UNIVERSIDADE DE UBERABA - UNIUBE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

SORAIA ABUD IBRAHIM

A APROPRIAÇÃO DOS SIGNIFICADOS DE POLINÔMIOS: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

UBERABA
2015

SORAIA ABUD IBRAHIM

A APROPRIAÇÃO DOS SIGNIFICADOS DE POLINÔMIOS: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação da Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende.

Linha de pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem.

UBERABA

2015

Catalogação elaborada pelo Setor de Referência da Biblioteca Central UNIUBE

Ibrahim, Soraia Abud.

I7a A apropriação dos significados de polinômios: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural / Soraia Abud Ibrahim. – Uberaba, 2015.

188 f.: il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação, 2015.

Orientadora: Profª. Dra. Marilene Ribeiro Resende.

1. Ensino. 2. Aprendizagem. 3. Álgebra. 4. Polinômios. I.

Universidade de Uberaba. Programa de Mestrado em Educação. II.

Soraia Abud Ibrahim

A APROPRIAÇÃO DOS SIGNIFICADOS DE POLINÔMIOS: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação - Mestrado da Universidade de Uberaba, como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Educação.

Aprovada em 21/08/2015

BANCA EXAMINADORA

Profª Drª Marilene Ribeiro Resende
(Orientadora)
UNIUBE - Universidade de Uberaba

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz
PUC-GO – Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Prof. Dr. Orlando Fernández Aquino
UNIUBE - Universidade de Uberaba

Aos meus queridos filhos, Bruno e Vítor,

Ao meu amor eterno Nabil,

Meu amor incondicional,

Obrigada por vocês existirem,

Vocês dão sentido e razão para a minha vida..

Amo muito vocês!!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a **Deus** pela oportunidade de finalização de mais essa etapa de formação acadêmica como pesquisadora.

Aos meus pais, **Abud** *(in memoriam)* **e Mariam**, pelo amor incondicional, pela vida de dedicação e carinho que me ofereceram e por sempre terem me incentivado a estudar.

Aos meus filhos, **Vítor e Bruno**, e meu marido, **Nabil**, que souberam compreender minha ausência, apoiando, facilitando o meu caminho percorrido; e a toda a minha família, que, de alguma forma, contribuiu para a realização. Nada seria possível sem o apoio de vocês.

À minha querida **Professora Drª. Marilene Ribeiro Resende**, por ter orientado este trabalho com dedicação e competência. Apontando caminhos, contribuindo para meu crescimento pessoal e formação profissional.

Aos **Professores Dr. Orlando Fernández Aquino** e **Drª. Patrícia Jorge Franco**, pelas preciosas colaborações no momento do Exame de Qualificação.

Ao Professor **Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz**, o qual, pelo conhecimento que possui, enriqueceu esta pesquisa com suas sugestões.

Ao grupo de estudo **GETHeC**, pelo compartilhamento de saberes.

Ao querido **Carlos Lacerda Rios Neto**, pelo belo trabalho na diagramação da História da Linguagem Algébrica.

A todos os colegas do mestrado, em especial as minhas queridas amigas **Dorinha e Janete**, por compartilharem esses momentos de alegria e conquista.

A todos os **professores do Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado** da UNIUBE, pela valiosa contribuição em minha formação acadêmica.

À **Escola Municipal Uberaba**, à direção, à supervisão, à professora regente da sala e aos alunos que participaram da pesquisa.

A todos os colegas do **OBEDUC**: José Divino, Juciane, Maísa, Vinícius, Érica e Florença.

Agradeço a todos os **colegas da UNIUBE**, em especial Adriano, Adriana, Maria Áurea e Vanessa, por contribuírem para o crescimento desta pesquisa e desta etapa em minha vida.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

O ensino da álgebra ainda tem se constituído em um desafio para os professores de matemática, especialmente, quando se considera a relação pensamento e linguagem algébricos. Dentro dessa temática, a presente dissertação se insere na linha de pesquisa “Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem” e trata-se de um subprojeto do Programa Observatório da Educação – OBEDUC/CAPES e do Edital 13/2012 FAPEMIG - “O ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental”, que visa desenvolver atividades de ensino de álgebra que conduzam à aprendizagem e ao desenvolvimento do aluno. A presente pesquisa tem como objetivo analisar o significado atribuído pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental ao conceito de polinômio, explorando diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica, por meio de uma sequência de atividades de ensino. A dimensão teórica deste estudo fundamenta-se nos princípios da aprendizagem e desenvolvimento humano, apoiados na Teoria Histórico-Cultural, nas contribuições teóricas de Vigotski (2003, 2009), Davidov (1982, 1988, 1999), Bernardes (2012), Moura (2010), Libâneo (1990, 2014), Freitas (2013), Fiorentini, Miorim e Miguel 1993), Lins e Gimenez (2001). É uma pesquisa de abordagem qualitativa. Os procedimentos de coleta de dados incluíram pesquisa bibliográfica, documental e de campo. A pesquisa bibliográfica teve o objetivo de fundamentar o estudo teoricamente, além de permitir conhecer o que já foi produzido no campo. A pesquisa documental visou contextualizar o estudo no âmbito dos referenciais curriculares e dos livros didáticos adotados nos últimos anos. Para o desenvolvimento da pesquisa de campo, foi utilizado o experimento didático na perspectiva da abordagem Histórico-Cultural, realizado em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, numa escola pública da rede municipal de ensino da cidade de Uberaba. A partir da pesquisa bibliográfica e documental, pode-se constatar que os PCN e os livros didáticos se baseiam principalmente na construção do conhecimento empírico, enfatizando a generalização empírica, indutiva. No que se refere à apropriação dos significados de polinômios, há indícios de que ocorreram saltos qualitativos, pois as atividades procuraram associar os polinômios às diferentes concepções de álgebra, o que possibilitou a ampliação da ideia restrita de polinômio como soma de monômios. O fato de os conceitos de variável e de função não terem sido trabalhados com os alunos anteriormente e, também, não serem explorados nas atividades propostas trouxe dificuldades para a realização de várias tarefas, pois estão na essência do conceito de polinômio. No que se refere ao planejamento das atividades, pode-se apontar a dificuldade de romper com a lógica indutiva e empírica que tem caracterizado o ensino de álgebra na atualidade.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de álgebra. Formação do conceito de polinômio. Teoria Histórico-Cultural. Pensamento e linguagem algébricos.

