
JD: Cadê o nove? Vem prá cá. Agora é o menos dois. Qual é o par?
ALGUNS ALUNOS: O quatro.
JD: Cadê o quatro?
JD: Por exemplo: tem um nono com um terço e com menos um terço. Poderia ter um terceiro valor?
ALGUNS ALUNOS: Não.
JD: Então nós podemos concluir que, quando temos um número positivo ao quadrado e o mesmo número negativo ao quadrado, a resposta é a mesma. Nós teremos dois valores do domínio para a mesma imagem. Só tem uma exceção, qual é a única exceção? [Silêncio...] Qual é o número que não tem negativo?</td>
<td>Os trechos de diálogos apresentados pelos alunos, nesse episódio, mostram que eles remetem a situações próximas a eles (do seu dia a dia), como o preço dos produtos. Isso aponta para um ‘conceito em formação’; uma compreensão que ainda necessita de mais elementos para ser completa.</td>
</tr>
</table>

	VÁRIOS ALUNOS: O zero. VAL: Posso dar uma sugestão? JD: Claro. VAL: Vem cá. Você é o domínio menos três. Eu vou fazer todo mundo participar. Menos três, qual é a sua imagem? GA G1: É nove, gente. VAL: Estão vendo como vocês não estão ligados? Vamos dar as mãos. [Risos.] VAL: Eu não quero nem saber. Aqui nós não estamos brincando. O objetivo e a estratégia do José Divino, se todo mundo levar a sério, vocês vão ficar no primeiro ano do ensino médio sem problemas. Vem aqui, qual é a sua imagem? É o nove? Pega na mão dele. Então, você é o domínio e você é a imagem. Qual é o seu? Pega na mão dela. Vem cá, qual é a sua imagem? É a RA? Então, pega na mão dela. E você? Vai, pega na mão. Assim, fica de frente um pro outro. Não é assim que eu quero. O domínio não vai sair do lugar. Vai ficar nessa posição. O domínio é aqui e a imagem é aqui. Não saiam do lugar, só deem as mãos. JD: Observem, gente: têm dois domínios para a mesma imagem. VAL: Gente, eu não sei por que vocês têm problemas para pegar na mão. ALGUNS ALUNOS: É, não tem nada a ver. OUTRO: Ah, sei lá. VAL: Observem: todos os domínios estão aqui. Agora prestem atenção na minha pergunta. Fiquem todos de frente para o seu domínio. Essas pessoas que estão aqui, quem está somente com uma mão usada? Você só tem uma imagem? Quem mais tem só uma imagem? Você tem duas. Dois domínios e uma imagem, pode? ALGUNS ALUNOS: Pode. VAL: E duas imagens e um só domínio? ALGUNS ALUNOS: Não. JD: Então isso é uma *função*? ALGUNS ALUNOS: É. JD: É do segundo grau? ALGUNS ALUNOS: É. JD: A *função* do 2º grau vai ter sempre esta característica: uma imagem para dois domínios, com exceção de apenas um par.	
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	A L G1: Gente, eu não sei o que é para fazer. GA G1: Ele vai dar a lei. YA G1: Assim, por exemplo, o que é isso aqui? GA G1: É o conjunto domínio. Esse aqui é o contradomínio. A lei para a formação do par é $y = x + 2$. YA G1: Ou é ‘x’ = x + 2. GA G1: $f(x) = x + 2$. É a mesma coisa. Todos os alunos do conjunto domínio encontrarão seus pares. Sobrarão alunos no conjunto contradomínio. YA G1: Espera, por favor. A L G1: Tem que esperar. Vamos fazer esse primeiro. GA G1: É $-3 + 2$. YA G1: É -5? Eu não sei se é -5; eu não me lembro a regra de sinais. GA G1: Menos três mais dois. YA G1: Menos com mais.	

	GA G1: Menos um. YA G1: Então, vamos ligando aí só para ter uma ideia. A L G1: Menos um? YA G1: É, tem que conservar o sinal do maior e subtrair. Mas aqui só tem mais. A L G1: Tem o menos um. GA G1: Entenda: quando você está somando, o número negativo não vai prá frente; ele volta. Quando você soma 5 + 5 = 10. Ele está indo para o lado dos números positivos. JD: É só aplicar a relação e calcular. Esse aqui é qual? MA G5: Menos três. JD: Mais dois quanto dá? MA G5: Menos cinco. JD: Menos três mais dois dá menos cinco? Preste atenção. J V G5: É menos um. MA G5: Disfarça. Menos um. JD: Então vocês vão fazendo os pares dessa forma: menos três com menos um... LU G5: Então menos meio mais dois, no caso seria um e meio? JD: Está certo. É uma soma com fração. Como é que eu faço isso? Reduzo ao mesmo denominador. É melhor do que transformar para decimal. TH G5: Ensina-me a tirar o mínimo. YA G1: Por que você tem que complicar com zero vírgula? Por que você não põe meio mais meio? Meio mais meio dá um. YA G1: O domínio está tendo duas imagens; não é a imagem que está tendo dois domínios. Aqui é que está o y; ele falou. GA G1: Não, mas o domínio está tendo somente uma imagem. A L G1: Dois e meio. Eu acho que é cinco partes de dois, não é? GA G1: É, é meio mais dois que é 2,5. GA G1: Você colocou errado, então. Olha aqui. Está erradoooo. A V G1: É um dividido por três, não é? YA G1: Deu sete terços. GA G1: Você colocou errado aqui na folha; você colocou sete meios. [Risos.] YA G1: Você pôs sete terços duas vezes; está errado. A V G1: Três meios vão para sete meios. Sete meios; é dois, e não três. GA G1: Esse aqui está errado; não são sete terços. YA G1: É sete meios. GA G1: Nem sete meios. YA G1: Por quê? GA G1: Quer ver? Menos um dividido por dois mais dois. Três meios. É a mesma coisa aqui. YA G1: Não, não é. GA G1: Lógico que é.	As cenas de diálogos entre os alunos, nesse episódio, confirmam indícios evidenciados na avaliação diagnóstica: as dificuldades com as regras básicas da matemática, as operações com frações e números decimais. No entanto, ficou evidente a assimilação dos alunos sobre o ‘par ordenado’.

	A V G1: Como você vai ligar aqui? Três meios é 1,5; mais dois é 3,5 que é sete sobre dois. GA G1: Ah. É verdade. Mas esse aqui estava errado. YA G1: Ela fez conta cruzada nesse aqui? GA G1: Não, m.m.c., gente; não faz conta cruzada. Pega o mínimo e aí... É o mínimo, o mínimo não muda. ISA G5: Como vocês sabem qual é o par de vocês? Qual é a conta que vocês fazem? J V G5: Por exemplo: você está com um número aí. Você é o domínio, o seu número é 1/3. Aí você faz 1/3 mais dois. A lei é y = x + 2. Você é o x. O y é o seu par. Um terço mais dois dá sete terços. O seu par é sete terços. Essa conta aí e isso aqui que ela fez.	

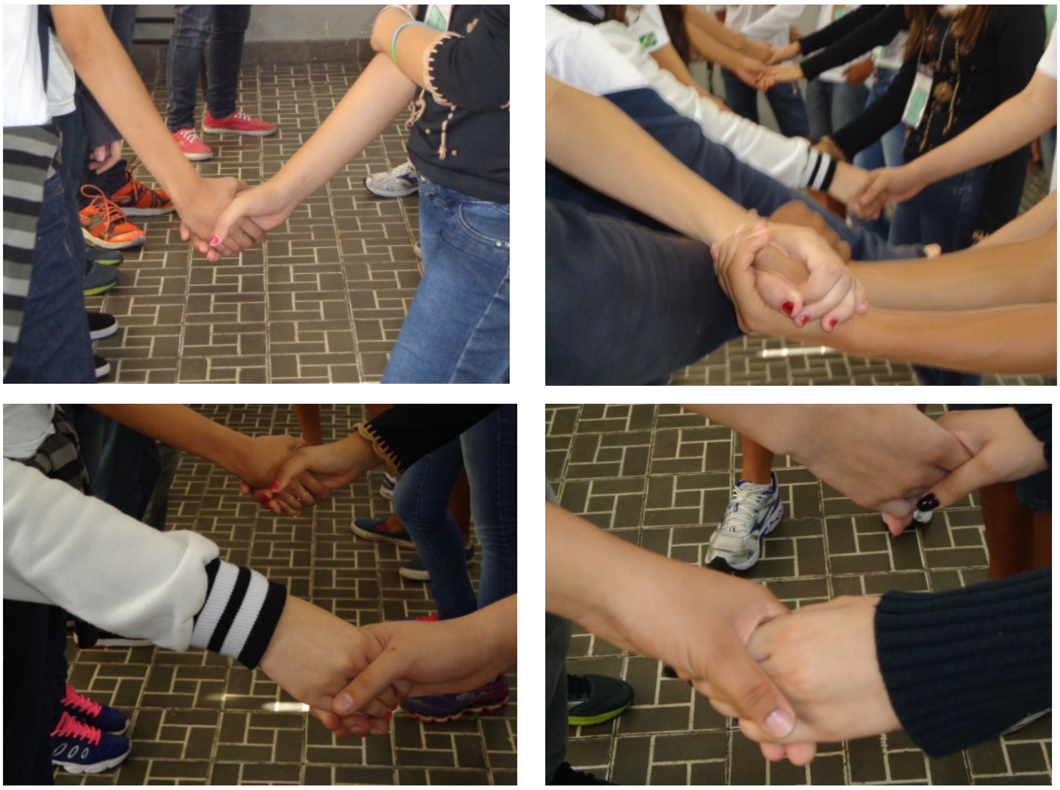
Quadro 27: Episódios da Aula 08: Encontrando o seu par.
Fonte: O autor, 2014.

Essa atividade foi muito interessante e motivadora para os alunos, pois despertou neles a curiosidade para procurar o seu par e, para tanto, deveriam utilizar a regra estabelecida. Ficou evidente que os alunos com cartão azul (domínio) encontraram os seus pares com maior facilidade que os portadores de cartão verde (contradomínio). Isso, no entanto, já era esperado, pois como a regra era $y = x + 2$, o aluno com cartão azul tinha apenas o trabalho de somar o número do seu cartão com dois para obter o número do seu par. Já aquele com cartão verde precisava pensar em um número que somado com dois resultaria no número do seu cartão. Essa operação foi um pouco mais difícil para eles.

No cálculo dos pares ordenados ficou evidente a dificuldade dos alunos em lidar com os números fracionários. Somar $\frac{1}{2} + 2$ se tornou tarefa bastante embaraçosa para a maioria deles. Em uma visita a um dos grupos notei que o aluno havia composto rapidamente todos os pares que envolviam apenas números inteiros. Questionado sobre os demais, ele respondeu que não era bom no cálculo com frações.

Assim que completaram a construção dos pares ordenados, os alunos foram convidados a se posicionar em duas filas no meio da sala, virados uns para os outros, de maneira que de um lado estariam todos os alunos com cartões azuis representando o domínio e do outro, os alunos com cartões verdes, representando o contradomínio. A proposta inicial era de que um aluno com cartão azul procurasse o seu correspondente na fila dos cartões verdes e, formado o par, se posicionasse no corredor entre as duas filas. Nesse momento a professora Valéria perguntou se poderia interferir. Com a resposta afirmativa, ela tomou a iniciativa de pedir aos alunos ‘pares’ que dessem as mãos. Inicialmente houve certa resistência por parte de alguns, mas, com a insistência da professora, todos deram as mãos.

O exercício foi realizado com os pares da *função* afim e, posteriormente, com a *função* quadrática. As fotos a seguir mostram um aluno pegando a mão de outro (correspondência um a um) no caso da *função* afim e, no caso da *função* quadrática, um aluno pegando na mão de outros dois.



Figuras 92, 93, 94, 95: Fotos da atividade da Aula 08 - Encontrando o seu par.
Fonte: O autor, 2014.

A sequência dos alunos na sala, após a formação de todos os pares com a lei da *função* afim, formou uma figura semelhante à que se segue.

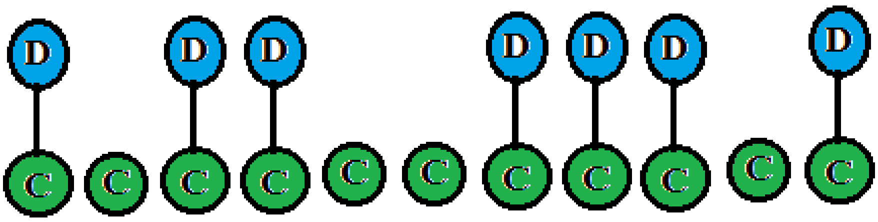


Figura 96: Esquema da formação de pares ordenados desenvolvida pelos alunos na Aula 08 - *Função* afim.
Fonte: O autor, 2014.

No caso da *função* quadrática, a formação foi parecida com a figura a seguir.

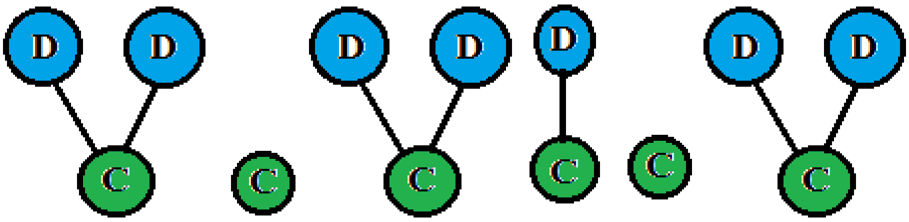
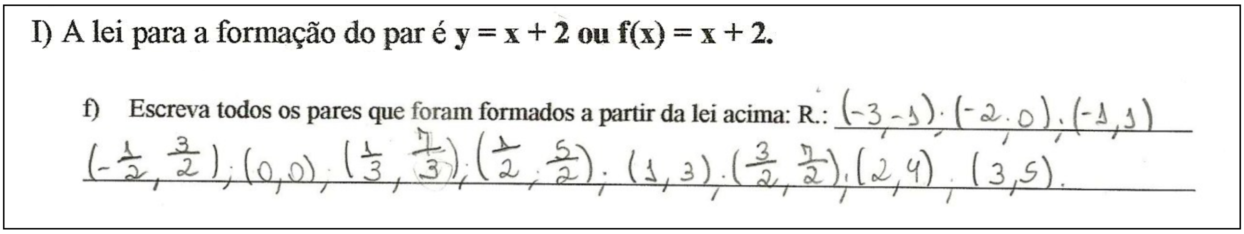


Figura 97: Esquema da formação de pares ordenados desenvolvida pelos alunos na Aula 08 – *Função* quadrática.
Fonte: O autor, 2014.

Com essa atividade foi possível ampliar com os alunos os nexos conceituais do conceito de *função*: fluência, interdependência, variável e campo de variação. Conforme já citado na coluna de observações do quadro das categorias de análise, os episódios revelam que as discussões entre os alunos ampliam o entendimento dos termos como par ordenado, domínio, imagem e contradomínio. No final de cada sequência realizou-se uma discussão e análise sobre a formação dos pares, tais como: se um elemento do conjunto domínio poderia ter mais de um correspondente no contradomínio, se poderiam sobrar elementos no conjunto domínio ou no conjunto contradomínio, se um elemento do contradomínio poderia ter três correspondentes. Essa análise, aliada à visualização da configuração dos pares ordenados, proporcionou uma melhor compreensão da relação de dependência, da variabilidade, de conjunto domínio, contradomínio e imagem.

A seguir apresentamos as respostas dos grupos G1 e G5 às questões referentes à formação dos pares ordenados.



I) A lei para a formação do par é $y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$.

f) Escreva todos os pares que foram formados a partir da lei acima: R.: $(-3,-1)$, $(-2,0)$, $(-1,1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $(1,3)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $(2,4)$, $(3,5)$.

Figura 98: Resposta do Grupo 1 à letra ‘f’ da 1ª questão da atividade proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pelo Grupo 1.

f) Escreva todos os pares que foram formados a partir da lei acima: R.: (-3;-1);(-2;0),(-1,1),
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$;(0,2),$(\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$,$(\frac{1}{2}, \frac{2}{2})$,(1,3),$(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$,(2,4,(3,5).

Figura 99: Resposta do Grupo 5 à letra 'f' da 1ª questão da atividade proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pelo Grupo 5.

III) A lei para a formação do par é y = x² ou f(x) = x²

f) Escreva todos os pares que foram formados a partir da lei acima: R.: (-3,9);(-2,4);(-1,1)
$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$,(0,0),$(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ (1,1) $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$,(2,4),(3,9).

Figura 100: Resposta do Grupo 1 à letra 'f' da 3ª questão da atividade proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pelo Grupo 1.

f) Escreva todos os pares que foram formados a partir da lei acima: R.: (-3,9),(-2,4),(-1,1),
$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$,(0,0),$(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$,$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$,(1,1),$(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$,(2,4),(3,9)

Figura 101: Resposta do Grupo 5 à letra 'f' da 3ª questão da atividade proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pelo Grupo 5.

4.3 Análise dos resultados: Construindo gráficos

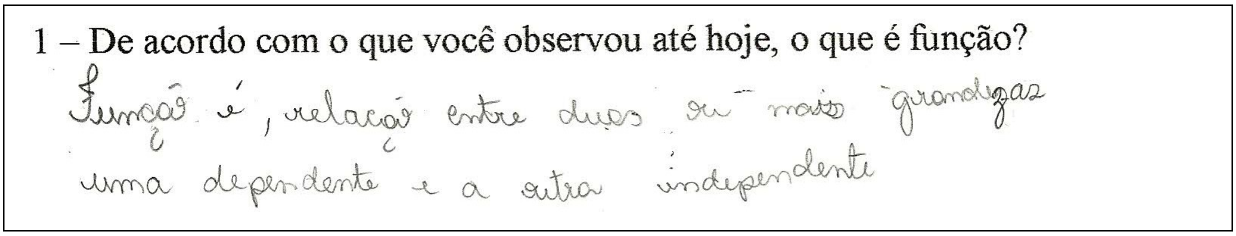
A atividade "Construindo gráficos" foi realizada no dia 30 de outubro. Antes de entregarmos a folha de atividades, fizemos uma avaliação individual sobre os conceitos vistos até o momento. Entregamos uma folha a todos os alunos e pedimos que explicassem com suas palavras, em um tempo médio de 15 minutos: O que é *função*? Quais os elementos envolvidos no conceito de *função*? O que é *função* afim (de 1º grau)? O que é *função* quadrática (de 2º grau)? Pode-se observar nas respostas dos alunos a evolução dos nexos conceituais externos (elementos envolvidos no conceito de *função*) e internos (a relação de dependência entre os elementos de dois conjuntos) comparando as respostas de alguns alunos para mesma questão nas aulas de nº 08 e 09. Na aula anterior a aluna A L havia respondido que "*Função* é a relação entre duas grandezas em que uma irá depender da outra". Para a mesma pergunta, na aula seguinte, após a introdução de novos conceitos e nexos conceituais, a resposta da aluna foi:

1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?
Função é a relação entre dois conjuntos, onde a imagem pode ter dois domínios, mas o domínio não pode ter duas imagens.

Figura 102: Resposta da aluna A L à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 09.

Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pela aluna A L do Grupo 1.

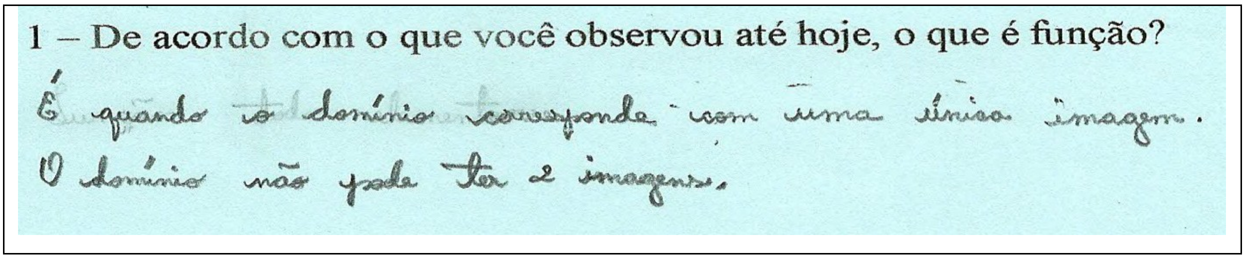
O aluno GA havia respondido que "*Função* é a relação entre duas grandezas". A sua resposta para a mesma pergunta na aula seguinte aparece acrescida da relação de dependência entre as grandezas, como se pode observar:


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

Função é, relação entre duas ou mais grandezas uma dependente e a outra independente

Figura 103: Resposta do aluno GA à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pelo aluno GA do Grupo 1.

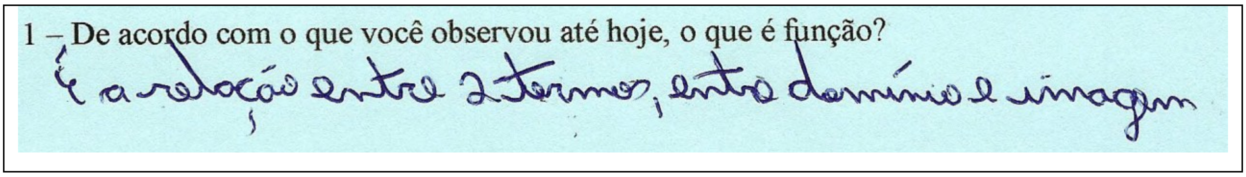
A aluna LE respondeu que "*Função* é uma relação". A sua resposta na aula seguinte é acrescida dos nexos conceituais de relação de dependência, domínio e imagem.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

É quando o domínio corresponde com uma única imagem. O domínio não pode ter 2 imagens.

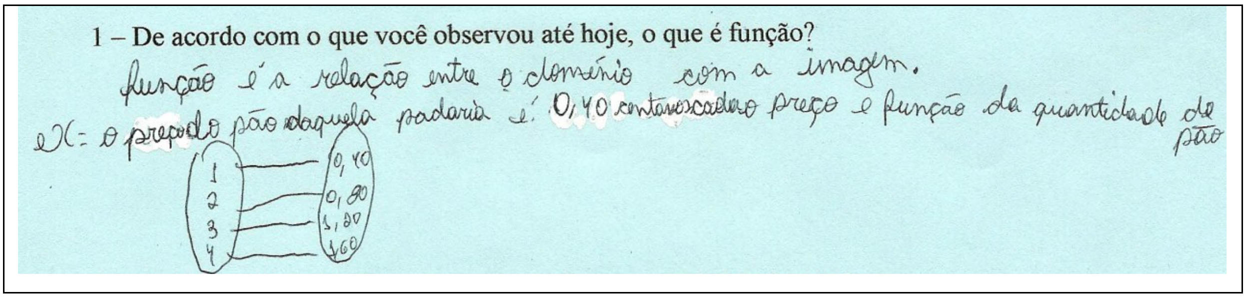
Figura 104: Resposta da aluna LE à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pela aluna LE do Grupo 1.

Outras respostas dos alunos evidenciam a relação de dependência entre os conjuntos domínio e imagem na composição do conceito de *função*.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

É a relação entre 2 termos, entre domínio e imagem

Figura 105: Resposta do aluno MA à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, respondida pelo aluno MA do Grupo 5.


1 – De acordo com o que você observou até hoje, o que é função?

função é a relação entre o domínio com a imagem.
ex: o preço do pão daquela padaria é 0,40 centavos cada o preço é função da quantidade de pão

Figura 106: Resposta do aluno L V à 1ª questão da avaliação proposta na Aula 09.
Fonte: Folha de atividades da Aula 9, respondida pelo aluno L V do Grupo 5.

Decorrido o tempo estipulado, recolhemos a folha de avaliação, organizamos a turma em grupos e entregamos a folha de atividades do dia. Nela, inicialmente, recordamos a definição de *função* afim (do 1º grau) e *função* quadrática (do 2º grau), com as fórmulas, condições de existência e campo de variação. Em seguida, retomamos os dois conjuntos de pares ordenados construídos na aula anterior – o primeiro, referente à *função* afim; e o segundo, à *função* quadrática – e orientamos os alunos para construirem dois planos cartesianos no verso da folha (que já estava devidamente quadriculada) e, na sequência, marcar todos os pares ordenados nesses planos. O primeiro era referente à *função* afim e o segundo, à *função* quadrática.

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **Aula 09** Data: ____/____/2014

Nome: ____ Grupo: ______

09. Construindo gráficos.

1. Vamos relembrar:

I – Chamamos de ***Função do 1º grau*** ou ***função afim*** a toda função f: R →R definida pela lei ou fórmula matemática: $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ (com a, b reais e a≠0).

II – Chamamos de ***Função de 2º grau*** ou ***função quadrática*** a função f: R →R. definida pela lei ou fórmula matemática: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$ (com a, b e c números reais e a ≠ 0).

2. Na aula anterior, nós trabalhamos com a formação de pares 'ordenados' a partir de leis de formação e dos conjuntos dados. Obtivemos dois conjuntos de pares ordenados:

I – No primeiro caso, a lei para a formação do par era **y = x + 2 ou f(x) = x + 2.** Alguns dos pares ordenados obtidos foram: {(-3, -1); (-2, 0); ($-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$); (0, 2); ($\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$); (1, 3); (2, 4); (3, 5)}.

No verso dessa folha há um quadriculado.

- Com um traço horizontal, você deve dividi-lo em duas partes mais ou menos iguais;
- Na primeira parte do quadriculado, você vai representar um "sistema de eixos cartesiano" que se cruzam no ponto representado pelo par (0, 0). O eixo horizontal representa o domínio (D) e o eixo vertical, o contradomínio (Cd);
- Em seguida, marque no gráfico, todos os pontos representados pelos pares acima. Veja que na definição da função de 1º grau (ou afim), os conjuntos domínio e contradomínio são formados por todos os números reais (R). Assim, entre um par e outro existem infinitos outros pares. Por isso, podemos unir todos os pontos obtidos;
- Descubra que figura irá formar com a união desses pontos.

II – No segundo caso (item III), a lei para a formação do par era **y = x² ou f(x) = x².** Alguns dos pares ordenados obtidos foram: {(-3, 9); (-2, 4); (-1, 1); ($-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$); (0, 0); ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$); (1, 1); (2, 4); (3, 9)}.

- Marque no gráfico, todos os pontos representados pelos pares acima;
- Verifique que figura irá formar com a união dos pontos. Descubra como ela se chama.

3. Após construir os dois gráficos, responda às questões:
   a. Qual a principal característica do gráfico da função do 1º grau ou função afim?
   b. Qual a principal característica do gráfico da função do 2º grau ou função quadrática?

Obrigado pela participação.
Pesquisador: José Divino Neves

Quadro 28: Construindo gráficos
Fonte: O autor, 2014.

Nesse episódio houve muita dificuldade por parte dos alunos para construir o plano cartesiano, ordenar e nomear os eixos, e marcar nele os pontos referentes aos pares ordenados. Os alunos conversavam bastante, estavam dispersos nesse dia, pois, com a aproximação do final do ano letivo, já pensavam em festas de formatura, aula da saudade, camiseta comemorativa, dentre outros. A expectativa era de que os alunos construíssem dois gráficos, mas eles conseguiram terminar apenas o primeiro. Ao que nos pareceu, as maiores dificuldades dos alunos estavam na marcação dos elementos do par ordenado no plano cartesiano. Com certa facilidade eles estabeleceram a relação do eixo 'y' (vertical) com o contradomínio e o eixo 'x' (horizontal) com o domínio. Mas, tiveram dificuldades, por exemplo, na marcação dos pares (0, 2); $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$, dentre outros. Em ambos os casos, o problema era de localização desses valores na reta numerada. Essa questão, no entanto, é perfeitamente compreensível e esperada, pois em raras oportunidades os alunos do 9º ano trabalharam com representações gráficas envolvendo eixos coordenados e marcação de pares ordenados.

AULA 09: **Construindo gráficos**		
OBJETIVOS: I – Representar graficamente (no plano cartesiano) os pares ordenados de uma *função* afim e de uma *função* quadrática. II – Perceber que o gráfico da *função* afim definida de R em R é uma reta. III – Perceber que o gráfico da *função* quadrática definida de R em R é uma parábola. IV – Perceber a proporcionalidade como essência do conceito de *função* afim. V – Perceber a simetria como essência do conceito de *função* quadrática.		
Categorias de análise	**Ações/atividades dos alunos**	**Observações**
Condições objetivas da Atividade de Estudo (COAE)	A L G1: Mas como é que eu vou ligar o menos dois no zero? Chama o Vinícius. GA G1: O próximo já é a equação. Professora, como é que liga no zero? Menos dois com o zero? VAL: O domínio não é menos dois? Então marca aqui. Onde está o menos dois? GA G1: Aqui. VAL: Ok. Como a imagem é zero, você vai subir, descer ou permanecer? GA G1: Permanecer. VAL: Você não vai deslocar nada na reta da imagem. Então, vai ficar no ‘menos dois’. GA G1: Ah, tá. Então, faz uma bolinha no ‘menos dois’.	Nesse episódio, a atuação da professora (VAL) e do pesquisador JD foi determinante para a marcação correta dos pares ordenados.
Desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos (DMPA)	JD: Quem quer marcar o primeiro par no quadro? Vamos um de cada grupo. GA G1: Vocês querem que eu vá lá ao quadro? Eu vou. A L G1: Vai lá representar um ponto. A L G1: Está difícil isso aqui, não é? Parece. GA G1: É menos meio e três meios. A L: Três divididos por dois, dá um e meio. Então, um e meio dá antes de dois. GA G1: Professora, uma fração: três meios, a gente pode colocar em forma de número decimal? VAL: Pode. GA G1: Ó. Um meio é aqui.	Como o quadro branco da sala de aula é ‘quadriculado’, facilitou a construção gráfica. Assim, cada grupo participou marcando um par ordenado no plano cartesiano construído no quadro.
Formação do conceito (FC)	GA G1: Valéria, é ‘x’ e ‘y’, não é? Domínio e imagem? VAL: É. GA G1: Então, está certo. VAL: Mas aqui está errado. Aqui você pulou um quadradinho a mais. Não coloca os números, não; se você colocar, confunde tudo. GA G1: Então, vamos lá. Menos três é o domínio e nove é a imagem. THA G1: Domínio não é aqui? O menos três não é o domínio? GA G1: Mas ele desce e vai lá pro nove. A V G1: José Divino, está certo? JD: Um meio está ligado com cinco meios. Um meio é aqui e cinco meios, lá. Cinco meios são dois e meio; fica entre o nº dois e o três. A L G1: Tem que ter dois pensamentos ao mesmo tempo; tem que pesar no domínio e na imagem. A L G1: O menos três é com menos um. A V G1: Como é que liga o menos dois com o zero? GA G1: Coloca o ponto no ‘menos dois’. A L G1: Tem que ser na linha.	Por meio dos diálogos entre os componentes do G1, há evidências de que os alunos evoluíram um pouco mais nos conceitos de domínio e imagem e a relação de dependência entre eles.

	JD: O que está acontecendo com os pontos vermelhos? GA G1: Estão alinhados formando uma reta. JD: Se ligarmos os pontos vermelhos, vamos formar uma reta. LE G1: O primeiro número que vem no par é o domínio? A L G1: É.	
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	YA G1: A gente vê primeiro os números e depois vê o tamanho. A L G1: Aqui já estão os pares. Então, por exemplo: o nove vai ficar nessa linha aqui, não é? GA G1: Isso. E o três é aqui. Não. Espera aí, está errado. Esse aqui é domínio e esse é imagem. A L G1: Como é? GA G1: Você precisa saber qual é o domínio e qual é a imagem. A L G1: Mas de todo jeito o menos três vai ficar aqui? GA G1: Sim. GA G1: Ah, eu fiz do lado errado. A V G1: Eu estou tentando falar pra você que está errado, mas você não escuta.	A comunicação entre os alunos revela que, algumas vezes, eles marcaram elementos do domínio na imagem e vice-versa. A participação dos colegas é determinante no processo de regulação e avaliação.

Quadro 29: Episódios da Aula 09: Construindo gráficos.
Fonte: O autor, 2014.

Seguem os gráficos construídos pelos grupos: G1, G2, G4, G5 e G6. O Grupo 3 não concluiu a construção do gráfico. Os grupos G1 e G6 marcaram todos os pontos, mas não traçaram a reta. Na folha de orientação da atividade havíamos esclarecido que os conjuntos domínio e contradomínio compreendiam todos os números reais e, portanto, existiam infinitos pontos entre dois indicados no gráfico. Dessa forma, poderiam unir os pontos e formar uma reta. Percebe-se que alguns pontos foram marcados de forma incorreta e, portanto, não ficaram alinhados com os demais. Essa questão confirma a tese de que na formação do conceito o raciocínio do aluno deve partir do geral para o particular. Se ele soubesse desde o início que o gráfico seria uma reta, intuitivamente já entenderia que, se os pontos não estão alinhados, alguma coisa está errada.

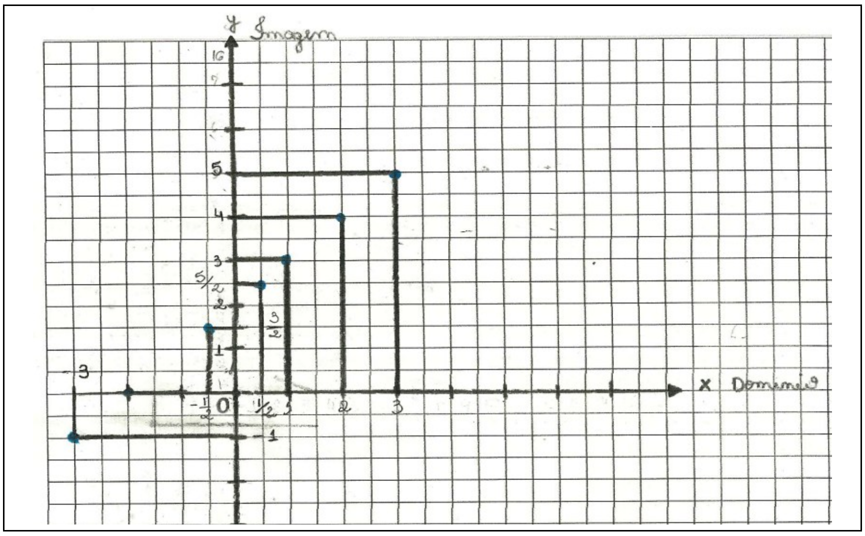


Gráfico 11: Construído pelo G1. Aula 09, questão 2, item I.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, Grupo 1.

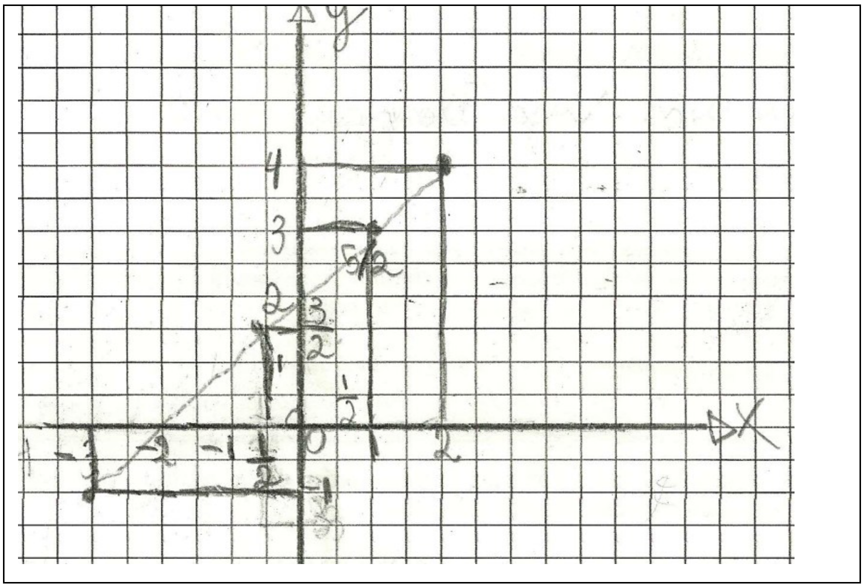


Gráfico 12: Construído pelo G2. Aula 09, questão 2, item I.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, Grupo 2.

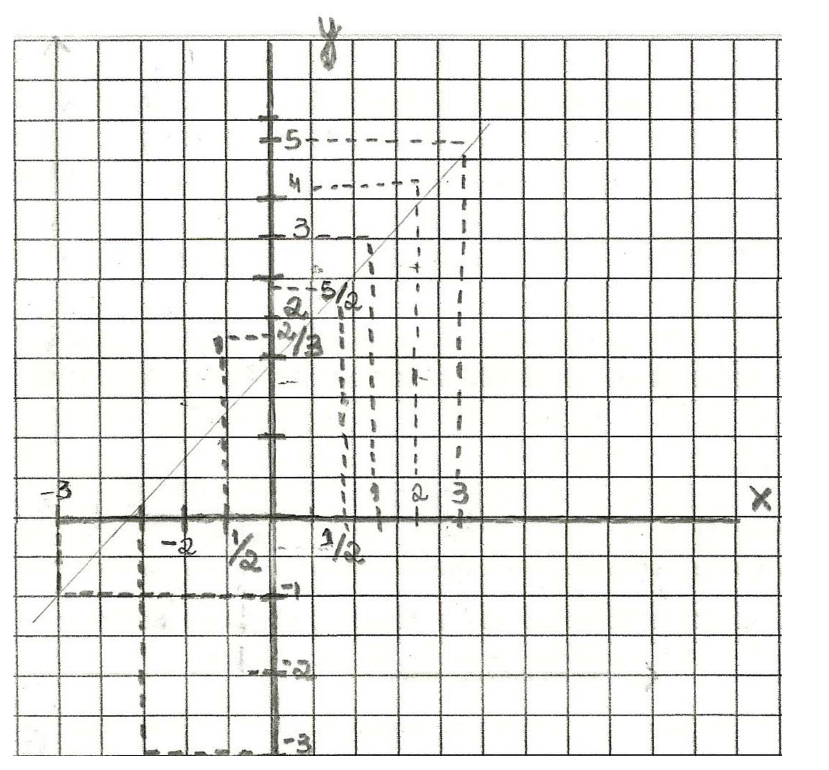


Gráfico 13: Construído pelo G4. Aula 09, questão 2, item I.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, Grupo 4.