ABSTRACT

The algebra teaching still has constituted a challenge for math teachers, especially when considering the relationship between algebraic thought and language. Within this theme, this thesis insert into the line of research "Professional Development and Teaching Work and Teaching-Learning Process" and it is a subproject of Education Observatory Program - OBEDUC / CAPES and Notice 13/2012 FAPEMIG - "The teaching and learning of algebra in the final years of Elementary School ", which aims to develop algebra teaching activities that lead to learning and student development. This research aims to analyze the meaning assigned by students of the 8th grade of Elementary School to the concept of polynomial, exploring different concepts of algebra and algebraic education through a series of teaching activities. The theoretical dimension of this study is based on the principles of learning and human development, supported by the Historical-Cultural Theory, the theoretical contributions of Vigotski (2003, 2009), Davidov (1992, 1998, 1999), Bernardes (2012), Moura (2010), Libâneo (1990, 2014), Freitas (2013), Fiorentini, Miorim and Miguel 1993), Lins and Gimenez (2001). It is a qualitative research. The data collection procedures included bibliographical, documentary and field research. The bibliographical research aimed to support the study theoretically and to know what has been produced in the field. The documentary research aimed to contextualize the study within the curriculum frameworks and textbooks adopted in recent years. For the development of field research, the teaching experiment was used in the context of historical-cultural approach, performed in a class of 8th grade of elementary school, a public school in the city of Uberaba. From the bibliographical and documentary research, it can be seen that: the PCN and the textbooks are based mainly in the construction of empirical knowledge, emphasizing the empirical and inductive generalization. With regard to the appropriation of polynomials meanings, there is evidence that there were qualitative leaps because the activities sought to associate the polynomial algebra to the different conceptions, which enabled the expansion of the restricted idea of polynomial as a sum of monomials. The fact that the variable and the function concepts were not previously worked with the students and also not be operated on the proposed activities brought difficulties for performing multiple tasks because they are at the heart of the polynomial concept. With regard to planning activities, can point out the difficulty of breaking with the inductive and empirical logic that has characterized the teaching of algebra today.

Keywords: Teaching-learning algebra. Formation of the polynomial concept. Historical-Cultural Theory. Thinking and algebraic language.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTAS DE SIGLAS

CAPES -	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNEC -	Colégio Cenecista José Ferreira
EVA -	Borracha composta por etileno acetato de vinila, é a Espuma Vinílica Acetinada
IDEB -	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP -	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
MEC -	Ministério da Educação e Cultura
OBEDUC -	Observatório da Educação
PCN -	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA -	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PNDL -	Programa Nacional do Livro Didático
SAEB -	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
TCLE -	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
ZDP -	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Rocha... as rochas emergem de um local comum, provenientes da lava incandescente no centro da Terra. Há rochas que permanecem em camadas mais internas, aguardando o momento de serem reveladas. Enquanto isso, sofrem pressão e calor do meio que as envolve, podendo se modificar com o passar do tempo.

Outras rochas insurgem com uma força quase explosiva, sendo expostas à superfície. E é justamente na superfície, em contato com as chuvas, os ventos, a ação do sol, da água de rios e mares que essas rochas se alteram à medida que o tempo passa. Sofrem erosão e fraturas. Alguns fragmentos se depositam e, ao sofrer compressão, formam novas rochas. Já outros se misturam com os resquícios de outras rochas, de outros seres vivos e formam um novo solo. Em alguns aspectos podemos comparar o ser humano às rochas, enquanto borbulha em sua mente a busca pela compreensão do papel do homem no mundo e sua relação com a sociedade, ao se tornar humano, apropriando-se do que foi construído pelos que o antecederam.

O diferencial entre uma terra fértil e uma terra improdutiva está na qualidade e na diversidade de fragmentos e resquícios que as compõem. Em comparação ao solo, nós também somos constituídos das contribuições de nossos pares e seremos considerados solos férteis ou inférteis de acordo com o que proporcionamos "florescer", a partir de nossas aprendizagens.

A analogia feita entre o nosso trabalho de pesquisa e a rocha não tem a pretensão de compará-lo com o movimento dessa modificação, mas de chamar a atenção para a transformação, ou alteração em um meio, e é isso que podemos comparar ao ensino. Essa analogia se estende à escola, que é o lugar de transformação dos sujeitos, espaço encarregado historicamente de desenvolver o ensino e conduzir a uma aprendizagem pela qual o aluno se transforma e se humaniza.

Nas premissas de Vigostki (2003, p. 82), "[...] a educação pode ser definida como a influência e a intervenção planejadas, adequadas ao objetivo, premeditadas, conscientes, crescimento natural do organismo". A educação desencadeia o desenvolvimento. Para que isso aconteça é necessário que o professor desenvolva atividades de ensino que proporcionem aos alunos a assimilação dos conhecimentos tecidos pelo homem.

A educação tem a condição de possibilitar a proliferação de novas formas de interação social, pois o espaço escolar é um ambiente de produção das condições que intensificam as mudanças - na escola, o aluno humaniza-se.

A principal preocupação de Vigotski foi com o desenvolvimento do indivíduo e da espécie humana, que ele acreditava ser resultado de um processo histórico-cultural, ou seja, a aprendizagem seria resultado da interação entre o sujeito e o meio. Para ser completo, o indivíduo precisa desenvolver-se a partir dos demais. Daí a importância da cultura para esse pensador.

Nessa forma de pensar, a criança faz parte da cultura de onde nasceu e foi criada. Seus antepassados e contemporâneos que com ela convivem são peças importantes, pois, dotados de experiências, hábitos, valores, linguagem, participam da construção de seu conhecimento e desenvolvimento da sua forma de estar no mundo.

A base do pensamento vigotskiano se aproxima da forma como Karl Marx entendia a cultura, que seria uma criação do homem, resultante da complexidade crescente da vida humana. Seria, então, a cultura o processo pelo qual o homem acumula suas experiências, vivenciando o que consegue realizar, legando para a posteridade tudo o que pode criar a partir de suas atividades.