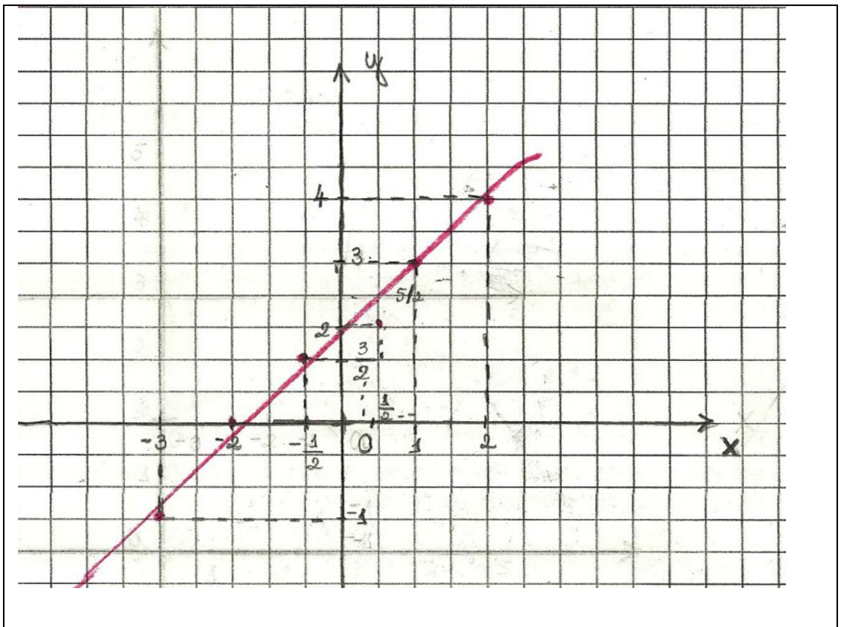


Gráfico 14: Construído pelo G5. Aula 09, questão 2, item I.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, Grupo 5.

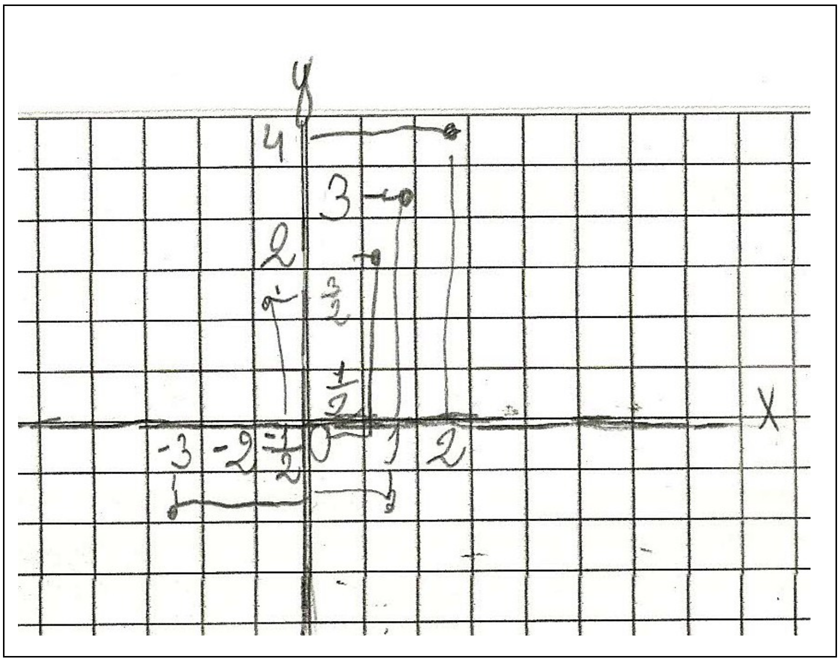


Gráfico 15: Construído pelo G6. Aula 09, questão 2, item I.
Fonte: Folha de atividades da Aula 09, Grupo 6.

4.4 Análise dos resultados da décima e décima primeira atividades propostas: O Kmplot e a *função* afim; O Kmplot e a *função* quadrática

Uma das orientações didáticas contidas nos PCN é o uso das tecnologias da informação para facilitar a construção e a compreensão de aspectos estáticos da matemática, bem como o desenvolvimento de habilidades tais como atenção, percepção, memória, criatividade e estética. Após a construção manual do gráfico da *função* afim, na aula anterior, em que foi proposta a construção de dois gráficos, mas os alunos conseguiram completar apenas um, a atividade, agora, era construir gráficos utilizando as tecnologias da informação e comunicação. A princípio, planejamos usar o programa 'Winplot' desenvolvido para o sistema Windows para a construção dos gráficos das *funções* 'afim' e 'quadrática'. Os computadores do laboratório de informática da escola, no entanto, não possuem o sistema Windows, mas o Linux. Assim, tivemos que fazer uma adaptação para utilizar um programa alternativo chamado Kmplot, compatível com o Linux (que é semelhante e tem a mesma função), em substituição ao Winplot.

O laboratório de informática da escola possui 20 computadores, mas apenas 12 estavam em condições de uso, sendo que alguns deles apresentaram problemas de última hora (durante a realização do trabalho) e tiveram que ser descartados. Por essa razão, decidimos trabalhar com apenas dois grupos de, no máximo, seis alunos cada um. A primeira aula no laboratório de informática ocorreu no dia 6 de novembro. Nesse dia não houve aula na escola. De acordo com o calendário escolar, era dia de formação dos professores e, portanto, não haveria expediente para os alunos. Como a escola estaria aberta e diante da impossibilidade de conseguir outro dia para realizar a atividade, combinamos com os alunos que concordaram em comparecer ao laboratório de informática nos mesmos horários, para a realização da atividade. Dez alunos se comprometeram a ir, mas apenas sete compareceram nesse dia.

O trabalho realizado no laboratório de informática nos proporcionou momentos e oportunidades para importantes reflexões. Os alunos, em geral, têm extrema facilidade e habilidade para lidar com os recursos da informática, assim foram rápidos e precisos na construção dos gráficos. Inicialmente, foi apresentada aos alunos uma justificativa sobre a atividade, sobre o uso das tecnologias da informação em construções matemáticas, qual e como funciona o programa e o que seria desenvolvido naquela aula. Após as explicações os alunos acessaram o programa Kmplot e tiveram alguns minutos para explorá-lo. Em seguida, com as orientações contidas na folha de atividades, construíram três sequências, num total de 13 gráficos sobre *função* afim. Após cada sequência responderam às questões propostas. Eles completaram o trabalho em pouco mais de uma aula (50 minutos) e com excelente precisão nas respostas. Na aula anterior haviam construído um gráfico em uma aula.

FOLHA DE ATIVIDADE – 03: **Funções e expressões gráficas– função afim e função quadrática.**
Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **Aula 10** Data: ____/____/2014
Nome: ____ Grupo: ______

10. O Kmplot e a função afim.
Objetivos:
I - Cientificar-se da fórmula geral da função afim: $\mathbf{f(x) = ax + b}$ e de que o gráfico dessa função (quando definida em R) é uma reta.
II - Identificar na representação gráfica da função afim, seus principais elementos tais como: inclinação (sentido) da reta, raiz da função e o coeficiente linear.
III – Compreender a proporcionalidade como essência do conceito de função afim.

INSTRUÇÕES:
1. Redividir os grupos de 4, 5 ou 6 alunos em grupos de 2 (dois) alunos.
2. Escolher um computador para cada dupla.
3. Ligar o computador; procurar nos programas do Linux Educacional o Kmplot na seção de Matemática.
4. Inicialmente, sob a orientação do pesquisador, vamos conhecer o programa e os seus principais recursos.
5. Após a investigação, vamos escolher a opção "função afim ou função do 1º grau".
6. Escreva aleatoriamente uma expressão algébrica (lei de formação) de uma função afim e peça para traçar o gráfico. Repita esse procedimento com mais três exemplos aleatórios, sem apagar o anterior. Sempre com exemplos de função afim. **NÃO** apague as suas construções gráficas sem consultar o pesquisador.

7. Salve essas construções em “Todos os arquivos” na pasta “Aluno”, com o título G1A seguido dos dois primeiros nomes da dupla. Ex.: G1A André e Luana.
8. Agora, vamos construir uma sequência de gráficos de funções afim:
   a. f(x) = 3x – 2;
   b. f(x) = -3x – 1;
   c. f(x) = 4x;
   d. y = 2x + 1
   e. y = -x + 2
   f. Salve essas construções em “Todos os arquivos” na pasta “Aluno”, com o título G1B seguido dos dois primeiros nomes da dupla.
9. A que conclusões vocês chegaram com relação ao ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas (oy)? E o eixo das abscissas (ox)? Como são chamados esses pontos?

10. Vamos construir outra sequência de gráficos da função afim:
   a. y = -2x + 3
   b. y = -x + 3
   c. y = 2x -3
   d. f(x) = x -3
   e. Salve essas construções em “Todos os arquivos” na pasta “Aluno”, com o título G1C seguido dos dois primeiros nomes da dupla.
11. A que conclusões vocês chegaram com relação à inclinação da reta?

12. Vamos construir uma última sequência de gráficos da função afim:
   a. y = 4x -1
   b. y = 4x
   c. y = 4x + 1
   d. y = 4x +2
   e. Salve essas construções em “Todos os arquivos” na pasta “Aluno”, com o título G1D seguido dos dois primeiros nomes da dupla.
13. A que conclusões vocês chegaram com relação à posição das retas?

Quadro 30: O Kmplot e a *função* afim.
Fonte: O autor, 2014.

FOLHA DE ATIVIDADE – 03: **<u>Funções e expressões gráficas – função afim e função quadrática.</u>**

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **<u>Aula 11</u>** Data: ____/____/2014

Nome: ____ Grupo: ______

11. O Kmplot e a função do 2º grau.

Objetivos:

I - Cientificar-se da fórmula geral da função quadrática: $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, e de que o gráfico dessa função (quando definida em R) é uma parábola.

II - Identificar na representação gráfica da função quadrática, seus principais elementos tais como: sentido da curva (parábola), raízes da função e o coeficiente linear.

III – Compreender a simetria como essência do conceito de função quadrática.

<u>INSTRUÇÕES:</u>

1. Redividir os grupos de 4, 5 ou 6 alunos em grupos de 2 (dois) alunos.
2. Escolher um computador para cada dupla.
3. Ligar o computador; procurar nos programas do Linux Educacional o Kmplot na seção de Matemática.
4. Inicialmente, sob a orientação do pesquisador, vamos conhecer o programa e os seus principais recursos.
5. Após a investigação, vamos escolher a opção "função quadrática ou função do 2º grau".
6. Escreva aleatoriamente uma expressão algébrica (lei de formação) de uma função quadrática e peça para traçar o gráfico. Repita esse procedimento com mais três exemplos aleatórios, sem apagar o anterior. Sempre com exemplos de função quadrática. **NÃO** apague as suas construções gráficas sem consultar o pesquisador.
7. Salve essas construções em "Todos os arquivos" na pasta "Aluno", com o título G2A seguido dos dois primeiros nomes da dupla. Ex.: G2A André e Luana.
8. Agora, vamos construir uma sequência de gráficos de funções quadráticas:
   a. f(x) = 3x^2 – 4x + 2;
   b. f(x) = x^2-3x+2;
   c. f(x) = 3x^2-4x +3;
   d. y = x^2-3x-2;
   e. y = 3x^2-4x.
   f. Salve essas construções em "Todos os arquivos" na pasta "Aluno", com o título G2B seguido dos dois primeiros nomes da dupla.
9. A que conclusões vocês chegaram com relação ao ponto onde a curva (parábola) corta o eixo das ordenadas (oy)? E o eixo das abscissas (ox)? Como são chamados esses pontos?

10. Vamos construir outra sequência de gráficos da função quadrática:
    a. y = 2x^2 + 3x-1
    b. y = -2x^2 + 3x-1
    c. y = -3x^2+4x+2
    d. f(x) = 3x^2+4x+2
    e. Salve essas construções em "Todos os arquivos" na pasta "Aluno", com o título G2C seguido dos dois primeiros nomes da dupla.
11. A que conclusões vocês chegaram com relação ao sentido (à orientação) da parábola?

12. Vamos construir uma última sequência de gráficos da função quadrática:
    a. y = 3x^2
    b. y = 3x^2-12
    c. y = -2x^2 + 4x-3
    d. y = x^2-3x +3
    e. Salve essas construções em "Todos os arquivos" na pasta "Aluno", com o título G2D seguido dos dois primeiros nomes da dupla.
13. A que conclusões vocês chegaram com relação ao número de ponto em que a parábola corta o eixo das abscissas (ox)?

Quadro 31: O Kmplot e a *função* quadrática.
Fonte: O autor, 2014.

AULAS 10 e 11: **O Kmplot e a *função* afim; o Kmplot e a *função* quadrática**

OBJETIVOS:

I - Cientificar-se das fórmulas gerais da *função* afim: $\mathbf{f(x) = ax + b}$ e de que o gráfico dessa *função* (quando definida em R) é uma reta.

II - Cientificar-se da fórmula geral da *função* quadrática: $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, e de que o gráfico dessa *função* (quando definida em R) é uma parábola.

III – Identificar, na representação gráfica da *função*, seus principais elementos, tais como: inclinação (sentido) da reta, raiz da *função* e o coeficiente linear.

IV - Identificar na representação gráfica da *função* quadrática, seus principais elementos, tais como: sentido da curva (parábola), raízes da *função* e o coeficiente linear.

V – Compreender a proporcionalidade como essência do conceito de *função* afim.

VI – Compreender a simetria como essência do conceito de *função* quadrática.

Categorias de análise	Ações/atividades dos alunos	Observações
Condições objetivas da Atividade de Estudo (COAE)	JD: Tudo certo? Todos conseguiram um computador? Vamos começar, então? THA : Professor, veja se é assim. JD: Não, você tem que abrir 'Todos os programas'; vai à Área de trabalho. Esse computador está com problema. O computador não está configurado como os demais. Assentem de dois em dois. A L: Eu tenho que deixar o f(x) aqui? JD: O f(x) é o 'y', vai ficar. Ele é fixo. Você vai apagar e reescrever só a lei da *função*. J V: Não dá para pôr duas ao mesmo tempo. JD: Dá. J V: E ficar na tela? JD: Isso. Olha aqui. Ela vai ficando lá. Agora você faz o outro. Volta aqui em "Criar outro gráfico". JD: Então responde, aproveita que está na tela e responde, depois você salva. JO: Responder o quê? JD: Aqui, o número nove. O que está pedindo para vocês responderem? JO: A que conclusão vocês chegaram quanto ao ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas (OY) e o eixo das abscissas (OX)? JD: Vamos por parte: onde a reta corta o eixo OY? Pega a primeira reta que vocês construíram. A reta verde, onde cortou o eixo das ordenadas? Vai seguindo com o *mouse* para verificar. Onde cortou? Que ponto é esse? JO: Menos dois. JD: Ok. Qual é a equação? JO: 3x -2. JD: Ok. Passa para a próxima. Onde cortou? KA: No menos um. JD: Qual é a equação? KA: 3x – 1. Ah, entendi. JD: Agora vocês já sabem onde corta? KA: Sim. JD: Como é a fórmula da *função* afim (do primeiro grau)? KA: y = ax + b	Apesar de alguns problemas técnicos com os computadores, as atividades no laboratório de informática foram realizadas de acordo com o planejado e os resultados obtidos foram bastante satisfatórios. As condições físicas e estruturais foram adequadas e os alunos assimilaram o que deveriam desenvolver.

	JD: Vai cortar onde? KA: No menos um? JD: Mas, na expressão geral, como ele é chamado? KA: É o ‘b’? JD: Então está cortando sempre no termo ‘b’. É o termo que está sozinho e por isso é chamado termo independente. Agora, a outra parte da pergunta é onde corta o eixo ‘x’. Quando corta o ‘x’, significa que o ‘y’ é zero. GA: Professor, eu não entendi a nº 10. Eu não estava presente na aula passada. O termo independente é aquele do final? JD: Isso. É o que não tem ‘x’. Ele é independente de ‘x’ porque ele não está relacionado com o ‘x’. Então, corta o eixo ‘y’ no termo independente. E o eixo ‘x’, nas raízes. GA: E por que no eixo ‘x’ é raiz? JD: Quando você resolve uma equação do 2º grau, iguala a zero e acha os valores de ‘x’; as raízes. Não é? GA: Duas. JD: Ou uma, ou nenhuma. Depende do valor de delta. Veja que nos seus exemplos existem casos de duas raízes e de nenhuma raiz. No entanto, não têm casos de uma raiz. Faça um exemplo aí: $3x^2$. Veja que o gráfico só encosta no eixo ‘x’. Só tem uma raiz. Se você resolver a equação $3x^2 = 0$ vai encontrar apenas uma raiz ($x = 0$). Quando tem duas raízes, corta em dois pontos; quando tem uma raiz, corta em um ponto; e quando não tem nenhuma raiz, não corta em nenhum ponto.	
Desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos (DMPA)	KA: Tem que fazer tudo primeiro para salvar? JD: Não. Você vai salvando. Faz cada um e salva. Vocês vão salvar em Arquivo>Salvar como>Todos os arquivos>G1 A e os nomes de vocês. Só o primeiro nome ou os dois primeiros, quando for composto. JO: Só isso? A V: Só. Agora, tem que remover e criar outro. A V: Professor, esse aqui é o exemplo, não é? JD: É o exemplo. Agora vocês vão fazer os que eu especifiquei na folha. Vocês salvaram o exemplo, agora vão fazer a primeira. A V: Eu falei. A V: Pronto, agora é só fazer os três juntos e salvar. A gente vai ter que salvar o nº 8 em G1 B e os exemplos em G1 A. YA: Que legal! GA: A parábola não termina? JD: Não, é infinita, assim como a reta. Boa pergunta. ÉRIKA: E os alunos conseguem aprender o mesmo que aprendiam na sala de aula? JD: Quanto aos gráficos, acho que sim. A informática permite a construção, visualização e estética de forma muito rápida. JD: Vamos ver aqui com a A V, o que ela assimilou da construção dos gráficos da *função* afim. A V: É sempre uma reta; se o ‘a’ for positivo, é assim [menos inclinada]; se o ‘a’ for negativo, é assim [mais	O ponto alto dessa atividade foi a motivação e a participação dos alunos. O alto nível de concentração e a habilidade dos alunos para lidar com as ferramentas (software) foi algo notável. Eles não conheciam o “kmplot”, mas, em poucos minutos obtiveram o domínio necessário e construíram todos os gráficos propostos de forma eficiente.