De acordo com a Teoria Histórico-Cultural de Vigotski e com base na compreensão do materialismo dialético, o mundo se desenvolve e se justifica em um sistema de normas, padrões e regras no qual as atividades cognitivas e materiais interferem na prática atual das relações do homem com o conhecimento, tornando-o mais eficiente e adequado ao mundo.

Considerando que há uma estreita relação entre desenvolvimento do homem e aprendizagem, Vigotski e seus seguidores russos lançaram as bases psicológicas - a Teoria Histórico-Cultural - para a construção de uma proposta pedagógica histórica e social para o segmento educacional.

Esta pesquisa tem como referencial a Teoria Histórico-Cultural, pois, para interpretar e apreender cientificamente o objeto de estudo, consideramos o pressuposto de que entre aprendizagem e desenvolvimento há uma relação dialética. Os processos psicológicos e sociais de formação de conceitos, de generalização teórica, a partir de atividades de ensino, nessa perspectiva, têm como pensadores Vigotski, Leontiev e Davidov, dentre outros. Essa teoria oferece uma fundamentação sólida, o que justifica a nossa opção.

Nessa teoria, a atividade é uma categoria central. Leontiev (1978) enfatizou que uma atividade é formada por vários componentes: motivos, necessidade, objeto, objetivo, operação, metas e ações, que não podem ser considerados separadamente – eles formam um sistema. A diferença entre a atividade e a ação é que a atividade é determinada pelo motivo, enquanto a ação é utilizada para a implementação deste motivo.

Para o aluno, é muito importante que haja uma motivação, uma necessidade para realizar a apropriação do conhecimento por meio de uma atividade de ensino. O motivo gera a necessidade e assim impulsiona a ação, ou seja, a condição e o procedimento para a estrutura da atividade de ensino. Segundo Bernardes (2012, p. 20), os estudantes,

> [...] mediante condições organizadas intencionalmente na atividade de ensino, têm a possibilidade de transformação da consciência quanto ao lugar social que ocupam na sociedade e quanto à necessidade de estarem em atividades de estudo.

O ensino é um processo que visa a transformação do aluno em que se criam possibilidades para a apropriação da produção humana e, assim, o ato de desenvolver as funções psíquicas superiores. O desenvolvimento do pensamento está relacionando com a organização do ensino na forma de construir situações propícias para a aprendizagem.

Tomando como ponto de partida e de sustentação esse referencial teórico e considerando os interesses da pesquisadora e a necessidade de buscar alternativas para o ensino-aprendizagem de álgebra, é que esta pesquisa foi desenvolvida. Insere-se em um projeto do Observatório da Educação – OBEDUC/CAPES (2012), intitulado "O Ensino e a Aprendizagem da Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental", que tem o objetivo de investigar como as situações didáticas mediadas por recursos tecnológicos, em especial os digitais, contribuem para o ensino e a aprendizagem da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e para o desenvolvimento do professor e do aluno em todas as dimensões. Portanto, é um subprojeto desse projeto "guarda-chuva". Esperamos que os alunos do Ensino Fundamental possam compreender melhor e aplicar os conhecimentos de álgebra desenvolvidos, com isso possibilitando a melhora do seu desempenho em matemática, e desenvolver as suas capacidades psíquicas superiores.

A trajetória desta pesquisadora como profissional do ensino não é longa. Licenciada em Matemática há oito anos, durante essa caminhada, vimos percebendo como é desafiador ser professora de matemática – essa disciplina tão temida por alguns alunos. Temos observado várias dificuldades, principalmente no que se refere à compreensão de alguns conceitos, especialmente os algébricos.

Como professora da Educação Básica e do Ensino Superior, vimos notando o quanto o aluno tem dificuldade nos estudos algébricos. Esse problema refere-se ao significado das letras, à compreensão de notações e convenções dos conceitos algébricos, à capacidade de analisar e generalizar os conceitos e os procedimentos que ele usa em aritmética, enfim, de articular pensamento e linguagem.

Então, questionamo-nos: como ensinar álgebra de forma que os alunos construam significações para o que está sendo apresentado? Um grande desafio que temos é tornar a matemática escolar significativa para o desenvolvimento intelectual dos alunos. Desta forma, sentimo-nos estimulados a buscar compreender alguns aspectos envolvidos no ensino e na aprendizagem da álgebra, procurando alternativas que possam contribuir para uma melhor aprendizagem.

Por outro lado, também, vários órgãos e agências governamentais, pesquisadores do campo da Educação Matemática, têm se preocupado com a qualidade da Educação Básica no Brasil, nas últimas décadas. Em particular, destacamos o ensino-aprendizagem de matemática, que tem gerado muitas discussões e críticas. Essa situação não sofre alteração quando se trata da análise das avaliações e dos desempenhos dos alunos nos sistemas de avaliações em larga escala.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, a ênfase que os professores dão ao ensino de álgebra não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações sistêmicas que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB, por exemplo, os itens referentes à álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do País. Os últimos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA, aplicado para alunos de vários países na faixa etária de 15 anos (idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países), avaliando as habilidades e competências nas disciplinas de ciências, português e matemática, têm sido alarmantes, de acordo com o Relatório Nacional do PISA 2012, elaborado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP.

D'Ambrosio (1986, p. 36) alerta-nos que devemos atentar para o ensino de matemática, pois "A matemática é o maior fator de exclusão nos sistemas escolares. O número de reprovações e evasões é intolerável. Em vista disso, faz-se necessário inovar ações pedagógicas que promovam mudanças no sentido de reverter esse quadro".

É no segundo ciclo (8º e 9º anos) do Ensino Fundamental que se inicia a sistematização do pensamento algébrico, ao serem trabalhados conteúdos escolares tais como expressão algébrica, equação do 1º grau, sistemas de equação e de inequação, polinômios, produtos notáveis, fatoração, função, dentre outros. Associa-se ao desenvolvimento do pensamento algébrico a apropriação de uma linguagem específica – a linguagem algébrica, entre os quais entendemos que há uma relação dialética. Nessa linguagem, as letras podem expressar generalizações de propriedades, podem representar valores desconhecidos ou incógnitas, exprimir relações entre grandezas ou, ainda, representar símbolos abstratos. Ressaltamos que o ensino de álgebra contribui para o desenvolvimento da criatividade, da concentração, do raciocínio lógico e abstrato, das habilidades de generalizar e de comunicar ideias.