	inclinada]. JD: Onde corta o eixo ‘y’? A V: No nº 2. JD: E o que ele representa na equação? A V: O ‘b’. JD: E onde corta o eixo ‘x’? A V: Não lembro o nome. JD: Quando você resolve a equação, o que você encontra? A V: O valor de ‘x’. JD: E como ele é chamado? A V: Raiz. JD: Isso acontece também na equação quadrática, só que o seu gráfico não é uma reta, mas uma parábola. ÉRIKA: É uma ferramenta e tanto, eu estou me lembrando de quando estudei. A V: José Divino, veja se está correto. JD: Curva para baixo é na questão seguinte; aqui é para responder sobre o ponto que corta o eixo ‘y’. A L: Nós colocamos em seguida. JD: Então vocês colocaram que corta o eixo ‘y’ no termo independente. Certo. E poderá não cortar o eixo ‘x’, mas, quando corta... são as raízes. Então, completa aí. Se cortar o eixo ‘x’, os pontos são chamados ‘raízes’. ÉRIKA: Esse Kmplot aí lhe facilitou alguma coisa? Você viu alguma coisa nele que, na sala de aula, não estava conseguindo ver; ou, no geral, você só confirmou com a imagem dele o que você já sabia, ou ficou mais do que você já tinha capturado do conteúdo? GA: Ficou mais do que eu tinha capturado; tirando da matéria que a gente está estudando sobre *função* quadrática, não. Agora, pelo que eu vi ali, se troca os números [expoentes], dá uma coisa totalmente diferente. ÉRIKA: E aqui você visualiza na hora. Lá na sala você teria que fazer toda uma simulação, calculando manualmente. GA: É isso. Eu achei interessante esse programa, gostei muito. ÉRIKA: É uma ferramenta e tanto? GA: É.	
Formação do conceito (FC)	A L: José Divino, pode responder assim? JD: Ok. A reta corta o eixo ‘y’ no ponto chamado coeficiente linear. E onde ela corta o eixo ‘x’? A L: Na raiz. JD: Ela corta o eixo ‘x’ no ponto chamado raiz. A *função* tem raiz? Tem, onde o ‘y’ vale zero. JD: Vocês estão terminando? Já respondeu a primeira? A V: José Divino, confere pra gente. JD: Onde corta o eixo ‘y’? A V: No termo independente. JD: Isso. No coeficiente linear ou termo independente. E onde corta o eixo ‘x’? A V: Na raiz. JD: Ok. Agora vocês vão descobrir quando é que a reta	Esses diálogos evidenciam a importância da atuação do professor na ZDP dos alunos, principalmente quando a atividade se adianta ao que o aluno já sabe

	está em um sentido ou em outro. Observem os sinais da *função* em cada caso. A V: É o primeiro sinal. JD: Qual? A V: Desse aqui. JD: Qual letra que representa esse número aí lá na regra da *função*? A V: O ‘a’. JD: Então o sentido da reta está relacionado com o sinal de ‘a’? A V: Eu acho que é assim: negativo pra cá e positivo pra lá. JD: Então, quando o valor de ‘a’ for positivo, a reta está inclinada nesse sentido; e quando o ‘a’ for negativo, nesse sentido? A V: É. JD: Ok. Então, o sinal de ‘a’ tem a ver com a inclinação da reta. A inclinação da reta é determinada pelo sinal de ‘a’. JD: E a última pergunta, com relação à posição das retas? Quando elas têm a mesma inclinação em relação à horizontal, como elas são chamadas? A L, A V e J V: Paralelas. JD: E o que é que tem em comum nas retas paralelas? [Silêncio.] A V: O ‘x’ é igual. JD: Na verdade é o coeficiente de ‘x’; é o valor de ‘a’. Então podemos dizer que, quando o ‘a’ for igual, as retas são... J V: Elas são paralelas. JD: Ok. Então, toda vez que você tem duas retas com o mesmo valor de ‘a’, elas são paralelas. A L: José Divino, veja se está certo. JD: O que você percebeu? Todas as curvas estão viradas para cima? A L: Sim. JD: A curva está para cima; o vértice é que está embaixo. Observe o que acontece com os sinais de ‘a’. Faça os outros gráficos e observe. Observe, ainda, onde corta o eixo ‘y’. A L: Corta nesse número aqui, no termo que está sozinho. JD: Veja que, sem olhar no gráfico, já é possível saber onde vai cortar. Como é que chama esse termo? GA: Esse aqui? O ‘c’? JD: Nós já vimos lá na *função* afim que ele é chamado ‘termo independente’. Então, podemos concluir que a parábola corta o eixo ‘y’ nesse termo. LE: José Divino, eu estou respondendo à nº 9 e me esqueci do nome. JD: O nome do eixo ‘y’? LE: É. JD: O eixo ‘y’ é chamado ‘eixo das ordenadas’. Corta o eixo das ordenadas no... como é chamado esse termo? LE: Independente. E o eixo ‘x’, corta na raiz. JD: Só que nesse caso, vão ter quantas raízes? LE: Duas.	

	JD: Mas tem caso que não vai cortar ou vai cortar em apenas um ponto. Se esses pontos são as raízes, existem casos em que a equação não tem raiz? O que você acha? LE: Parece que tem a ver com o valor de delta? JD: Isso. Se delta for menor que zero... LE: Não têm raízes. JD: Então. O número de raízes varia de acordo com o valor de delta.	
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)	GA: A L, você já fez uma virada para baixo? Eu já fiz. JD: Por que ela está virada para baixo? GA: Porque o ‘a’ é negativo. JD: É isso. GA: O meu gráfico deu uma reta. JD: Se deu uma reta é porque não pôs o quadrado. A L: Gabriel, essa curva sua aí está errada, não é parábola. JD: É, está errada. Veja o que você errou. Veja aqui, você pôs elevado à oitava potência. GA: Ah, é. GA: Olha que legal, A L. Veja como ficou. A L: Deixa-me ver a sua resposta. Negativo é para baixo e positivo é para cima? GA: É. Você ainda não tinha percebido? Quando o ‘a’ é negativo, fica para baixo; e quando ele é positivo, fica para cima. A L: Vinícius, quando o ‘a’ é positivo, fica para baixo ou para cima? VIN: Quando o ‘a’ é positivo, ela é crescente. Você quer saber na reta ou na parábola? A L: Parábola. VIN: Quando o ‘a’ é positivo a concavidade é para cima. GA: Viu? Mas se for pensar, a curva é para baixo. VIN: Sim, mas a gente olha a concavidade. A L: Mas eu coloquei: quando o ‘a’ for positivo, a curva será para baixo. GA: É para cima. VIN: A concavidade é para cima.	A troca de informações entre os alunos foi fator determinante para a construção e compreensão dos gráficos. Ao completar um determinado gráfico, o aluno logo se adiantava em mostrar aos colegas e questionar: está certo? o seu ficou assim?

Quadro 32: Síntese da análise das Aulas 10 e 11: O Kmplot e a *função* afim; o Kmplot e a *função* quadrática.
Fonte: O autor, 2014.

Seguem os gráficos construídos pelos alunos e as respostas às questões propostas.

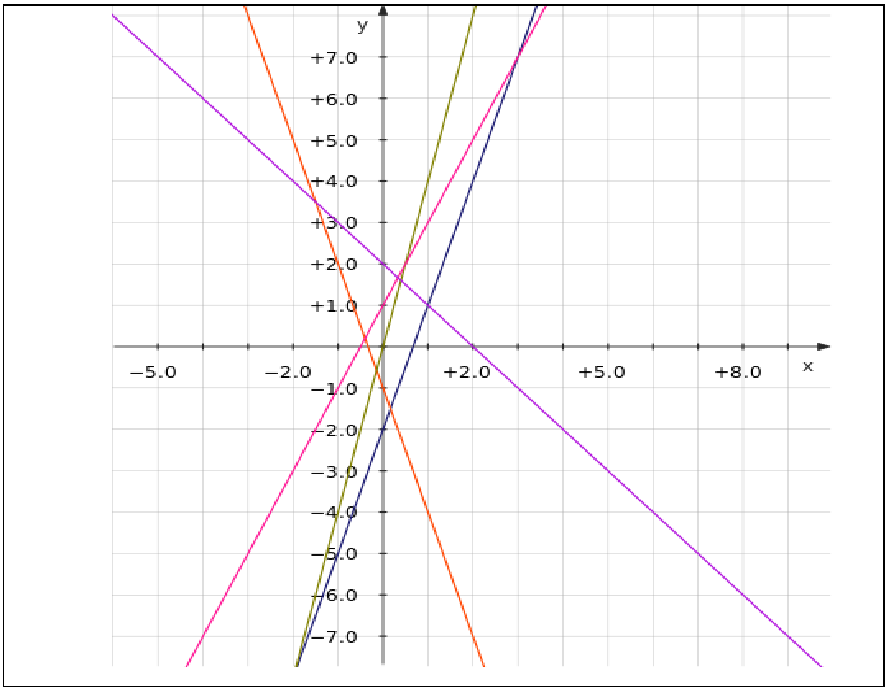


Gráfico 16: Sequência de gráficos da questão nº 8 da Aula 10, Grupo 1.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 1, Aula 10.

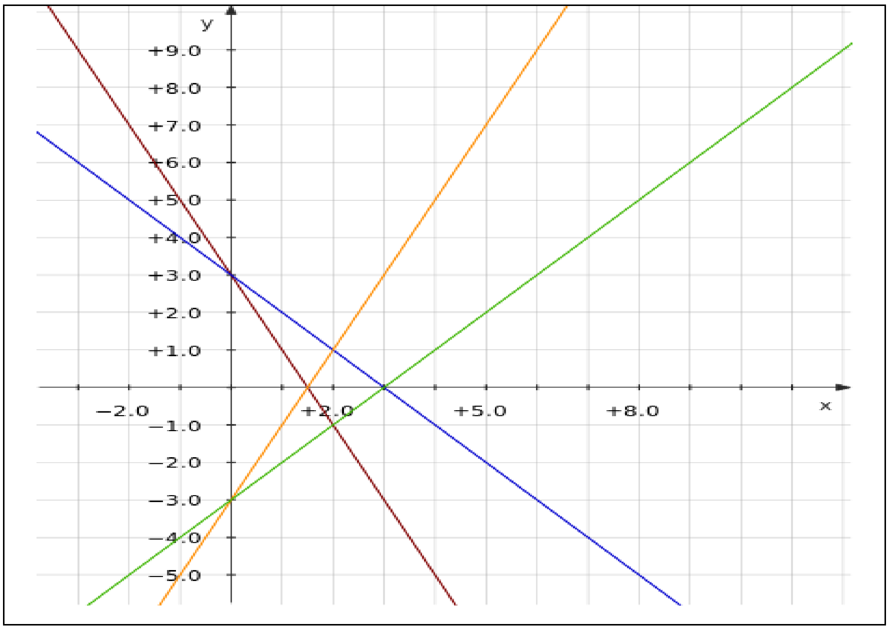


Gráfico 17: Sequência de gráficos da questão nº 10 da Aula 10, Grupo 1.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 1, Aula 10.

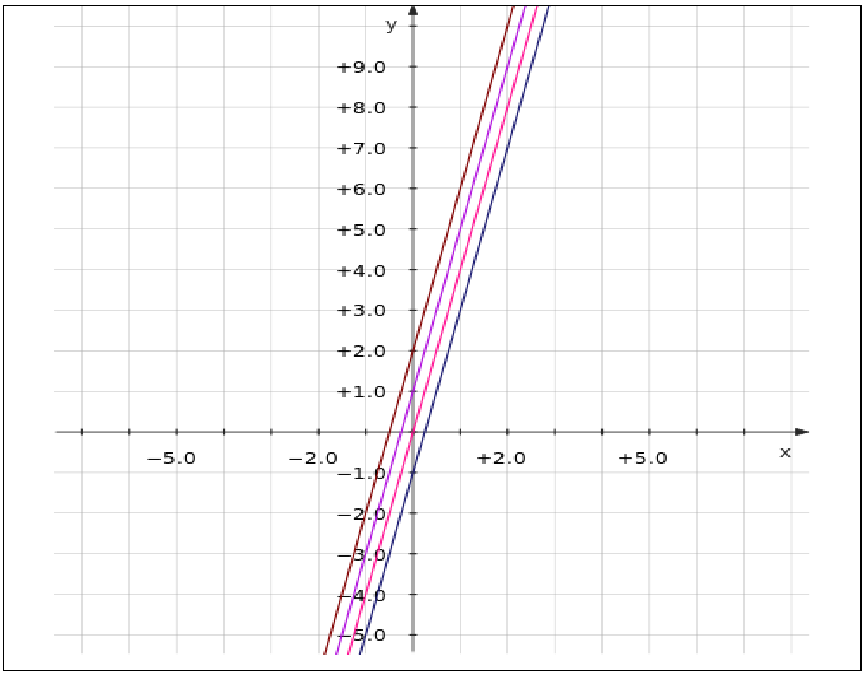


Gráfico 18: Sequência de gráficos da questão nº 12 da Aula 10, Grupo 1.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 1, Aula 10.

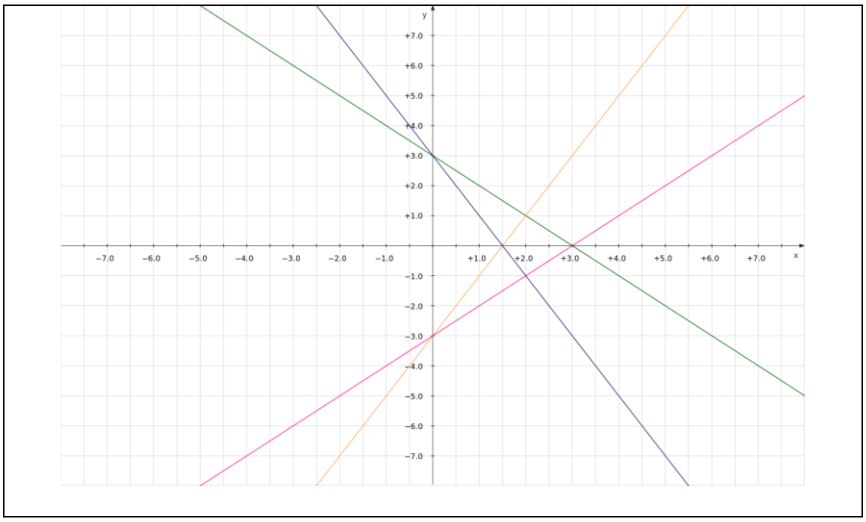


Gráfico 19: Sequência de gráficos da questão nº 8 da Aula 10, Grupo 2.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 2, Aula 10.

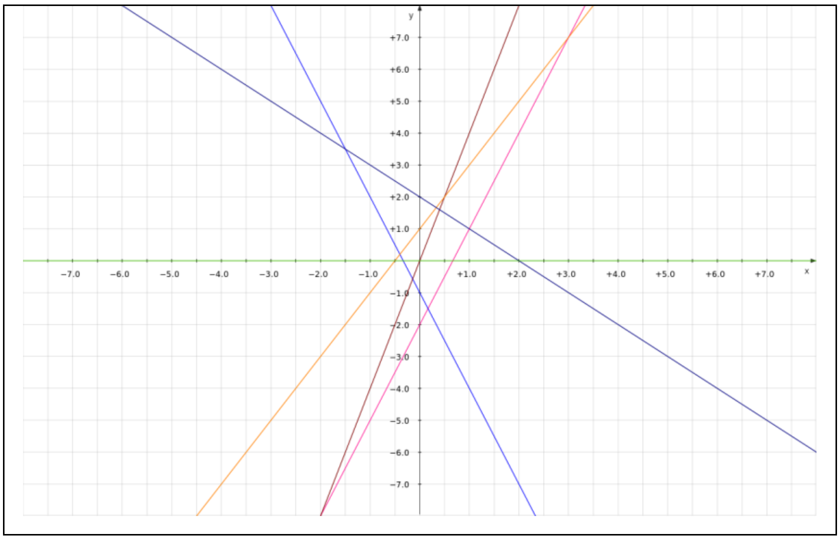


Gráfico 20: Sequência de gráficos da questão nº 10 da Aula 10, Grupo 2.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 2, Aula 10.

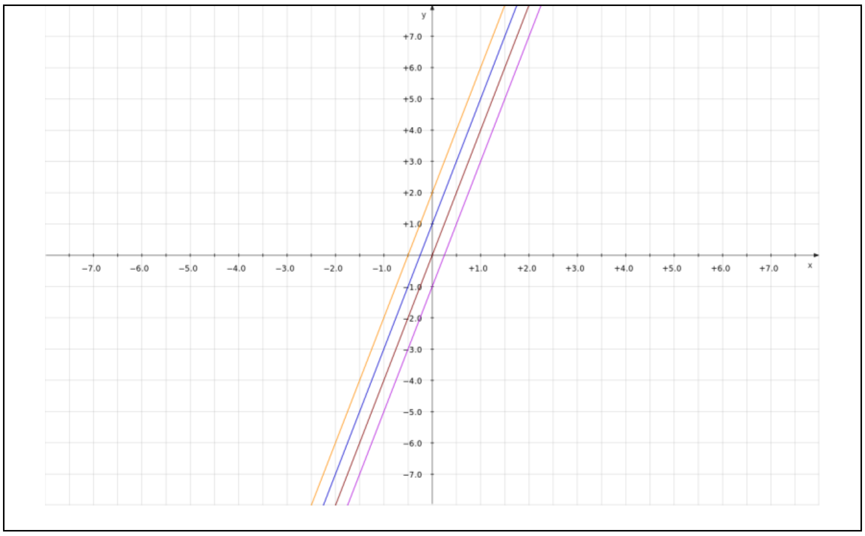


Gráfico 21: Sequência de gráficos da questão nº 12 da Aula 10, Grupo 2.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 2, Aula 10.

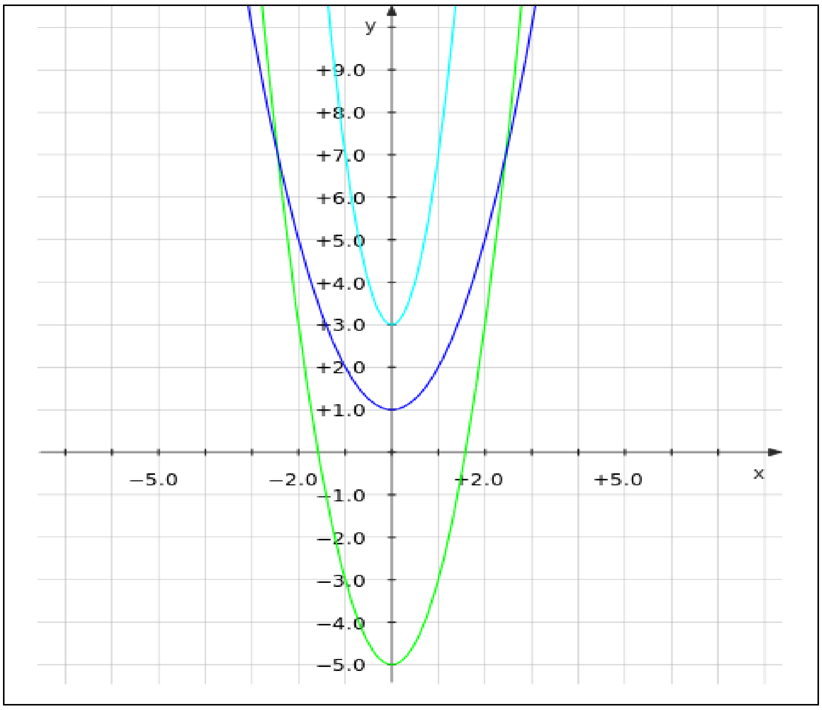


Gráfico 22: Sequência de gráficos da questão nº 6 da Aula 11, Grupo 1.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 1, Aula 11.