Em sintonia com o pensamento de Vigotski (2010) e Davidov (1982), nosso entendimento sobre a importância do domínio da álgebra é que ela eleva ao nível superior o pensamento matemático, o que possibilita uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada teoricamente. A álgebra liberta o pensamento do aluno, elevando-o a um nível mais generalizado.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 88) apontam que não existe maneira única de se expressar o pensamento algébrico, pois ele pode acontecer de várias formas, seja "através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, por meio de uma linguagem algébrica de natureza estritamente simbólica".

Optamos por desenvolver nossa pesquisa no 8º ano do Ensino Fundamental, porque nele os alunos desenvolvem com uma maior ênfase o conhecimento e a linguagem algébrica, apresentando, inclusive, muitas dificuldades em atribuir significados ao que lhes é apresentado. Como afirmam os autores Imenes e Lellis (1994, p. 2):

> Professores e alunos sofrem com a álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar, outros tentando engolir técnica de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significados para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos da 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem pouco resultado.

Nas diversas concepções de álgebra e de educação algébrica apresentadas por pesquisadores e educadores matemáticos, percebe-se que elas estão fortemente atreladas à relação entre pensamento e linguagem. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) consideram características do pensamento algébrico: levantar hipóteses, fazer afirmações e justificações, identificar variáveis e constantes, estabelecer relações entre grandezas, generalizar as regularidades, usar variáveis e pensar em totalidades. Também Lee (2001) e Lins e Gimenez (2001) apresentam categorias que dizem respeito a essa relação. Percebem a álgebra como um modo de produzir significado, sem reduzi-la unicamente a uma noção abstrata e extremamente genérica, mas que também compreende as manipulações formais carregadas de significados.

Conforme o exposto, as atividades algébricas propostas no Ensino Fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento, a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e aos procedimentos, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das variáveis.

Desta forma, procuramos nos apoiar numa concepção de ensino que compreenda a necessidade de o professor selecionar atividades que promovam a formação de conceitos teóricos, a partir de experiências concretas em que os alunos possam observar, explorar, especular, interagir entre si e com o professor, uma vez que disso depende em grande parte o sucesso na aprendizagem da matemática.

Com base no exposto, esta pesquisa foi orientada pela seguinte questão: como o aluno do 8º ano do Ensino Fundamental constrói significados para "polinômios" a partir de atividades de ensino, explorando diferentes concepções de álgebra?

Para orientar a investigação, outras questões foram levantadas: como a formação de conceitos teóricos é abordada na Teoria Histórico-Cultural? Quais são as concepções de álgebra e de educação algébrica apresentadas por pesquisadores da área de Educação Matemática? Como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN, as Matrizes Curriculares do município de Uberaba-MG e os livros didáticos adotados tratam a álgebra e, particularmente, os polinômios? Que tipo de atividade favorece a construção de significados para os polinômios?

Assim, o nosso objetivo foi analisar os significados construídos pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental para o conceito de polinômio, explorando diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica, por meio de uma sequência de atividades de ensino.

O pensamento e a linguagem são processos mentais, sendo a linguagem um instrumento elaborado socialmente, que se utiliza de signos para essa comunicação. Em consonância com Vigotski (2009, p. 412), "A linguagem não serve como expressão de um pensamento pronto. Ao transformar-se em linguagem, o pensamento se reestrutura e se modifica. O pensamento não se expressa, mas se realiza na palavra." Com a palavra atribuem-se os significados e, segundo o autor, os significados das palavras evoluem.

> O significado da palavra é um fenômeno do pensamento somente na medida em que o pensamento está ligado à palavra e encarnado nela e vice-versa, é um fenômeno da linguagem somente na medida em que a linguagem está ligada ao pensamento e iluminada por ele. É um fenômeno do pensamento

> verbal ou da palavra com sentido, é a unidade do pensamento e da palavra. (VYGOTSKY, 2001, p. 289, tradução nossa).

Pretendemos, ainda: levantar as diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica na literatura em Educação Matemática; compreender como a Teoria Histórico-Cultural aborda a formação de conceitos científicos; investigar como os PCN, as Matrizes Curriculares do município de Uberaba-MG e o livro didático tratam a álgebra, de modo especial os polinômios; elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática de atividades, abordando o significado de polinômio, a partir de diferentes concepções de álgebra, buscando indícios da relação entre pensamento e linguagem algébrica.

Os procedimentos de coleta de dados incluíram pesquisa bibliográfica, documental e de campo. A pesquisa bibliográfica teve o objetivo de fundamentar o estudo teoricamente, além de permitir conhecer o que já foi produzido no campo. A pesquisa documental visou contextualizar o estudo no âmbito dos referenciais curriculares e dos livros didáticos adotados nos últimos anos. Para o desenvolvimento da pesquisa de campo, foi utilizado o experimento didático na perspectiva da abordagem histórico-cultural, observando o que recomenda Libâneo (2009, p. 73), ao situar a pesquisa em didática: "o que se busca na investigação em didática é a determinação das condições ótimas de transformação das relações que o aprendiz mantém com o saber, ou seja, a mediação docente da aprendizagem".

O experimento didático se estruturou em atividades de ensino que tiveram o objetivo de propiciar ao educando uma aprendizagem que busca a compreensão de conceitos teóricos algébricos a partir de seus componentes essenciais e com recursos didáticos diversificados. Segundo Freitas (2007), o termo "experimento", utilizado aqui, não tem equivalência com a pesquisa quantitativa experimental identificada comumente como uma abordagem positivista. Com base nos estudos da Teoria Histórico-Cultural, é possível e necessário que haja um desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

O experimento didático foi realizado na Escola Municipal Uberaba, com uma turma de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, aplicando cinco atividades de ensino, que foram desenvolvidas em um período de quinze aulas. Essas atividades foram elaboradas após um período de observação das aulas de matemática, durante um mês, na turma escolhida, e com a colaboração da professora regente e do grupo de pesquisa no qual este estudo se insere. Essas atividades foram executadas pela pesquisadora. As aulas foram gravadas em vídeo e áudio para análise dos dados. Os registros dos alunos também se constituíram em dados de pesquisa. Os alunos cujos pais não autorizaram a participação, assinando o Termo de Consentimento

Livre e Esclarecido, ou que não deram seu assentimento, permaneceram na sala de aula, mas as suas atividades não foram analisadas.