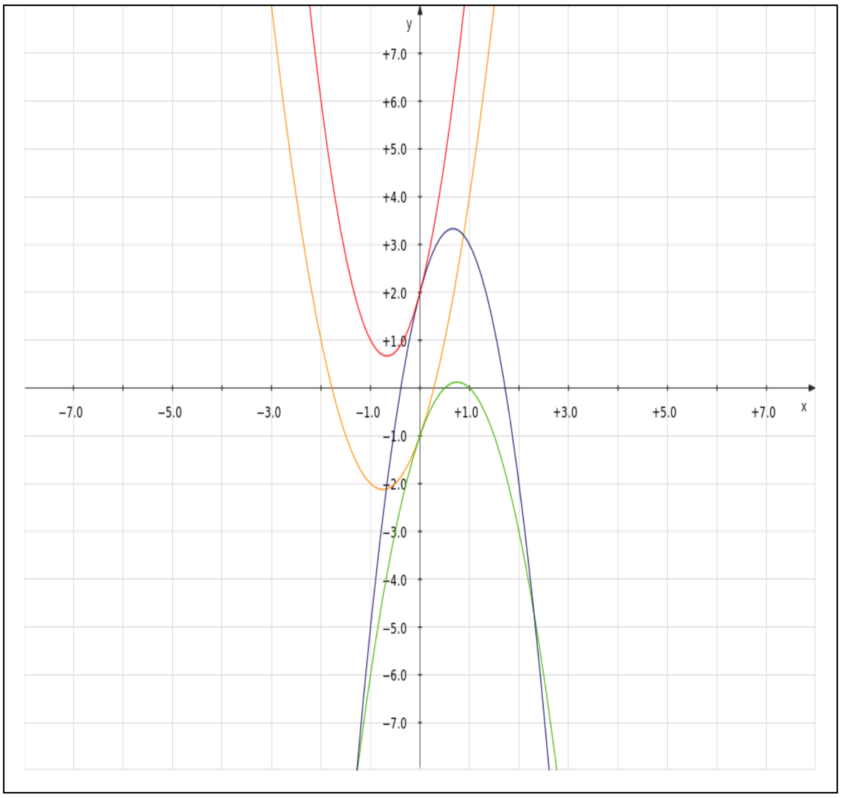


Gráfico 23: Sequência de gráficos da questão nº 10 da Aula 11, Grupo 1.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 1, Aula 11.

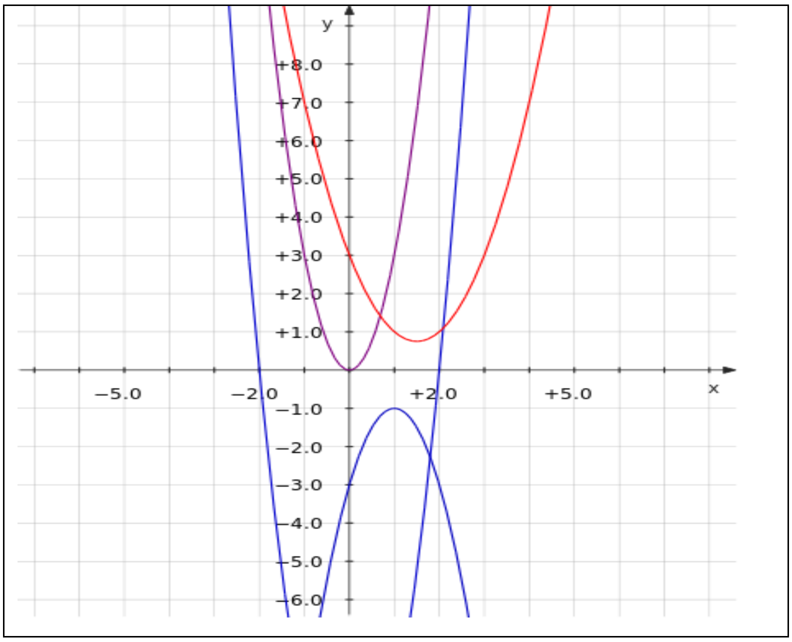


Gráfico 24: Sequência de gráficos da questão nº 12 da Aula 11, Grupo 1.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 1, Aula 11.

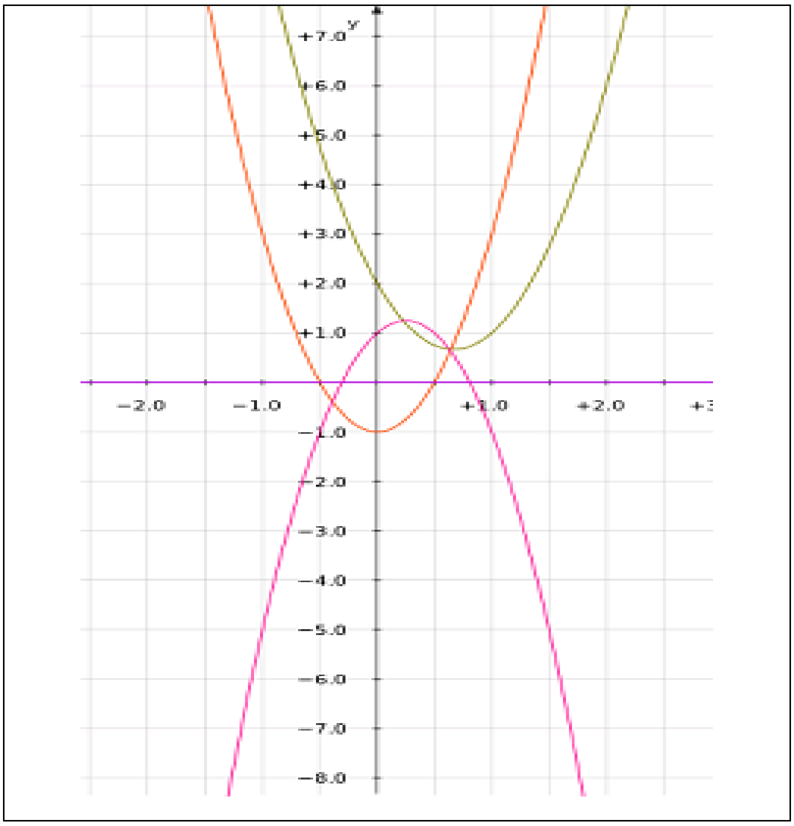


Gráfico 25: Sequência de gráficos da questão nº 8 da Aula 11, Grupo 2.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 2, Aula 11.

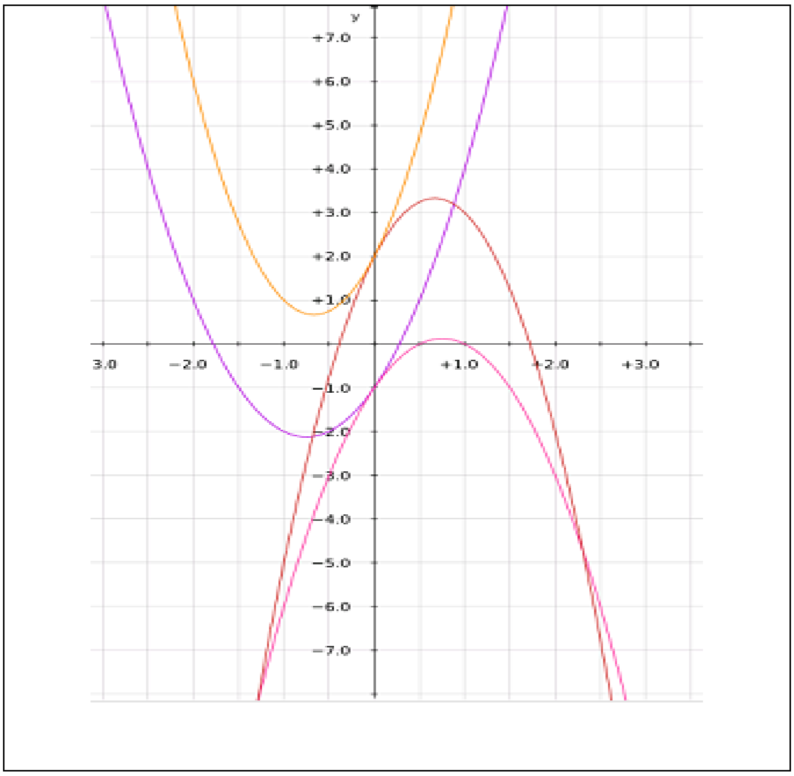


Gráfico 26: Sequência de gráficos da questão nº 10 da Aula 11, Grupo 2.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 2, Aula 11.

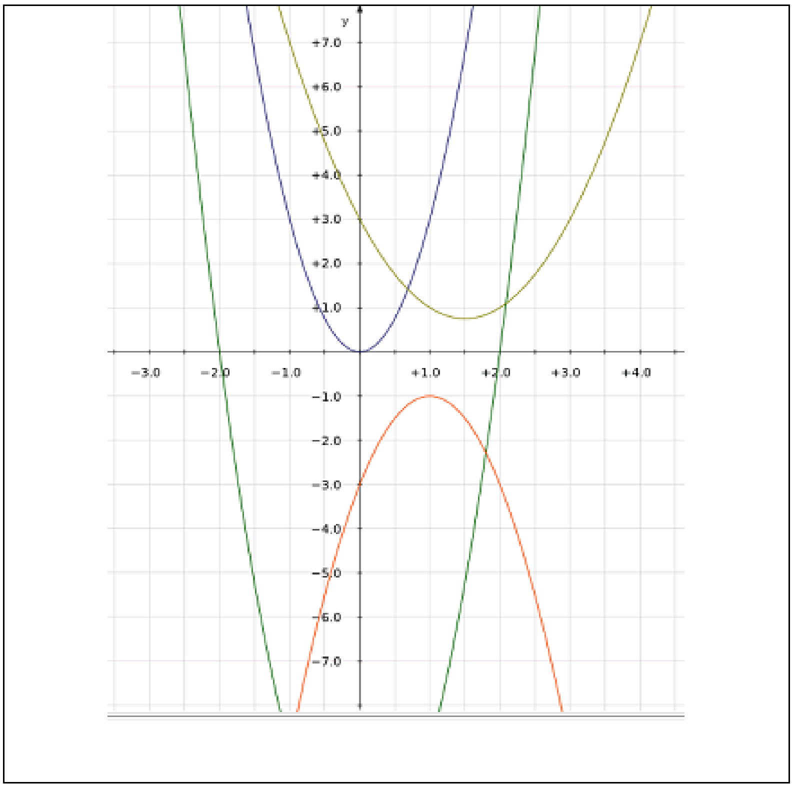


Gráfico 27: Sequência de gráficos da questão nº 12 da Aula 11, Grupo 2.
Fonte: Arquivo gerado nos computadores da escola pelo Grupo 2, Aula 11.

9. A que conclusões vocês chegaram com relação ao ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas (oy)? E o eixo das abscissas (ox)? Como são chamados esses pontos?

A reta corta no eixo y último número, chamado de b. São chamadas coeficiente linear; a reta corta o eixo X na raiz

Figura 107: Resposta do Grupo 1 à questão 9 da Aula 10.
Fonte: Folha de atividades da Aula 10, respondida pelo Grupo 1.

9. A que conclusões vocês chegaram com relação ao ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas (oy)? E o eixo das abscissas (ox)? Como são chamados esses pontos?

Nas ordenadas, a reta corta no último número. Ele é chamada de independente. No eixo das abscissas, se chama raiz

Figura 108: Resposta do Grupo 2 à questão 9 da Aula 10.
Fonte: Folha de atividades da Aula 10, respondida pelo Grupo 2.

11. A que conclusões vocês chegaram com relação à inclinação da reta?

Quando o a for negativo o ângulo é maior que 90°. Quando o a for positivo o ângulo é menor que 90°.

Figura 109: Resposta do Grupo 1 à questão 11 da Aula 10.
Fonte: Folha de atividades da Aula 10, respondida pelo Grupo 1.

11. A que conclusões vocês chegaram com relação à inclinação da reta?

Quando o "a" é negativo é maior que 90° e quando é positivo é menor que 90°

Figura 110: Resposta do Grupo 2 à questão 11 da Aula 10.
Fonte: Folha de atividades da Aula 10, respondida pelo Grupo 2.

9. A que conclusões vocês chegaram com relação ao ponto onde a curva (parábola) corta o eixo das ordenadas (oy)? E o eixo das abscissas (ox)? Como são chamados esses pontos?

Quando o a for positivo a curva será para cima. O eixo y corta no termo independente. O eixo x poderá não ter raízes; mas quando cortam são chamadas

Figura 111: Resposta do Grupo 1 à questão 9 da Aula 11.
Fonte: Folha de atividades da Aula 11, respondida pelo Grupo 1.

9. A que conclusões vocês chegaram com relação ao ponto onde a curva (parábola) corta o eixo das ordenadas (oy)? E o eixo das abscissas (ox)? Como são chamados esses pontos?

Oy ⇒ no coeficiente linear

Ox ⇒ nas raízes

Figura 112: Resposta do Grupo 2 à questão 9 da Aula 11.
Fonte: Folha de atividades da Aula 11, respondida pelo Grupo 2.

11. A que conclusões vocês chegaram com relação ao sentido (à orientação) da parábola?

Quando o a for positivo a parábola terá sua curva para cima. Quando o a for negativo a parábola terá sua curva para baixo

Figura 113: Resposta do Grupo 1 à questão 11 da Aula 11.
Fonte: Folha de atividades da Aula 11, respondida pelo Grupo 1.

11. A que conclusões vocês chegaram com relação ao sentido (à orientação) da parábola?

Todas são cortadas na letra "C", se o sinal for + o sentido é assim U
se for menos é assim ∩

Figura 114: Resposta do Grupo 2 à questão 11 da Aula 11.
Fonte: Folha de atividades da Aula 11, respondida pelo Grupo 2.

13. A que conclusões vocês chegaram com relação ao número de ponto em que a parábola corta o eixo das abscissas (ox)?

Quando Δ for menor que 0 não possui raízes, não corta o eixo.
Δ maior que 0 possui duas raízes, corta o eixo em dois lugares.
Se Δ for igual à zero é igual a 1. 12

Figura 115: Resposta do Grupo 1 à questão 13 da Aula 11.
Fonte: Folha de atividades da Aula 11, respondida pelo Grupo 1.

13. A que conclusões vocês chegaram com relação ao número de ponto em que a parábola corta o eixo das abscissas (ox)?

$\Delta > 0 \rightarrow$ duas raízes
$\Delta < 0 \rightarrow$ nenhuma raiz
$\Delta = 0 \rightarrow$ uma raiz

Figura 116: Resposta do Grupo 2 à questão 13 da Aula 11.
Fonte: Folha de atividades da Aula 11, respondida pelo Grupo 2.

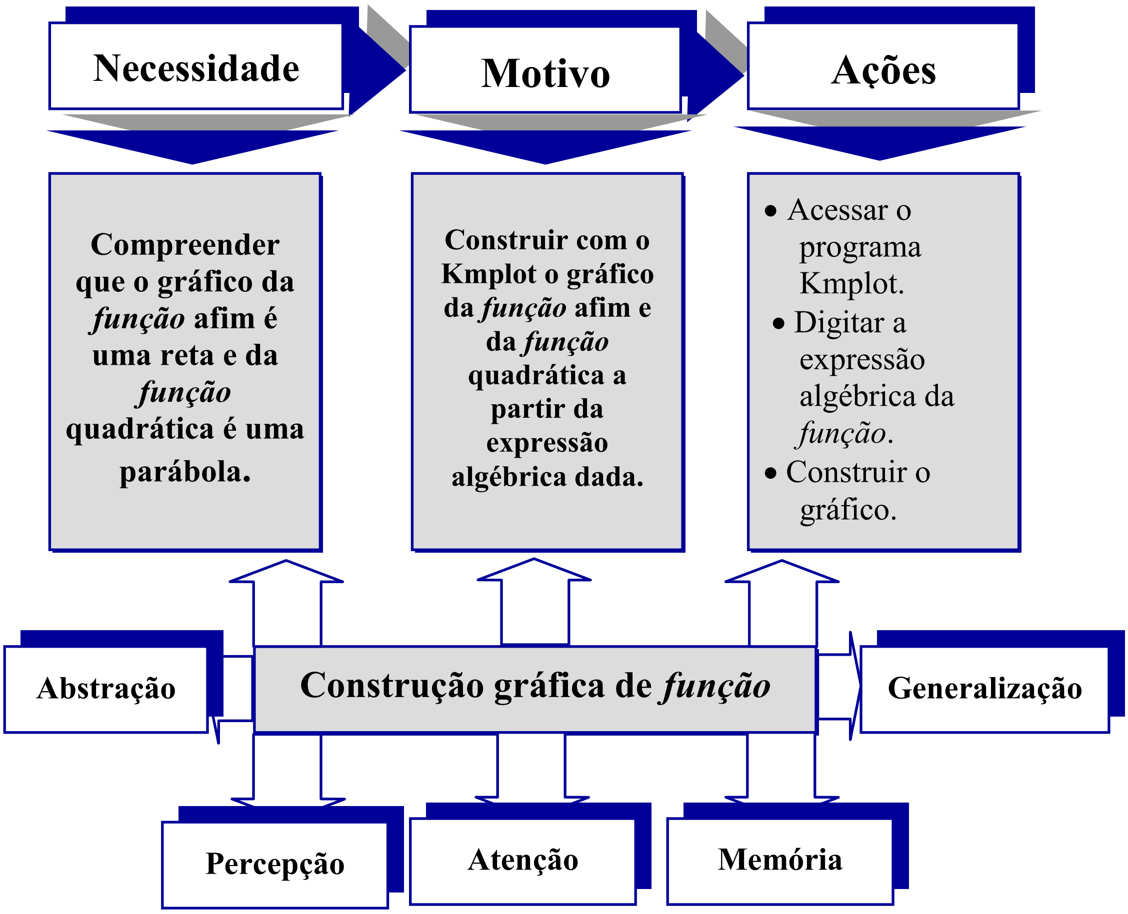
A atividade desenvolvida com os alunos no laboratório de informática teve como principais objetivos: perceber a forma do gráfico da função afim (uma reta) e a forma do gráfico da função quadrática (uma parábola); identificar a inclinação da reta a partir do coeficiente de x; identificar a raiz e o coeficiente linear da função afim; perceber a forma do gráfico da função quadrática; saber quando a curva é voltada para cima ou para baixo; identificar o vértice, o coeficiente linear e as raízes (se existirem). A partir do diálogo entre os alunos e das respostas às questões propostas, é possível verificar que houve assimilação dos alunos com relação à função afim e o tipo de gráfico (reta), bem como com relação aos pontos onde a reta corta os eixos.

Quanto à função quadrática, percebe-se que os alunos assimilaram que o gráfico é uma parábola, que estará voltada para baixo quando o valor de ‘a’ for negativo, e para cima quando esse valor for positivo. Pelo entusiasmo dos alunos e a rapidez com que completaram a construção dos gráficos e responderam às questões propostas, é correto afirmar que esta foi uma das atividades que lhes proporcionou maior motivação. O trecho extraído do diálogo entre os alunos, no episódio da aula 12, corrobora a afirmação:

> A L: Você veio na aula passada aqui fazer o plano cartesiano, L V?
> L V: Não.
> A V: É. De matemática. Foi a melhor coisa do ano.

A sequência de gráficos e as respostas emitidas pelos alunos demonstram que houve compreensão na relação entre função, o gráfico correspondente e os seus principais elementos.

O quadro a seguir representa a organização da atividade de ensino.



Quadro 33: Esquema da atividade de ensino e aprendizagem: Construção gráfica de *função*.
Fonte: O autor, 2014.

4.5 Análise dos resultados: Jogando com as funções

A última atividade realizada com os alunos foi no dia 27 de novembro de 2014. Nesse dia, levamos os dois grupos que haviam realizado o trabalho com o Kmplot ao laboratório de informática, para praticar o jogo sobre *funções*. As regras do jogo estão na folha de atividade da Aula 12, com objetivos de: identificar pares ordenados pertencentes às *funções* dadas, diferenciar variável independente e dependente (domínio e imagem), desenvolver habilidades para identificar os elementos do gráfico (inclinação, coeficiente linear, raízes, vértice e concavidade da parábola).

Apesar de ter dedicado apenas uma aula para essa atividade, foi possível perceber que ela despertou o interesse e a atenção de todos os alunos envolvidos. Ficou evidente, ainda, a evolução com que identificavam pares pertencentes às *funções*, principalmente o coeficiente linear, as raízes e o vértice, no caso da *função* quadrática. O baralho com *funções* foi organizado de maneira que os pares pertencentes às retas ou às parábolas fossem identificados com facilidade, evitando os cálculos mais demorados e complicados para não desestimular os jogadores e nem interferir na dinâmica do jogo. Assim, ao ‘comprar’ uma carta, o aluno percebia logo se o par pertencia ou não à curva em questão.

FOLHA DE ATIVIDADE – 03: **Funções e expressões gráficas – função afim e função quadrática.**
Escola Municipal Urbana Frei Eugênio. **Aula 12** Data: ____/____/2014

Nome: ____ Grupo: ______

12. Jogando com as funções afim e quadrática.

Objetivos do jogo:
I - Identificar os principais pares ordenados (pontos) de uma função no gráfico cartesiano (que será colocado sobre a mesa), a partir de sua expressão algébrica (lei de formação).
II - Despertar a atenção na formação do par “ordenado”, identificando a variável independente (normalmente representada por x) e a variável dependente (normalmente representada por y).
III - Desenvolver habilidade para identificar elementos do gráfico, tais como: inclinação, raízes, vértice e coeficiente linear.
O jogo pode ter duas ou mais configurações.
1ª configuração: É constituído de um baralho em que cada carta corresponde a um par ordenado. Cada participante recebe sete cartas e as demais ficam viradas (no monte) sobre a mesa. O objetivo do jogo é formar primeiro 10 (dez) pontos. Quem o fizer será o vencedor da partida. Após receber as cartas, cada jogador verifica se alguma carta (par ordenado) coincide com pontos do gráfico sobre a mesa. O primeiro jogador compra uma carta e descarta uma. Segue o jogo até que alguém complete 10 (dez) pontos.
Pontuação das cartas:
- Par contendo o vértice da função (do 2º grau): 5 pontos;
- Par contendo uma raiz da função (função do 1º ou do 2º grau): 4 pontos;
- O coeficiente linear: 3 pontos;
- Par contendo qualquer outro ponto da função: 2 pontos.

- Par acumulando dois ou três dos caracteres acima: 6 pontos. Ex.: vértice e raiz; vértice, raiz e coeficiente linear.

2ª configuração: A diferença desta para a primeira é que, neste caso, cada carta representa um elemento do par: abscissa ou ordenada. O aluno terá de formar o par em ordem (ordenado). A cor das cartas do domínio (abscissa) é diferente da cor das cartas do contradomínio (ordenada). Nesta versão, cada participante recebe dez (dez) cartas e as demais ficam viradas (no monte) sobre a mesa. O objetivo do jogo é formar primeiro 10 (dez) pontos. Quem o fizer será o vencedor da partida. Após receber as cartas, cada jogador verifica se tem algum "par ordenado" que coincide com pontos do gráfico sobre a mesa. O primeiro jogador compra uma carta e descarta uma. Segue o jogo até que alguém complete 10 (dez) pontos.

Pontuação das cartas: A mesma da configuração anterior.

Obs.:

i) O professor (pesquisador) escolhe um, dentre vários gráficos de funções afins e quadráticas, previamente definidos e impressos;

ii) Inicialmente, é conveniente começar com um gráfico de função afim e com pontos bem definidos (fáceis de constatar) no papel quadriculado;

iii) O jogo pode ser jogado com dois ou mais participantes; de forma individual ou de parceiros. Neste caso, os parceiros vão contribuindo (cada um na sua vez de jogar) com a formação dos pares até completar os pontos necessários.

Quadro 34: Jogando com as *funções.*
Fonte: O autor, 2014.

<table>
<tr><td colspan="3">AULA 12: Jogando com as funções afins e quadráticas e Avaliação final</td></tr>
<tr><td colspan="3">OBJETIVOS:
I - Identificar os principais pares ordenados (pontos) de uma função no gráfico cartesiano (que será colocado sobre a mesa), a partir de sua expressão algébrica (lei de formação).
II - Despertar a atenção na formação do par “ordenado”, identificando a variável independente (normalmente representada por x) e a variável dependente (normalmente representada por y).
III - Desenvolver habilidade para identificar elementos do gráfico, que fazem parte do conceito de função afim e quadrática, tais como: inclinação, raízes, vértice e coeficiente linear.
IV – Realizar uma avaliação final do trabalho com os alunos.</td></tr>
<tr><th>Categorias de análise</th><th>Ações/atividades dos alunos</th><th>Observações</th></tr>
<tr><td>Condições Objetivas da Atividade de Estudo (COAE)</td><td>JD: Gente, hoje nós vamos fazer um jogo, vocês querem jogar individual ou de dupla?
A V: De duplas.
JD: Então vamos jogar de duplas, tem uma dupla aqui, vamos fazer uma dupla de lá. São os dois do lado de cá jogando com os dois do lado de lá. Vamos revezando, quem perder sai e entra outra dupla. São oito alunos, dão quatro duplas.
L V: Os dois parceiros assentam do mesmo lado da mesa.
JD: Isso, do mesmo lado.
A V: Então vocês têm que ir para lá. São duplas contra duplas.

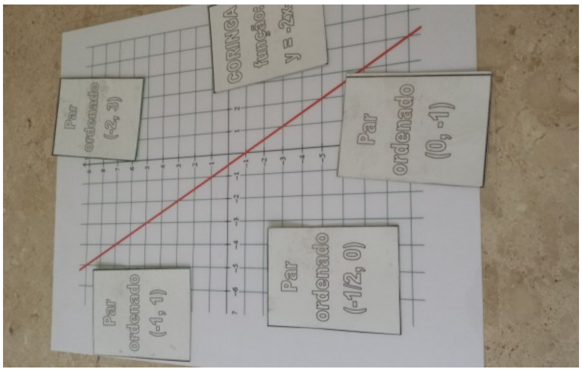
JD: Então as duplas já estão formadas. Primeiro vão jogar essas duas duplas. Aqui na folha estão as regras, podem ler. Nós vamos jogar essa primeira configuração. Cada dupla escolhe uma cartela com o gráfico da função.
J V S: É só a primeira que nós vamos jogar?
JD: Sim, essa segunda configuração é outra opção do jogo, nós não vamos jogá-la hoje.
J V A: Tem que fazer dez pontos.
A V: O coringa vale cinco pontos.
JD: Já leram as regras? O que vocês entenderam?
ALGUNS ALUNOS: Nada.
JD: É um jogo de função. Ganha quem completar no mínimo dez pontos. Cada carta com um par que pertença à função da sua cartela vale um determinado número de pontos. Têm cartelas com função afim (do primeiro grau) e função quadrática (do 2º grau). Vamos recordar o que vimos na aula anterior. Elementos importantes da função afim ou do 1º grau: quando corta o eixo ‘y’ e quando corta o eixo ‘x’. Como são chamados? Quando corta o eixo ‘y’?
A L: Acho que é coeficiente linear.
JD: Isso. Coeficiente linear. Muito bem. E quando corta o eixo ‘x’?
A L: Raízes.
JD: Dá para identificar o coeficiente linear nesse gráfico?
L V: Dá. É o menos um.
JD: E aqui?
A V: É o três.
JD: Dá para identificar a raiz?
L V: Dá.
A V: Mais ou menos.
JD: Dá para ver que é entre zero e menos um; pode ser</td><td>É importante salientar que o ‘jogo’ se torna uma atividade de estudo somente quando o seu objetivo coincide com a ação. O fato de apenas ‘jogar’ não representa nenhum indício de evolução e aprendizagem. É necessário que a atividade “se adianta ao conhecimento do aluno” e o professor atue na ZDP deles para que ocorra o desenvolvimento.

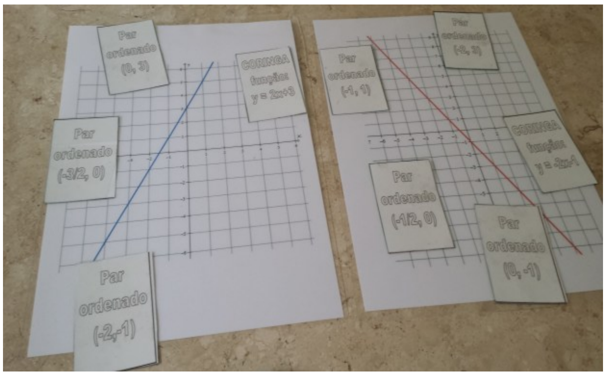
Essa atividade foi desenvolvida em apenas uma aula, pois era o nosso último dia na escola e, ainda havia a avaliação a ser realizada com todos os alunos. Assim, passamos apenas as explicações sobre as regras do jogo e os alunos jogaram apenas duas partidas.</td></tr>
</table>

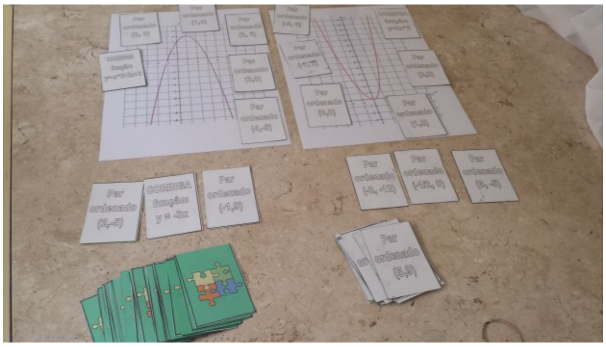
	menos meio? E nesse aqui, dá para identificar a raiz? J V A e A V: Menos um. JD: Agora, vamos ver nesse aqui. Qual é o coeficiente linear? L V: Zero. JD: E a raiz? L V: Zero. JD: Estão vendo? Coincidiu coeficiente linear e raiz. Quando coincide, o que é que fala sobre o valor da carta? J V S: Vale cinco pontos? JD: Vamos então começar uma partida de brincadeira e depois será prá valer. Cada par tira uma cartela. Vejam, as duas duplas escolheram cartelas com *função* do 1º grau. Agora embaralhamos. Podem deixar visível a cartela com o gráfico. Os adversários terão que observar que cartas servem para vocês. Agora eu vou distribuir sete cartas para cada jogador. Já podem ir olhando e analisando as cartas. L V: É igual caixeta, distribui três de cada vez. JD: Todos estão com sete cartas? ALGUNS: Sim. JD: Agora vocês vão verificar se entre suas cartas existem pares que pertencem à *função* dada na cartela escolhida. Se tiver, já vão deixando-a visível (à mostra). Não se esqueçam de observar o coringa. É a carta que contém a lei da *função*. Se vocês comprarem uma carta que contém a lei da *função* do gráfico de vocês, este é o coringa.	
Desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos (DMPA)	L V: Eu vou ganhar de vocês. A L: Você veio na aula passada aqui fazer o plano cartesiano, L V? L V: Não. A V: É. De matemática. Foi a melhor coisa do ano. L V: Posso ajudá-los? JD: Pode. A V: Olha aqui. Você já tem um ponto. Pode pôr aí em cima. Observe as cartas deles também. A L: Só tem coringa aí, mas nenhum serve. L V: De lá serve, não pode jogar. A L: O L V está até comprando as cartas pra eles. JD: Está ajudando. JD: Vocês acharam o jogo interessante? THA: É legal. LV: Vamos jogar de novo? JD: Nós não temos mais aulas para isso, mas podemos disponibilizar o jogo para vocês jogarem. LV: E a outra aula? JD: É que eu ainda tenho que fazer a avaliação com a turma.	Quando se trata de jogos, já existe uma motivação natural pela atividade. “Eu vou ganhar de vocês”(LV). Sempre que for possível, os jogos devem ser utilizados como estratégias de ensino, pois aguçam a participação dos alunos e despertam o interesse e a motivação.
Formação do conceito (FC)	JD: Quais são as raízes? J V S e A V: Menos um e três. JD: Qual é o vértice? L V e A V: É o quatro. JD: O valor de ‘y’ é quatro, mas e o valor de ‘x’?	

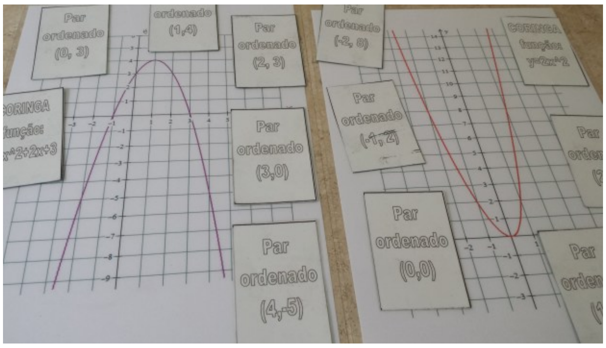
	L V: É um. JD: Então o par é um e quatro. Vamos recordar só mais uma. Nessa curva aqui, o ‘a’ é positivo ou negativo? A V e THA: Positivo. JD: Isso, a curva está para cima. Qual é o coeficiente linear? A V: É o quatro. JD: Isso. Qual é o vértice? L V, J V A e A V: É o dois. JD: E quais são as raízes? L V: É o dois também? JD: Sim, é o dois também. Coincidiu vértice com raiz. Quem tirar a carta com o par dois e zero (dois é o ‘x’ e zero, o ‘y’), quanto ganha? L V: Cinco pontos.	
Autorregulação (AR) e Autoavaliação (AA)		

Quadro 37: Síntese da análise da Aula 12: Jogando com as *funções* afins e quadráticas.
Fonte: O autor, 2014.









Figuras 117, 118, 119, 120, 121, 122: Fotos do baralho e das cartelas do jogo de *funções*.
Fonte: O autor, 2014.

Apesar de ter sido realizada em apenas uma aula, e com apenas dois grupos (os alunos que haviam realizado as atividades no laboratório de informática), foi possível perceber que essa atividade "Jogando com as *funções*" teve uma boa aceitação por parte dos alunos. Devido ao tempo, foi possível realizar apenas duas partidas (uma com cada grupo). No entanto, a motivação foi ponto alto dessa atividade. Ao receber as cartas, os alunos se apressavam em observar se havia par relacionado com o gráfico contido na sua cartela; se alguma de suas cartas era coringa e quantos pontos haviam conseguido. Esse movimento permitiu observar que, apesar de algumas dificuldades para identificar os pares, os alunos se envolveram de forma determinante e, assim, assimilaram alguns elementos relacionados ao conceito de função, tais como: raízes, vértices e coeficientes lineares.

4.6 Análise dos resultados da avaliação final

Ao final da pesquisa, apresentamos aos alunos uma folha de avaliação para que eles se manifestassem sobre os itens pesquisados; as atividades desenvolvidas, a importância da pesquisa para eles, os pontos positivos e negativos. Foram elaboradas seis questões abertas e uma para assinalar com um (x).

A Ficha de Avaliação foi entregue a todos os alunos presentes que, nesse dia, eram 27. Faltaram cinco alunos. Foi explicado a eles o objetivo da avaliação, a importância da coerência nas respostas e que procurassem responder a todas elas. Ficou definido também que não era necessário se identificar, apesar de ter espaço na folha para colocar o nome. Surpreendentemente, todos os alunos colocaram o nome na Folha de Avaliação. A maioria dos alunos demonstrou seriedade no preenchimento da avaliação. As questões e as respostas obtidas pelos alunos foram:

1) Para você, o que é função?;

As respostas dos alunos:

- (**1**) Uma relação entre domínio e imagem;
- (**2**) São equações em que deve ter um domínio para cada imagem;
- (**16**) É uma relação entre duas grandezas;
- (**1**) É o conceito entre relações;
- (**3**) É quando uma coisa depende da outra;
- (**2**) É uma relação em que o domínio não pode ter duas imagens;
- (**1**) Um produto em função de outro;
- (**1**) Relação entre duas grandezas em que uma está em função da outra;

2) Quais os principais elementos envolvidos no conceito de função?;

As respostas dos alunos:

- (**5**) Domínio, contradomíno, imagem e variáveis;

- (**1**) x e y;
- (**1**) Domínio e contradomínio;
- (**2**) Domínio e imagem;
- (**14**) Domínio, contradomínio e imagem;
- (**1**) Domínio, contradomínio, imagem e equação;
- (**1**) Domínio, contradomínio, imagem, equação e variável;
- (**1**) Preço, peso, velocidade e distância;
- (**1**) Não respondeu;

3) O que é que uma função afim (do 1º grau)?;

As respostas dos alunos:

- (**16**) Quando está elevado a um;
- (**2**) Quando a equação está elevada a um;
- (**1**) Com uma equação;
- (**1**) Quando estabelece uma reta e não tem potência;
- (**1**) Que não tem raiz na fórmula;
- (**1**) A função não é elevada a nenhum número;
- (**2**) Quando é elevado ao quadrado;
- (**1**) Relacionado a número sem vírgula e sem raiz;
- (**2**) Não respondeu;

4) O que é uma função quadrática (do 2º grau)?;

As respostas dos alunos:

- (**18**) Quando está elevado ao quadrado;
- (**1**) Quando a variável x está elevada ao quadrado;
- (**2**) Quando a equação está elevada a dois;
- (**1**) Com duas ou mais equações;
- (**1**) Que tem raiz na fórmula;
- (**1**) Quando é elevado ao cubo;
- (3) Não respondeu;

5) Como você avalia a importância da pesquisa para a turma do 9º ano:

As respostas dos alunos:
(**18**) Muito boa

(**8**) Boa

(**1**) Regular

( ) Fraca

6) Dentre as atividades propostas, aponte as que você mais gostou de realizar;

As respostas dos alunos:

- (**1**) Aprendizagem e preparação para o Ensino Médio;
- (**5**) Atividades dinâmicas, em grupos, sobre função e relação;
- (**2**) A árvore biológica (genealógica);
- (**2**) A atividade do plano cartesiano;
- (**6**) Laboratório de informática;
- (**2**) Todas;
- (**2**) Pares ordenados pegando nas mãos;
- (**2**) Jogo sobre funções;
- (**1**) Colorir quadradinhos e plano cartesiano;
- (**1**) O filme;
- (**1**) Não me lembro;
- (**1**) Atividades de raciocínio;

- (**1**) Relações das funções com o nosso dia-a-dia;

7) O que você destacaria como 'positivo' e como 'negativo' no processo de pesquisa?

a) Positivo:

As respostas dos alunos:

- (**2**) A atividade personalizada sobre função;
- (**6**) Aprendizagem e preparação para o futuro;
- (**1**) Não ficar somente na teoria;
- (**3**) Aulas interativas e reforço na matemática;
- (**2**) Atividades e informações interessantes que causam vontade de aprender;
- (**5**) Atividades em grupos;
- (**9**) Ter aprendido o conceito de função;
- (**1**) Aprendizagem; interação e união;
- (**1**) Aulas diferentes;
- (**2**) A interação com o grupo que não dá para esquecer e a diversão aprendendo;
- (**3**) Interação com assuntos do cotidiano (o filme);
- (**1**) Aulas no laboratório de informática, com número reduzido de aluno;
- (**2**) Não respondeu;

b) Negativo:

As respostas dos alunos:

- (**1**) Pessoas chatas no grupo;
- (**1**) Algumas atividades não puderam ser feitas por todos os alunos;
- (**4**) Nenhum;
- (**8**) Em branco;
- (**2**) Falta de atenção de alguns alunos;
- (**8**) Indisciplina de alguns alunos;
- (**2**) Acabou muito rápido;
- (**1**) Aulas repetidas;
- (**1**) Pouco atendimento aos alunos;

Nas respostas à primeira pergunta da avaliação - Para você, o que é *função*? - todos os alunos responderam que *função* é uma relação. A maioria dos alunos (16) respondeu que "É uma relação entre duas grandezas". Vários ouros expressaram que é uma relação de dependência. Esse é um dos nexos do conceito de *função*: a interdependência. Percebe-se, porém, que alguns alunos ainda não se apropriaram devidamente da linguagem científica, pois expressaram *função* como sendo "Um produto em função do ouro". Outro escreve "É o produto entre relações". Há, porém, alunos que já se apropriaram das condições necessárias para que uma relação seja *função*. A formação desse conceito, no entanto, acontece por um processo inserido na perspectiva do lógico-histórico, conforme nos indica Sousa, Panossian e Cedro (2014). Quanto aos elementos envolvidos no conceito de *função* (2ª questão), a maioria dos alunos (15) identificou domínio, contradomínio e imagem. Outros cinco alunos responderam: domínio, contradomínio, imagem e variáveis. Outros colocaram apenas domínio e imagem ou domínio e contradomínio. Estes são os nexos relacionados à fluência. Nessa questão apenas seis alunos citaram as variáveis como elementos relacionados ao conceito de *função*. Nas questões de nº 3 e 4, a maioria assimilou corretamente o que é uma *função* afim e uma *função* quadrática. Apenas cinco alunos responderam de forma incorreta ou não responderam. Vale ressaltar, no entanto, que dois alunos responderam que a *função* é afim quando a variável não tem potência. Nesse caso, parece que os alunos não reconhecem o expoente 1 (um).