Os registros das falas e as produções escritas, tanto dos alunos como do professor pesquisador, foram analisados à luz da teoria que fundamentou a pesquisa, a Teoria Histórico-Cultural, para identificar os significados de polinômios trabalhados durante o experimento. As ações dos alunos foram mediadas pelas atividades de ensino da professora-pesquisadora, observadas e analisadas para identificar elementos de organização do pensamento e da aprendizagem. Assim, a análise teve como foco principal a identificação de situações de aprendizagem e as evidências de construção de significações de polinômios pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

Na tentativa de responder às nossas indagações, organizamos este trabalho em quatro capítulos que contemplam o movimento teórico e metodológico da investigação.

No primeiro capítulo, intitulado *Fundamentos Teórico-Metodológicos: buscando aportes na Teoria Histórico-Cultural,* apresentamos o referencial teórico utilizado nesta pesquisa, que se sustentou nas contribuições de Vigotski (2003, 2009, 2012) sobre a relação entre pensamento e a linguagem, o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, mediação, e, ainda, em seus seguidores, Leontiev (1978, 1983, 1991), com a Teoria da Atividade, e Davidov (1986, 1987, 1999) com as contribuições sobre a e atividade de estudo.

No segundo capítulo, C*oncepções de álgebra e de pensamento algébrico, o conceito de polinômios e os seus nexos,* discorremos sobre as concepções de álgebra e de educação algébrica, apresentadas por educadores matemáticos brasileiros e de outros países. Apresentamos, também, como o conceito de polinômio é abordado nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, na Matriz Curricular do município de Uberaba-MG, no plano de ensino e nos livros didáticos.

No terceiro capítulo, *A Trajetória Metodológica: a escola, os alunos, as atividades*, foram apontados os procedimentos metodológicos da pesquisa. Descrevemos o ambiente onde foram aplicadas as atividades e os sujeitos que participaram, e, ainda, os dados da aplicação da avaliação diagnóstica aos alunos.

No capítulo quatro, a *Análise das Atividades: as significações construídas pelos alunos sobre polinômios*, descrevemos a organização das atividades de ensino e a análise das ações dos alunos, os episódios de ensino, buscando compreender os meios e os procedimentos que possibilitaram evidenciar a apropriação do conceito de polinômio, os significados partilhados e os sentidos construídos.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS: BUSCANDO APORTES NA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

> A educação deve desempenhar o papel central na transformação do homem, nesta estrada de formação social consciente de gerações novas, a educação deve ser a base para alteração do tipo humano histórico. As novas gerações e suas novas formas de educação representam a rota principal que a história seguirá para criar o novo tipo de homem.
>
> (VYGOTSKY, 1930)

Neste capítulo, pretendemos explicitar os pressupostos teóricos que fundamentam esta pesquisa, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. Assim, serão abordados aspectos referentes à relação entre pensamento e linguagem, ao ensino desenvolvimental, à zona de desenvolvimento proximal e à Teoria da Atividade.

1.1 Alguns pontos de partida

A Teoria Histórico-Cultural tem suas origens na escola soviética, com Vigotski[1] e seus seguidores: Luria, Leontiev, Zaporojets, Davidov, Elkonin, Galperin, Talizina dentre outros, no início do século XX, com base no materialismo histórico-dialético.

Conhecer a concepção de homem e a sua relação com a natureza é fundamental para compreendermos os pressupostos de uma teoria. No caso da Teoria Histórico-Cultural, elas são encontradas no pensamento de Marx a respeito da natureza humana. Segundo Erick Fromm (1983), a ideia fundamental de Marx é de que o homem faz sua própria história, modificando a sua relação com a natureza, a qual ele transforma e, por conseguinte, a relação consigo mesmo.

---

[1] A escrita do nome de Vygotsky é encontrada de várias formas: Vigotsky, Vygotsky, Vigotski, Vygotski. Nesse estudo, optaremos pela grafia Vigotski, mas nas citações e referências manteremos a forma original das obras usadas.

Para Marx, o homem contém uma matéria-prima humana, que não pode ser alterada em termos da sua estrutura, desde o período pré-histórico. Mas, ao mesmo tempo, desenvolve-se e se transforma – o homem é um produto da história, e da história que ele cria, por meio de seu próprio trabalho e produção (FROMM, 1983).

O homem, segundo Marx, se constitui de fora para dentro, nas relações sociais e com a natureza. Os meios sociais e a natureza são criados, transformados pelo trabalho humano, na medida em que, para "*conhecer o mundo, o homem tem de fazer do mundo o seu próprio mundo*" (FROMM, 1983, p. 36, grifos do autor). Isso significa que sujeito e objeto não podem ser vistos como separados.

O trabalho e a linguagem foram o estímulo para gradualmente o homem se transformar em um humano e, com o desenvolvimento do humano, transformar-se continuamente. Na concepção marxista, o trabalho e o capital não são meras categorias econômicas, o trabalho não é um meio para um fim, mas é uma categoria antropológica. Assim, um elemento que desempenha papel central em sua teoria é o trabalho. Como uma expressão da vida humana, o trabalho modifica a relação do homem com a natureza, modificando-a, e dessa forma o homem é também transformado por meio do trabalho. Essa atividade não é individual, mas coletiva:

> A característica principal, nesse aspecto, é que o trabalho induz modificações não apenas e puramente biológicas, devido à atividade com instrumentos, mas também modificações de cunho psicológico, ou seja, o homem, por via do trabalho, passa a controlar seu comportamento, da mesma forma que domina a natureza "(tese de Engels)". Esse movimento não é individual, mas fundamentalmente coletivo e responsável pela cultura. (RIGON, ASBAHR, MORETTI, 2010, p. 18, destaque dos autores).

De acordo com Marx, o processo de humanização ocorre quando o homem se apropria do que ele foi produzindo ao longo da sua história. Assim, o trabalho é um elemento fundamental para a humanização, mas, como ele nos mostra, traz em si a questão da contradição: promove a riqueza de alguns e a privação para outros, produz o espírito, mas também a imbecilidade. O desenvolvimento ocorre como resultado das contradições entre as forças produtivas e as outras condições subjetivas e do sistema social existente. É por meio do trabalho que o homem se torna humano, isto é, apropria-se da essência humana, que, na perspectiva dessa teoria, é um produto histórico-cultural.

A base do pensamento vigotskiano se aproxima da forma como Marx entendia a cultura, uma criação do homem, resultante da complexidade crescente da vida humana. A cultura é o processo pelo qual o homem produz e acumula suas experiências, vivenciando o que consegue realizar, legando para a posteridade tudo o que produziu. Quando o homem, ao atuar sobre a natureza, incorpora conhecimentos transmitidos por gerações por meio da educação e da cultura, também cria novas ideias e necessidades, que se tornam tão importantes quanto as suas necessidades básicas. Desta forma o homem desenvolve a capacidade de inovar as ideias e de executá-las de formas diferentes, promovendo, assim, transformação do conhecimento.

Como corrobora Sforni (2008, p. 2):

> Os homens, diferentemente dos animais, têm uma atividade criadora e produtiva – o trabalho. Ao criarem os objetos que satisfazem às necessidades humanas, eles criam também o conhecimento sobre essa criação, assim, ao mesmo tempo em que produzem bens materiais, desenvolvem os saberes sobre o mundo circundante, ou seja, desenvolvem ciência, tecnologia e arte.

Com base no materialismo histórico-dialético, a partir das obras de Marx desenvolveu-se, no início do século XX, a Teoria História-Cultural. O principal ponto de referência do desenvolvimento da psicologia soviética foi, por um lado, um período de uma crise, a questão de encontrar novas formas metodológicas e práticas para o estudo da psique e, de outra forma, tentar construir uma base científica e metodológica coerente com a nova psicologia baseada na filosofia marxista.

Dessa forma, o papel das influências sociais, bem como o papel de fatores genéticos no desenvolvimento da psique humana, são reconhecidos e foram estudados pela teoria. O desenvolvimento ativo da psicologia experimental tornou-se uma base para a exploração de mecanismos de influência sobre os fenômenos psíquicos.

Neste contexto, Vigotski e seus colaboradores, Luria e Leontiev, que compõem a TROIKA, nas primeiras décadas do século XX, reuniram todas as condições para idealizar uma nova concepção de psicologia, de educação e de pedagogia. Ele desenvolveu uma abordagem histórica da psique humana, especificamente como uma doutrina psicológica da consciência, a mais alta forma do reflexo da realidade. Então nasce um processo gradual de repensar os valores clássicos do marxismo para a ciência da psicologia e da educação. “[...] o projeto central da Teoria Histórico-Cultural é estudar a formação da subjetividade dos indivíduos, a partir de seu mundo objetivo, concreto, isto é, a formação da consciência humana em sua relação com a atividade.” (RIGON, ASBAHR, MORETTI, 2010, p. 22).

Vigotski explica a abordagem histórica, afirmando que o estudo histórico não se reduz ao estudo do passado, mas “estudar algo historicamente significa estudá-lo em movimento. Esta é a exigência fundamental do método dialético.” (VYGOTSKI, 2012, p. 67).

A partir da Teoria Histórico-Cultural, é possível compreender como ocorre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores (Figura 1), o qual é histórica e culturalmente determinado.

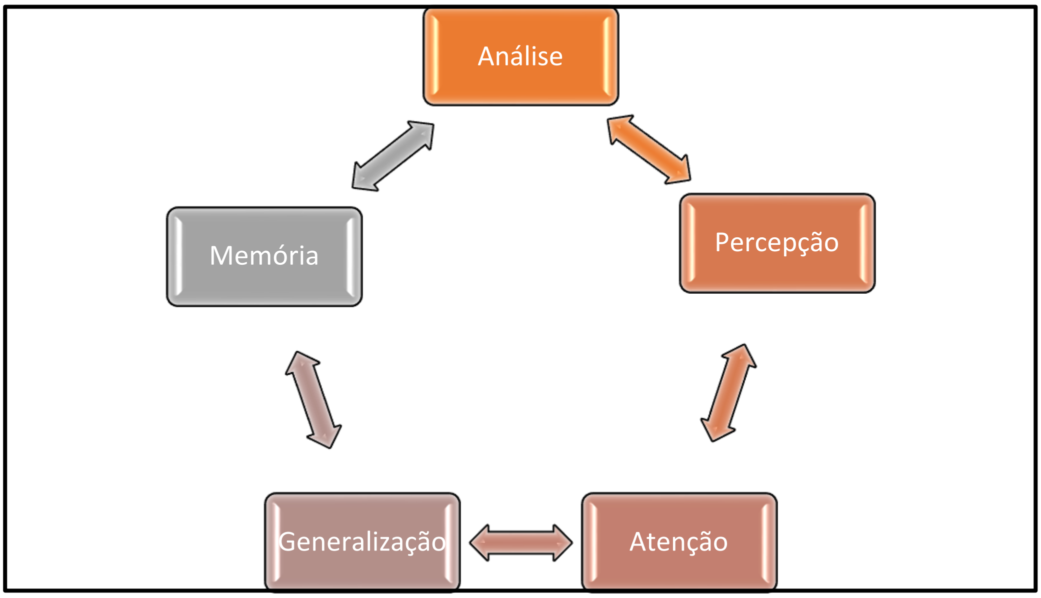


Figura 1: Esquema das funções psíquicas.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Vigotski utilizava como base de entendimento a ciência psicológica em que o homem é histórico, e não um ser abstrato e universal. Sua origem e seu desenvolvimento são mediados pelos signos e os instrumentos como instrumentos psicológicos e, ainda, as atividades individuais, as suas relações interpessoais e a linguagem.