Com relação à importância da pesquisa, 18 alunos a consideraram 'Muito boa'; oito alunos responderam que foi 'Boa' e apenas um marcou 'Regular'. Com relação às atividades desenvolvidas, perguntamos de quais eles mais gostaram. As respostas foram bem variadas, com, no máximo duas para uma mesma atividade, com exceção das aulas interativas (em grupos), que teve a preferência de cinco alunos, e as desenvolvidas no laboratório de informática, que, de forma marcante, foi a mais indicada por eles. Dos dez alunos que participaram das atividades no laboratório de informática, seis responderam que foram as atividades de que mais gostaram. Isso representa 60% da preferência.

Quanto aos aspectos positivos foram evidenciados: a formação do conceito de *função* (9 alunos), a aprendizagem para o futuro (6) e as aulas interativas (5). Com relação aos pontos negativos o destaque maior ficou por conta da indisciplina de alguns alunos apontada por oito deles, como fator que interferiu no bom desempenho das atividades.

A análise dos resultados da avaliação final nos permite concluir que a pesquisa realizada com os alunos teve um resultado satisfatório e importante para eles. Percebe-se que a essência do conceito de *função* e os nexos desse conceito foram assimilados pela maioria dos alunos. Há de se recordar que, segundo os PCN, o assunto sobre *função* é apresentado de forma introdutória (noções de função) no ensino fundamental, mas fica reservada ao ensino médio a sua exploração de forma completa. Dessa forma, o que eles assimilaram no ensino fundamental, com relação ao conceito de função, certamente terá uma importância fundamental no estudo desse assunto, no ensino médio.

As diversas respostas dos alunos na escolha das atividades de que mais gostaram, evidencia a necessidade de se variar na elaboração de atividades. A falta de motivação pode estar associada à forma repetitiva na realização das atividades em sala de aula. Porém, essa variação deve passar obrigatoriamente pelo uso de recursos das tecnologias da informação e comunicação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Antes de emitir qualquer consideração, é importante ressaltar que a presente dissertação teve como objeto de pesquisa a formação do conceito de *função* e, como objetivo principal, analisar como ocorre a formação desse conceito junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental. A questão norteadora ficou assim definida: "Como organizar um sistema de atividades de estudo para a formação do conceito de *função* e, particularmente os conceitos de *função* afim (de 1º grau) e *função* quadrática (de 2º grau), junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental?". A partir da hipótese de que "a maneira como organizamos as atividades de ensino interfere diretamente na aprendizagem dos alunos", o foco da pesquisa ficou por conta da elaboração, aplicação e análise das atividades.

A pesquisa procurou responder, ainda, a outras questões: como são apresentadas as concepções de álgebra e de educação algébrica na literatura científica e nos documentos oficiais? Como modelar teoricamente o conceito de *função*? Como planejar o processo de para a formação do conceito de *função* nos alunos dos anos finais do ensino fundamental? Como executar o sistema didático planejado para formar o conceito de *função*?

Foi possível constatar que as concepções de álgebra na literatura e nos documentos oficiais permanecem no nível teórico, não sendo devidamente exploradas em sala de aula. Nos PCN os aspectos algébricos foram elencados no bloco de números e operações, sem a devida distinção entre os nexos conceituais do pensamento aritmético e os nexos conceituais do pensamento algébrico. Outra questão que ficou evidente na pesquisa é quanto às concepções algébricas. A avaliação diagnóstica realizada no início da pesquisa mostrou que os alunos não tinham noção alguma das concepções algébricas. A maioria dos alunos não sabia o que era álgebra e para alguns, o termo 'álgebra' queria dizer "mistura de números e letras". Apesar de constar nos documentos oficiais, não são devidamente exploradas em sala de aula.

Outra questão era 'como modelar teoricamente o conceito de *função*'. Para obter as respostas para essa pergunta, buscamos subsídios nas teorias: Histórico-Cultural com Vigotski, da Atividade com Leontiev e da Atividade de estudo com Davidov. A partir da análise teórica ficou evidente a importância dos conceitos científicos no desenvolvimento intelectual dos alunos e, ainda, que o movimento lógico-histórico da formação dos conceitos aponta para a condução do pensamento do aluno do geral para o particular, perpassando por nexos conceituais imprescindíveis nesse processo, não desconsiderando o movimento do geral para o particular e do particular para o geral, numa relação dialética. Apesar de ser considerado por Caraça (1984) como um dos três conceitos mais importantes da matemática, o conceito de *função* parece não ser assim considerado pelas organizações educacionais e, particularmente, pelos professores de matemática. Não foi constatado em nenhum dos documentos oficiais, livro didático ou planejamento anual analisados, a preocupação com a formação de conceitos, especificamente o de *função*. No ensino fundamental, o assunto *função* fica restrito às noções básicas de relação entre grandezas variáveis. A ausência de textos reflexivos, de atividades que promovam o exercício do pensamento científico; e as atividades focadas na repetição de termos simbólicos confirmam a despreocupação com a formação dos conceitos.

As outras duas questões a serem respondidas incluíam a elaboração e a execução do sistema didático para alcançar a formação do conceito de *função*. Sem dúvida, essa foi a tarefa mais difícil. Como professor de matemática há mais de 30 anos, acostumado ao sistema tradicional de ensino no qual predomina, conforme Davidov (1999), o pensamento empírico dos alunos, cuja trajetória segue o caminho do particular para o geral, foi difícil conceber e elaborar atividades que conduzissem o pensamento dos alunos no caminho inverso (do geral ao particular). Foram elaboradas várias sequências de atividades até chegar àquela considerada como 'adequada' para a condução do pensamento dos alunos pesquisados rumo à formação do conceito de *função*. Segundo Vigotski (1999), a formação de conceitos científicos está diretamente relacionada ao desenvolvimento da linguagem, passa por três estágios (pensamento sincrético, pensamento por complexos e pensamento conceitual) e envolvem outros conceitos, que são evidenciados por Sousa, Panossian e Cedro (2014) como nexos conceituais.

Para conduzir os alunos à apropriação do conceito de função, a partir das atividades propostas, tivemos alguns cuidados essenciais, considerando as dimensões epistemológica, cognitiva e didática, relacionadas com o comportamento dos alunos diante das atividades de pesquisa, tais como: as condições objetivas para a realização da atividades de estudo, considerando o conteúdo, os instrumentos, os signos, as relações interpessoais, a ZDP dos alunos; o uso consciente dos atributos do conceito (significado e sentido), o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores dos alunos, tais como: atenção voluntária; generalização e abstração; a preocupação com a linguagem científica, o desenvolvimento da motivação e participação dos alunos nas atividades propostas, e as ações dos alunos perante o grupo.

A trajetória da pesquisa apontou algumas dificuldades e limitações, tanto inerentes ao pesquisador quanto aos alunos pesquisados. Foi possível perceber a existência de ações padronizadas que imperam na maioria das aulas e vêm sendo adotadas de forma rotineira. Grande parte dos alunos está muito acostumada a ela, com atitudes passivas e defensivas. Esses alunos são meros espectadores na sala de aula, aguardam as informações e orientações do professor sobre o que é para se fazer: ouvir, anotar, ler, e/ou resolver. Normalmente se limitam a cumprir apenas as duas primeiras. A formação de hábitos de se reunir em grupos para ler, discutir, analisar, tomar decisões coletivas, propor sugestões, avaliar e apresentar conclusões é uma questão que merece atenção e outras discussões, pois não se consegue uma evolução satisfatória em poucas aulas.

Outra dificuldade ficou por conta da limitação dos alunos (especificamente do 9º ano pesquisado) com relação a questões básicas de matemática envolvendo leitura; interpretação; operações matemáticas fundamentais; cálculos com frações, números decimais, termos e representações algébricas, dentre outros. Os alunos, às vezes, conseguem esboçar um raciocínio elaborado e fundamentado em princípios lógicos e teóricos, mas quando necessitam realizar uma simples operação, desistem da tarefa, alegando não saber resolvê-la. Tais dificuldades podem estar relacionadas à não assimilação dos conceitos essenciais da matemática.

Foi detectada, ainda, a dificuldade dos alunos para identificar e compreender as grandezas. Quando se falava em perímetro, área, volume, tempo, por exemplo, os alunos demoravam bastante para estabelecer as devidas relações e entender que perímetro é uma medida linear, área é uma medida de superfície (unidade quadrada), volume é uma medida de capacidade (unidade cúbica) e tempo (em hora) é uma medida de base sexagesimal.

Outras constatações a que chegamos e podem servir de orientações para outros estudos ou pesquisas são:

a) a reflexão e a participação ativa dos alunos nas discussões e experiências em grupos favorecem a aprendizagem e o desenvolvimento deles. As ações do professor como organizador das atividades de ensino mediador e a sua relação com os alunos também são imprescindíveis nesse processo. É, de fato, nas relações sociais, no movimento das relações interpsíquicas para as intrapsíquicas que os conceitos científicos se formam;

b) o experimento didático não é apenas uma metodologia de pesquisa; é um método de ensino que deve ser elaborado a partir de pressupostos teóricos, mas desenvolvido a partir das condições objetivas nas quais se realiza, obedecendo aos critérios de elaboração e execução, citados no capítulo 2;

c) apesar da realização da atividade diagnóstica e do planejamento, no decorrer da pesquisa podem aparecer algumas variáveis que influenciam o seu desenvolvimento e exigem novas análises e estratégias;
d) os resultados da pesquisa apontam que a maneira como elaboramos e organizamos as atividades de ensino podem refletir diretamente na aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos. Quando os objetivos das ações não são propostos em consonância com o motivo da atividade de ensino e aprendizagem, o desenvolvimento dos alunos pode ficar comprometido;
e) a compreensão do conhecimento científico, especialmente dos conceitos básicos – da sua essência – dos nexos conceituais externos e internos, para a sua consolidação prática é condição indispensável no processo de desenvolvimento do aluno. É muito importante que o professor tenha pleno conhecimento da teoria que pretende aplicar. A relação entre docência e aprendizagem deixa claro que ensinar não significa aprender e que aprendizagem não é sinônimo de desenvolvimento;
f) o experimento didático não é apenas uma metodologia de pesquisa, mas um método de ensino que tem como característica fundamental a atividade de ensino do professor, em relação dialética com a atividade de aprendizagem do aluno;
g) o ensino pautado na Teoria Histórico-Cultural valoriza o movimento lógico-histórico do conhecimento, as atividades e relações humanas históricas e culturais e as intervenções pedagógicas em que o professor atua como mediador do processo;
h) os textos podem ser muito importantes para a introdução de assuntos matemáticos. Foi possível perceber, na pesquisa, que o texto proposto no início do experimento apresentou significados além dos esperados pelo pesquisador. Os alunos iniciaram a apropriação de uma ideia mais geral de *função*, ligada à necessidade humana de expressar a interdependência e a fluência que estão presentes no mundo em que vivemos. De certo modo, ficou evidente que o texto provocou um estímulo a mais nos alunos na busca da assimilação dos conceitos;
i) o papel do compartilhamento é elemento indispensável no processo de desenvolvimento mental dos alunos. Para que haja uma aprendizagem satisfatória é necessário que o professor conduza o exercício mental dos alunos a partir do movimento das relações que envolvam de forma dinâmica: o seu conhecimento e o conhecimento dos alunos sobre o tema proposto; o envolvimento interpessoal entre professor/aluno, aluno/professor e aluno/aluno;

j) a linguagem humana, segundo Vigotski (2009), possui as funções básicas de comunicação social e pensamento generalizante. Assim, ao introduzir termos e expressões representativas de *funções* e seus elementos, é importante que o professor tenha o cuidado de apresentar, antes, aos alunos esses termos e expressões em contextos do seu convívio social para que eles possam entender de maneira clara o seu significado naquele contexto;

k) nas diferentes cenas de diálogos entre os componentes dos grupos selecionados para análise foi possível perceber as limitações individuais dos alunos no processo de assimilação, generalização, abstração e apropriação do pensamento teórico, o que reafirma a importância da intervenção do professor na condução do processo de aprendizagem;

l) o conceito de *função* está associado a outros, tais como: o conceito de relação; o conceito de variáveis (dependente e independente); os conceitos de domínio, contradomínio e imagem. A compreensão e o pensamento dos alunos, nesse momento inicial da formação do conceito de *função*, às vezes se apresentam como complexos e difusos;

m) a partir dos resultados da avaliação final dos alunos, ficou evidente que os alunos pesquisados demonstraram preferência pelas aulas no laboratório de informática. No entanto, percebe-se que não há um consenso sobre a atividade mais atrativa, o que nos leva a concluir que a variação das atividades é a melhor estratégia;

n) a avaliação diagnóstica foi de importância crucial para verificar o nível de entendimento, as principais dificuldades e limitações dos alunos com relação às questões envolvendo a álgebra. Ficou claro, a partir dos resultados da avaliação, que eles não compreendiam o significado de ‘álgebra’. A maioria dos alunos apresentava dificuldades e limitações com as expressões, os termos e as operações algébricas. Em todos os cálculos envolvendo letras o raciocínio dos alunos era sincrético e seguia em direção ao cálculo do valor das letras, processo utilizado na resolução de equações;

o) as atividades propostas no experimento didático envolveram os pesquisados de forma gradativa, encadeando abstrações e generalizações aos nexos conceituais, partindo de situações gerais para particulares. Nada se pode afirmar sobre modificações nas funções psíquicas dos alunos, mas foi possível constatar evidências da aprendizagem ocorrida. Quando discutem questões referentes às atividades propostas, quando lidam com objetos concretos ou quando elaboram conclusões, percebe-se que ocorreu um avanço qualitativo na aprendizagem;

p) não foi possível analisar todos os dados obtidos com as gravações em áudio e vídeo. Foram obtidas cerca de 600 horas de gravações em áudio e a mesma quantidade em vídeo. Devido ao tempo, tivemos que selecionar apenas uma parte desse material, um 'isolado', conforme Caraça (1984), para análise.

É importante salientar que deve existir uma estreita relação ente a elaboração, a aplicação e a análise do experimento didático. Essa relação, no entanto, não era evidente para nós, na fase de elaboração das atividades da pesquisa. Quando elaboramos o experimento didático não tínhamos a clareza do movimento lógico-histórico da fluência e da interdependência da formação do conceito de *função* e tampouco dos nexos conceituais desse conceito. Somente a partir da aplicação e da análise do experimento, obtivemos um pouco mais de conhecimento e domínio sobre essas duas questões.

Os motivos que nos levaram a realizar esta pesquisa estão atrelados às necessidades de encontrar explicações e saídas para as questões da falta de motivação e dos baixos rendimentos dos alunos nas questões referentes aos conteúdos de álgebra. Assim, podemos afirmar que não encontramos todas as respostas, mas encontramos algumas possibilidades, já citadas, que podem tornar o ensino de matemática e, especificamente, de álgebra, mais eficiente e com mais significado para o aluno.

Podemos afirmar, ainda, que a partir desta pesquisa a nossa atividade interna foi modificada, o que certamente modificará, também, as nossas atividades externas como educador e professor de matemática.

Concluindo, podemos afirmar que os resultados permitem considerar que há indícios de que os alunos se apropriaram dos elementos constitutivos do conceito de *função*; que o trabalho coletivo, suas manifestações, expressões e ações de discutir, relacionar, identificar, generalizar e avaliar foram relevantes para o alcance dos objetivos, especialmente no processo de desenvolvimento mental dos alunos.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Orlando Fernández. L. V. Zankov: Aproximações à sua vida e obra. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Ensino Desenvolvimental**. Vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013a.

______. **O Experimento Didático-Formativo:** contribuições de L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov. Artigo para Mesa Redonda. I Seminário GEPID/OBEDUC, 2013b.

BELIERI, Cleder Mariano. **Aprendizagem de conceitos filosóficos no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2012.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em Educação:** Fundamentos, métodos e técnicas. In: Investigação qualitativa em educação. Portugal: Porto Editora, 1994, p.15-80. Disponível em: <http://www.todosnos.unicamp.br:8080/lab/acervo/capitulos/BOGDAN20RBIKLEN.S.Investigacaoqualitativaemeducacao.rtf/view>. Acesso em 17 out. 2013.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-36.

BOYER, Carl, B. História da Matemática. 2.ed. Tradução Elza F. Gomide São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998a. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em 18 jul. 2013.

______.______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998b. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 18 jul. 2013.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CASCONE, O. B. **Organização do ensino e aprendizagem conceitual: possibilidades formativas no livro didático.** Dissertação de Mestrado em Educação – Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2009.

CAVALEIRO, Patrícia Cristina Formaggi. **Organização do Ensino da Linguagem Escrita:** Contribuições da abordagem Histórico-Cultural. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2009.

DAVIDOV, V. **Problemas do ensino desenvolvimental** - A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Revista Soviet Education, August/VOL XXX, N° 8, 1986.

DAVÍDOV, V.; MÁRKOVA, A. **La concepción de la actividad de estudio en los escolares**. In: La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS (Antología). Biblioteca de Psicología Soviética. Moscú: Editorial Progresso, 1987, p. 316-337.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico** – Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú. Editorial Progresso, 1988.

DAVIDOV, V. V. **O que é a atividade de estudo.** Revista "Escola inicial" nº 7, ano 1999. Tradução do russo (para uso em sala de aula) de Ermelinda Prestes.

DAVÍDOV, V. **Tipos de generalización en la enseñanza**: La Habana Pueblo y Educación 197?.

DAVYDOV, V; SLOBODCHIKOV, V.I. TSUKERMAN, G.A. O aluno das séries iniciais do ensino fundamental como sujeito da atividade de estudo. **Journal of Russian and East European Psychology**, vol. 41, no. 4, July–August 2003, pp. xx–xx. © 2003 M.E. Sharpe, Inc. All rights reserved. Tradução do inglês para uso em sala de aula pelo corpo de tradutoras do grupo de pesquisa Implicações Pedagógicas da teoria Histórico-Cultural. Unesp/Marília (Maria Faria, Stela Miller, Suely Mello).

DEMANA, Franklin; LEITZEL, Joan. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 70-88.

DUARTE, Newton. **A anatomia do homem é a chave da anatomia do macaco**: a dialética em Vigotski e em Marx e a questão do saber objetivo na educação escolar. Revista Educação & Sociedade, v. 21, n.71: Campinas jul. 2000.

______. **A escola e a socialização dos conhecimentos**. Implicações educacionais da Psicologia Histórico-Cultural. Gravado na Biblioteca e documentação UNESP Bauru: ATTA mídia educação, 2013. 01 DVD-ROM.

DUSAVITSKII, A.K. Educação desenvolvente e a Sociedade aberta**. Journal of Russian and East European Psychology,** vol. 41, no. 4, July–August 2003, pp. xx–xx. © 2003 M.E. Sharpe, Inc. All rights reserved. Tradução do inglês para uso em sala de aula pelo corpo de tradutoras do grupo de pesquisa Implicações Pedagógicas da teoria Histórico-Cultural. Unesp/Marília (Maria Faria, Stela Miller, Suely Mello).
FACHIN, Odília. **Fundamentos de Metodologia**. São Paulo: Saraiva, 2006.

FERREIRA, Maria Clemência Pinheiro de Lima. **Educação física na educação infantil –** ensino do conceito de movimento corporal na perspectiva histórico-cultural de Davydov. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2010.

FIGUEIREDO, Auriluci de Carvalho. **Saberes e Concepções de Educação Algébrica em um Curso de Licenciatura em Matemática.** Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2007.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. **Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar.** Pro-Posições, Vol.4, nº 1(10), p.78-91, mar. 1993.

FLANDERS, Harley. Softwares para álgebra: o que devem ser? In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 171-174.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia** (Saberes necessários à prática educativa). Digitalização: Coletivo sabotagem, 2002. Disponível em <http://www.letras.ufmg.br/espanhol/pdf%5Cpedagogia_da_autonomia_-_paulofreire.pdf>. Acesso em 19 ago. 2013.

FREITAS, R. A. M. M. Pesquisa em didática: o experimento didático formativo. In: Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste, 2010, Uberlândia. **X Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste:** Desafios da Produção e Divulgação do Conhecimento. Uberlândia, 2010. v. I. p. 1-11.

GALPERIN, P. Ya**.** Sobre la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos. **La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño**. (Luis Quintanar Rojas (Compilador). Universidad Autónoma de Tlaxcala: Departamento de Educación Especializada, México. Prim. Reimp. 2001, p. 27-56.

INEP, Edição 2011. **Resultados SAEB/Prova Brasil 2011**. Disponível em <http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/>. Acesso em 03 ago. 2013.

LAMPERT-SHEPEL, Elina. Atividade de Estudo: A Psicologia e Pedagogia do Agir. **Journal of Russian and East European Psychology**, vol. 41, no. 4, July–August 2003, pp. xx–xx. © 2003 M.E. Sharpe, Inc. All rights reserved. Tradução do inglês para uso em sala de aula pelo corpo de tradutoras do grupo de pesquisa Implicações Pedagógicas da teoria Histórico-Cultural. Unesp/Marília (Maria Faria, Stela Miller, Suely Mello).

LEONTIEV, A. N.. **Actividad Conciencia y Personalidad**. La Habana: Pueblo y Educación, 1983.

LIBÂNEO, José Carlos. "**Ensinar e aprender, aprender e ensinar:** o lugar da teoria e da prática em didática". Temas da pedagogia: diálogos entre didática e currículo. São Paulo: Cortez (2012).

______. **Teoria Histórico-Cultural e Metodologia de Ensino**: Para aprender a pensar geograficamente. Texto apresentado no XII ENCUENTRO DE GEÓGRAFOS DE AMÉRICA LATINA (EGAL), Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, abril/2009.

______. **O campo teórico-investigativo da pedagogia, a pós-graduação em educação e a pesquisa pedagógica**. Educativa (Rev. Dep. de Educ. PUC-Goiás) 11.1 (2008).

______; FREITAS, Raquel A. M. da M. **A elaboração de planos de ensino (ou de unidades didáticas) conforme a Teoria do Ensino Desenvolvimental.** Texto para uso didático na disciplina Didática e Ensino Desenvolvimental, no Programa de Pós-Graduação em Educação – Linha Teorias da Educação e Processos Pedagógicos, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Digitado em 2009.

______; ______. Vasily Vasilyevich Davidov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Ensino Desenvolvimental**. Vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4ª edição. Campinas, SP: Papirus, 2001.

MAREGA, Agatha Marine Pontes. **A criança de seis anos na escola:** transição da atividade lúdica para a atividade de estudo. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2010.

MARKOVITS, Zvia. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 49-69.

MARX, Karl; ENGELS, Friedrich. **Manifesto do Partido Comunista.** 2. Ed. Lisboa: Avalte! 1997. Disponível em <http://www.pcp.pt/publica/edicoes/25501144/manifes.pdf>. Acesso em 15 jan. 2014.

______; ______. **Sobre a comuna.** Disponível em <http://pensamentosnomadas.files.wordpress.com/2012/03/karl-marx-engels-sobre-a-comuna.pdf >. Acesso em 10 jan. 2014.

______; ______. **Mensagem do Comitê Central à Liga dos Comunistas.** Disponível em <http://pensamentosnomadas.files.wordpress.com/2012/03/karl-marx-engels-sobre-a-comuna.pdf >. Acesso em 10 jan. 2014.

MARX, Karl, **O capital**: crítica da economia política: Livro I: o processo de produção do capital. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

______. **Manuscritos econômicos de Marx de 1861 a 1863.** Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=2429> Acesso em 15 jan. 2014.

______. **Para uma crítica da economia política.** Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000054.pdf >. file:///C|/site/LivrosGrátis/paraumacritica.htm (1 of 23) [05/04/2001 17:17:38]. Acesso em 15 jan. 2014.

MELLO, Maria Aparecida e CAMPOS, Douglas Aparecido de. Bases conceituais da obra de A. V. Petrovsky. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Ensino Desenvolvimental**. Vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

MIRANDA, Sérgio Gomes de. **Ensino desenvolvimental e aprendizagem de produção textual no ensino médio**. Dissertação de Mestrado em Educação – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2008.

MORETTI, V. D.; RIBEIRO, F. D.; PANOSSIAN, M. L. **Teoria histórico-cultural na produção acadêmica sobre formação de professores de matemática.** 36ª Reunião Nacional da ANPEd – 29 de setembro a 02 de outubro de 2013, Goiânia-GO.

MOURA, M. O. A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010.

MOYA, D. J. L. **A criança de seis anos de idade no ensino fundamental: práticas e perspectivas.** Dissertação de Mestrado em Educação: Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2009.

NÚÑES, Isauro B. **Vigotski, Leontiev, Galperin:** formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

______; OLIVEIRA, Marcus V. de F. P. Ya. Galperin: A vida e a obra do criador da teoria da formação por etapas das ações mentais e dos conceitos. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Ensino Desenvolvimental**. Vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

OECD (2010). **PISA 2009 Results:** Executive Summary. Disponível em <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46619703.pdf>. Acesso em 03 ago. 2013.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino.** Dissertação de Mestrado em Educação da Universidade de São Paulo: São Paulo, 2008.

PERES, Thalitta Fernandes de Carvalho. **Volume dos sólidos geométricos – um experimento de ensino baseado na teoria de V. V. Davydov**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2010.

PIDKASISTI. P. I. Planteamiento de la enseñanza experimental, sus etapas y resultados (capítulo 5). In: **La actividad cognoscitiva independiente de los alumnos en la escuela**. La Habana: Pueblo y Educación, 1986, p. 133-180.

PORTELLA, Victor. **Educação no Brasil:** um outro olhar**.** Publicado em 30 de agosto de 2012. Disponível em <http://era.org.br/2012/08/educacao-no-brasil-um-outro-olhar/>. Acesso em 03 ago. 2013.

REPKIN, V.V. Ensino desenvolvente e atividade de estudo. **Journal of Russian and East European Psychology**, vol. 41, no. 4, July–August 2003, pp. xx–xx. © 2003 M.E. Sharpe, Inc. All rights reserved. Tradução do inglês para uso em sala de aula pelo corpo de tradutoras do grupo de pesquisa Implicações Pedagógicas da teoria Histórico-Cultural. Unesp/Marília (Maria Faria, Stela Miller, Suely Mello).

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. da S. F.; MORETTI, V. D.: Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010a.

RIGON, A. J. et. al.: O Desenvolvimento Psíquico e o Processo Educativo. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010b.

RODRIGUES, Vera Lúcia Gouvêa de Camargo. **Aprendizagem do conceito de volume e o desenvolvimento intelectual:** uma experiência no ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2006.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas Jorge Zahar Editor Ltda. Rio de Janeiro, 2012.

ROSA, J. E. et. al.: As Particularidades do Pensamento Empírico e do Pensamento Teórico na Organização do Ensino. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010a.

ROSA, J. E.; MORAES, S. P. G.; CEDRO, W. L.A Formação do Pensamento Teórico em uma Atividade de Ensino de Matemática. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010b.

ROSA, Viviane Mendonça Gomides. **Aprendizagem da equação do 2º grau –** uma análise da teoria do ensino desenvolvimental. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2009.

SAUNDERS, James e DeBLASSIO, John. Relacionando funções com seus gráficos. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 178-180.

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia do Trabalho Científico.** 23ª edição**.** São Paulo: Cortez, 2007.

SHUARE, M. O.; TULESKI, S. C. **Questões históricas e metodológicas da Psicologia Histórico-Cultural**. Gravado na Biblioteca da Psicologia USP e Biblioteca central UEM: ATTA mídia educação, 2013. 1 DVD-ROM.

SIRGADO, A. P. **O social e o cultural na obra de Vigotski.** Educação & Sociedade, ano XXI, nº 71, Julho/00. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/es/v21n71/a03v2171.pdf>. Acesso em 10 jan. 2014.

SOARES, Fernanda Chaves Cavalcante. **O ensino desenvolvimental e a aprendizagem de matemática na primeira fase do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2007.

SOLOVIEVA, Yulia e ROJAS, Luis Quintanar. Vida y obra de N. F. Talizina: aportaciones para la psicología y la educación. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. **Ensino Desenvolvimental**. Vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

SOUSA, M. C. de; PANOSSIAN, M. L; CEDRO, W. L. Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos. 1.edição. Campinas, SP: Mercado das letras, 2014.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental.** Tese de Doutorado – Universidade de Campinas: Campinas, 2004.

SOUZA, J. R e PATARO, P. R. M. Vontade de saber matemática, 9º ano. 2. edição. São Paulo: FTD, 2012.

TALIZINA, N. F. **Manual de psicología pedagógica**. San Luis de Potosí, S.L.P., México: Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de Potosí, 2000.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre álgebra da escola média e utilização das variáveis. In: COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

VIGOSTKI, Lev. S. **Pensamento e linguagem**. Versão para e-book eBooksBrasil.com 2002. Disponível em: <http://www.jahr.org/>. Acesso em 25 jun. 2011.

VIGOSTKY, Lev. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Organizadores Michaela Cole et al. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 7.ed. São Paulo: Martins Fontes 2010.

VIGOSTKI, Lev. S. **A construção do pensamento e da linguagem;** tradução Paulo Bezerra. 2ª Edição. São Paulo: Editora W.M.F. Martins Fontes, 2009.

VIGOSTKI, Lev. S. **Obras Escogidas III -** Problemas del desarrollo de la psique. 2ª Edição. Madrid: Visor Dis., S.A., 2000.

VIGOSTKI, Lev. S. **Teoria e Método em Psicologia.** Tradução Claudia Berliner: Revisão Elzira Arantes. 2ª Edição. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

ANEXOS

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado (a) como voluntário (a) a participar da pesquisa "O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL – A formação do conceito de função polinomial". *Neste projeto, pretendemos* desenvolver atividades de estudo para verificar a formação de um importante conceito matemático, o conceito de função, estudado no 9º ano.
O motivo que nos leva a estudar esse assunto é que a formação dos conceitos tem papel decisivo no processo de ensino e aprendizagem da matemática.
Para o desenvolvimento deste projeto, adotaremos o(s) seguinte(s) procedimento(s): serão desenvolvidas atividades de estudo, como parte de um experimento de ensino. Todas as atividades serão registradas por meio de relatórios, fotografias e gravações em áudio e vídeo.
Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido (a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará qualquer penalidade. Os riscos que podem ocorrer são mínimos, como por exemplo, a divulgação não intencional de seu nome, sua voz e sua imagem. No entanto serão tomadas todas as providências para que não haja nenhum prejuízo para você decorrente da sua participação no projeto. Os seus dados serão mantidos em sigilo e utilizados apenas com fins científicos, tais como apresentações em congressos e publicação de artigos científicos. O seu nome ou qualquer identificação, como voz, foto, imagem, jamais aparecerá. Os incômodos decorrentes da participação envolvem a dedicação do tempo de uma aula por semana, além do esforço mental empregado na resolução das atividades propostas.
Os resultados estarão à sua disposição quando finalizada a pesquisa. Este termo de assentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, ____, aluno (a) do 9º ano ____ da Escola Municipal Frei Eugênio, tomei conhecimento das atividades de pesquisa que serão realizadas na escola e, por minha livre e espontânea vontade, decidi que:

☐ **Aceito participar das atividades de pesquisa.**

☐ **Não aceito participar das atividades de pesquisa**.

Uberaba, de de 2014

______________________________ ______________________________

Assinatura do aluno (menor) Assinatura do Professor Pesquisador

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADOR ASSISTENTE: JOSÉ DIVINO NEVES – Professor Pesquisador Assistente
Telefone e e-mail: 3319 8831 - jdneves@terra.com.br

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: Profª. Drª. MARILENE RIBEIRO RESENDE
Telefone e e-mail: 3319 8831 – marilene.resende@uniube.br

Uberaba, ____ de ___________________ de 2014.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome do (a) aluno (a)/sujeito da pesquisa __________________________________
Identificação (RG) do aluno (a)/sujeito da pesquisa ___________________________
Nome do responsável pelo (a) aluno (a): ____________________________________
Identificação (RG) do responsável: ____
Título do projeto: O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL – A formação do conceito de função polinomial.
Instituição onde será realizado: ESCOLA MUNICIPAL URBANA FREI EUGÊNIO
Pesquisador Responsável: MARILENE RIBEIRO RESENDE
Identificação (conselho), telefone e e-mail: 3319 8831 – marilene.resende@uniube.br
CEP-UNIUBE: Av. Nenê Sabino, 1801 – Bairro: Universitário – CEP: 38055-500- Uberaba/MG, tel: 34-3319-8959 e-mail: cep@uniube.br

Eu,____,
(nome do responsável pelo (a) aluno (a)

__________________________________ e responsável pelo (a) menor ___________
(grau de parentesco com o (a) aluno (a)
____ autorizo a sua participação no projeto “O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL – A formação do conceito de função polinomial”, de responsabilidade de MARILENE RIBEIRO RESENDE (Pesquisadora responsável) e JOSÉ DIVINO NEVES (Pesquisador assistente), desenvolvido na Universidade de Uberaba - UNIUBE.

O objetivo do projeto é desenvolver atividades de estudo para verificar a formação de um importante conceito matemático, o conceito de função, estudado no 9º ano.

O motivo que nos leva a estudar esse assunto é que a formação dos conceitos tem papel decisivo no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Além disso, os alunos têm apresentado dificuldades de compreensão desse conceito e têm obtido notas baixas em avaliações externas, como por exemplo, SAEB E ENEM. O estudo poderá trazer benefícios para os alunos na aprendizagem desse conceito e no desenvolvimento de capacidades matemáticas.

Se aceitar participar desse projeto, o (a) aluno (a) realizará atividades de estudo elaboradas e aplicadas pelo professor pesquisador, de agosto a outubro do corrente ano, uma vez por semana às quintas-feiras no 2º e 3º horários do turno matutino, durante as aulas de matemática, na Escola Municipal Frei Eugênio. Os riscos que podem ocorrer são mínimos, como pro exemplo a divulgação não intencional de informações confidenciais, mas serão tomadas todas as providências para que não haja nenhum prejuízo para os (as) alunos (as), decorrente da sua participação no projeto.

Os dados dos (as) alunos (as) serão mantidos em sigilo e serão utilizados apenas com fins científicos, tais como apresentações em congressos e publicação de artigos científicos. O nome ou qualquer identificação do (a) aluno (a) sua (voz, foto, imagem) jamais aparecerá.

Pela participação no estudo, o (a) aluno (a) não receberá nenhum pagamento, e também não terá nenhum custo. O mesmo pode parar de participar a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo. Sintam-se à vontade (aluno e responsável) para solicitar, a qualquer momento, os esclarecimentos que julgarem necessários. Caso o (a) aluno (a) decida-se por não participar, ou por não se submeter a algum procedimento que lhe for solicitado (a), nenhuma penalidade será imposta a ele (a).

Você receberá uma cópia desse termo, assinada pela equipe, onde consta a identificação e os telefones da equipe de pesquisadores, caso você queira entrar em contato com eles.

____

Assinatura do (a) responsável pelo (a) aluno (a)

____

JOSÉ DIVINO NEVES – Professor Pesquisador Assistente
Telefone e e-mail: 9105-8381 - jdneves@terra.com.br

____

MARILENE RIBEIRO RESENDE- Profª. Drª. Pesquisadora Responsável.
Telefone e e-mail: 3319 8831 – marilene.resende@uniube.br

UBERABA
PARA O BEM DE NOSSA GENTE

PREFEITURA MUNICIPAL DE UBERABA
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA -SEMEC

Escola Municipal Urbana Frei Eugênio
CNPJ 23.368.673/0001-02

"O Homem construtor de sua caminhada"

Carta de Autorização

Eu, Regimar Luisa Sousa Neves, Diretora da Escola Municipal Urbana Frei Eugênio, autorizo a Professora Dra. Marilene Ribeiro Resende e seu aluno José Divino Neves, do mestrado em Educação da Universidade de Uberaba, a aplicar instrumentos de pesquisa – atividades de ensino – junto aos alunos das turmas do 9º ano, como parte de uma pesquisa que pretende realizar sobre "O Ensino e Aprendizagem de Álgebra nas Séries Finais do Ensino Fundamental - A formação do conceito de função polinomial".

Os mesmos pesquisadores também convidarão os alunos envolvidos na pesquisa para uma entrevista semiestruturada em etapa posterior.

Foi esclarecido pelos pesquisadores o caráter voluntário da adesão de entrevistados, assegurando-lhes a inteira liberdade de participar ou não da pesquisa ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da mesma, sem quaisquer represálias.

Os pesquisadores comprometem-se a resguardar o anonimato dos sujeitos pesquisados, e garantem a não utilização das informações (incluindo imagens dos alunos) em prejuízo das pessoas.

Nestes termos, fica autorizada a aplicação dos instrumentos de coleta de dados relativos à referida pesquisa junto aos alunos que aceitarem participar desse estudo, mediante consentimento por escrito dos pais ou responsáveis.

Uberaba, 25 de fevereiro de 2014.

RMNeves

Regimar Luisa Sousa Neves – Diretora Escolar

Regimar Luisa Sousa Neves
Diretora Escolar
Decreto Nº 1658 de 27/12/2013
Prefeitura Municipal de Uberaba