> A análise das etapas críticas que desencadeiam mudanças no desenvolvimento humano a partir do uso de instrumentos, pelo trabalho e pelo uso de signos psicológicos, e da apropriação da cultura como o modo pelo qual se torna possível a dimensão ontológica nos sujeitos, identifica o processo histórico da evolução do homem. (BERNARDES, 2012, p. 31).

Desta forma ele proporciona uma importante contribuição, ao definir os principais eixos de sua concepção teórica: primeiramente, o desenvolvimento psicológico do ser humano é um processo histórico; e, também, o psiquismo é de uma natureza cultural.

Assim, declara que toda ação educativa é uma ação social e que deve ser considerada com bases históricas no desenvolvimento individual e cultural do indivíduo. Os homens criam e fabricam instrumentos e, nesse processo criativo, as novas gerações têm a possibilidade de penetrar e se apropriar de objetos e fenômenos pertencentes ao mundo daqueles que as precederam (LEONTIEV, 1978). O autor afirma que quanto maior é o progresso da humanidade, mais rica é a prática sócio histórica acumulada por ela, e mais cresce o papel específico da educação. Toda etapa nova de desenvolvimento da humanidade traz em seu bojo uma nova forma de educação.

A educação é o processo de transmissão e assimilação da cultura produzida historicamente, sendo que é por meio dela que os indivíduos humanizam-se, herdam a cultura da humanidade (BERNARDES, 2012).

Podemos dizer nessa perspectiva teórica que o homem se humaniza a partir da apropriação da cultura criada por gerações anteriores, como afirma Leontiev (1978, p. 267):

> Podemos dizer que cada indivíduo ‘aprende’ a ser um homem. O que a natureza lhe dá quando nasce não lhe basta para viver em sociedade. É-lhe preciso ainda adquirir o que foi alcançado no decurso do desenvolvimento histórico da sociedade humana.

1.2 Mediação: os instrumentos e os signos

A teoria de Vigotski coloca as suas bases no processo de internalização das atividades social e historicamente construídas, como afirma o próprio autor: “A internalização das atividades socialmente enraizadas e historicamente desenvolvidas constitui o aspecto característico da psicologia humana: é a base do salto qualitativo da psicologia animal para a psicologia humana.” (VIGOSTSKI, 2003, p. 76).

Assim, a atividade mental é proveniente de uma ação coletiva, ou seja, interpsíquica, para uma individual, a intrapsíquica. A transição de um tipo de atividade para outra é o que é chamado de internalização.

Vigotski considera que esse processo é sempre mediado. A atividade mediada ocorre por meio de signos e instrumentos, como o ilustra ele próprio (VIGOSTSKI, 2003, p. 54):

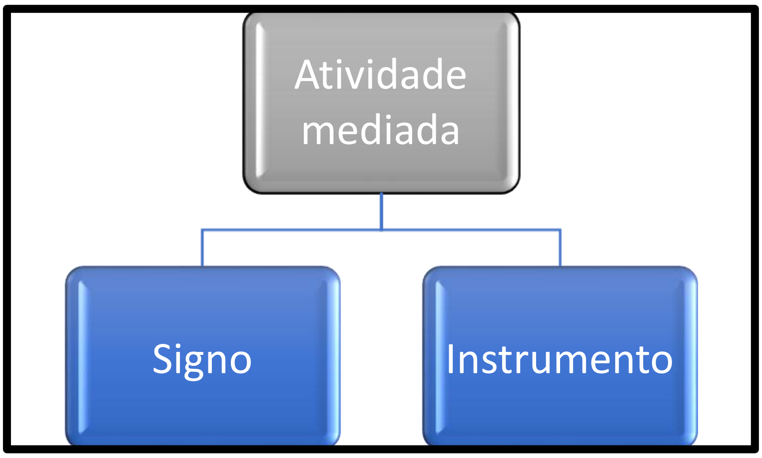


Figura 2: A atividade mediadora.
Fonte: Elaboração pela autora (2015) a partir do esquema de Vigotski (2003, p. 54).

Em consonância com o autor:

> [...] aprendizagem não é desenvolvimento; entretanto, o aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer. Assim, o aprendizado é um aspecto necessário e universal do processo de desenvolvimento das funções psicológicas culturalmente organizadas e especificamente humanas. (VIGOTSKI, 2003, p. 118).

Os signos, para ele, são criação humana, são artificiais e têm a função de regular a conduta. “Chamamos signos aos estímulos-meios artificiais introduzidos pelo homem na situação psicológica, que cumprem a função de autoestimulação [...] para dominar a conduta própria ou alheia.” (VIGOSTSKI, 2012, p. 83, tradução nossa). Deste modo, estabelece que a atividade que diferencia em primeiro lugar o homem dos animais é a criação e o emprego de signos, ou seja, a *significação.* Essa é uma de suas teses principais – a possibilidade de criação pelo homem, em sua vida social, de sistemas complexos de signos, sem os quais seriam impossíveis a atividade laboral e a própria vida social. E afirma: “Entre todos os sistemas de relação social o mais importante é a linguagem.” (idem, p. 86). Segundo Marx e Engels (2001, p. 10), “[...] a linguagem só nasce, como a consciência, da necessidade, da carência física do intercâmbio com outros homens”.

Os signos têm certa analogia com o emprego das ferramentas, mas Vigotski argumenta que não há uma identificação entre eles. Ainda que os signos tenham uma função de meio auxiliar para as tarefas psicológicas, ou seja, uma função mediadora, não se constituem em ferramentas no sentido metafórico.

> Por meio da ferramenta o homem influi sobre o objeto de sua atividade, a ferramenta está dirigida até fora: deve provocar uns ou outros câmbios nos objetos. É o meio da atividade exterior do homem, orientado a modificar a natureza. O signo não modifica nada no objeto da operação psicológica: é o meio de que se vale o homem para influir psicologicamente, tanto em sua própria conduta, bem como na dos demais; é um meio para sua atividade interior, dirigida a dominar o próprio homem: o signo está orientado para dentro. (VIGOTSKI, 2012, p. 94).

O autor considera os signos como ferramentas psicológicas que proporcionam a relação do sujeito consigo mesmo e com os outros. Utilizar instrumentos no processo de comportamento requer o surgimento de novas funções relacionadas com esse processo natural atribuído como sendo um instrumento e, assim, alterando o curso de alguns aspectos nos processos mentais.

> Por meio da influência do desenvolvimento do trabalho (atividade essencialmente humana) e da comunicação pela linguagem (instrumento simbólico), as leis sócio-históricas passam a gerir o desenvolvimento do homem como ser humano integrado à sociedade pela cultura. (BERNARDES, 2012, p. 30).

A interação, para Vigotski, não tem o sentido de adaptação ao meio, e sim de uma participação consciente e de possibilidade de intervenção. A internalização é uma apropriação da significação social, portanto, do interpessoal para o intrapessoal. A internalização envolve a ideia de reconstrução interna da operação externa. Esse movimento ocorre na atividade do sujeito no mundo, utilizando a relação com os signos originados pela cultura. Esse processo é explicado em Vigotski (2003, p. 64):

> Um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Todas as funções no desenvolvimento da criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro entre pessoas (‘interpsicológica’), e, depois, no ‘interior’ da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos.

Em sintonia com o pensamento do autor, pode-se argumentar que todas as funções mentais superiores são relações sociais internalizadas, resultantes da interação em um contexto cultural e social.

No que se refere à internalização dos conceitos algébricos, esse processo ocorre também dessa forma, entretanto, o que se tem observado é que, muitas vezes, esse movimento do externo para o interno não tem ocorrido, isto é, não há a internalização desses conceitos.

Na perspectiva vigotskiana, no trabalho que o homem realiza, ao mesmo tempo em que transforma a natureza para atender as suas necessidades, também é transformado. Suas funções mentais superiores são de caráter social e estão presentes apenas no homem, pois são caracterizadas por intencionalidade de ações, que são mediadas. Esses são os resultados da interação entre os fatores biológicos (funções psicológicas elementares) e fatores culturais, que evoluíram na história humana. Dessa forma, o desenvolvimento mental é marcado pela interiorização das funções psicológicas. É um processo que não segue um curso único, universal e independente do desenvolvimento cultural.

Então, "nesse movimento da consciência, cuja intencionalidade passa ser uma propriedade inerente, o homem constitui-se efetivamente humano." (RIGON, ASBAHR, MORETTI, 2010).

Dessa forma, conforme destaca o autor, o conhecimento não é um objeto que é passado de um para o outro, mas é algo que se estabelece por meio de operações e habilidades cognitivas que são construídas na interação social. Vigotski (2003) afirma que o desenvolvimento intelectual do indivíduo não pode ser entendido como independente do ambiente social em que a pessoa está envolvida, pelo contrário, o desenvolvimento das funções psicológicas superiores ocorre primeiro no plano social e depois em nível individual.

Essas ideias são importantes para o campo educacional, pois a educação é um processo de humanização. Se o homem se humaniza a partir da apropriação da cultura produzida pelos que o antecederam, a educação escolar é um espaço privilegiado para que isso ocorra. Entretanto, o processo da apropriação da cultura humana não se dá de forma espontânea, faz-se necessária a mediação de outros homens, conforme nos apontam os teóricos da perspectiva histórico-cultural.

1.3 A relação do pensamento-linguagem: alguns aspectos

Marx proveu as bases para compreensão da natureza social do homem e como sua consciência é produto do social. A linguagem é a consciência do real, é histórica e cultural. Segundo Leontiev (1978, p. 166), "[...] a aquisição da linguagem não é outra coisa senão o processo de apropriação das operações de palavras que são fixadas historicamente nas suas significações”. Nesse sentido, Marx e Engels (2007, p. 34-35) afirmam:

> A linguagem é tão antiga quanto a consciência – a linguagem é a consciência do real, prática, que existe para os outros homens e que, portanto, também existe para mim mesmo; e a linguagem nasce, tal como a consciência, do carecimento, da necessidade de intercâmbio com outros homens. Desde o início, portanto, a consciência já é um produto social e continuará sendo enquanto existirem homens.

É no significado que o pensamento e a linguagem se unem formando o pensamento verbal e o conceitual; nesse sentido é que se podem encontrar respostas às indagações sobre as características das relações entre o pensamento e a linguagem.

Vigotski, em suas obras, a partir de pesquisas realizadas, busca elucidar como o pensamento e a linguagem surgem e se configuram durante o processo de desenvolvimento histórico da consciência humana, que é o processo de formação do ser humano (BERNARDES, 2012).

Vigotski (2009) questiona as teorias que concebem o pensamento e a linguagem como processos autônomos, independentes, que ocorrem paralelamente e que, em um dado momento, convergem numa relação mecânica, externa, que faz surgir o pensamento verbalizado.

O seu método de análise desdobra o pensamento discursivo complexo em unidades, que não perdem as propriedades inerentes ao todo, “mas contêm, em sua forma primária e simples, aquelas propriedades do todo em função dos quais se empreende a análise.” (VIGOTSKI, 2009, p. 398). Para ele, o significado da palavra é a unidade entre o pensamento e a linguagem. Assim se refere ao significado da palavra:

> [...] é uma unidade indecomponível de ambos os processos e não podemos dizer que ele seja um fenômeno da linguagem ou fenômeno do pensamento. A palavra desprovida de significado não é palavra, é um som vazio. Logo o significado é um traço constitutivo indispensável da palavra. [...] o significado da palavra não é senão uma generalização ou conceito. Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível de pensamento. Consequentemente, estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um ato do pensamento. (VIGOTSKI, 2009, p. 398).

As ideias de Vigotski apresentadas acima são fundamentais para a discussão da relação pensamento e linguagem nessa perspectiva, como também são basilares para as atividades de ensino-aprendizagem, pois é o compartilhamento de significados, devidamente planejado, a sua finalidade principal. Esses significados constituem a generalização que buscamos ao tratar de conceitos e de procedimentos no ensino da matemática.

Outro ponto fundamental da teoria de Vigotski sobre o pensamento e a linguagem é a possibilidade do desenvolvimento da palavra e do seu significado, no sentido de reformulação, como um processo dinâmico.

> O significado da palavra é inconstante. Modifica-se no processo do desenvolvimento da criança. Modifica-se também sob diferentes modos de funcionamento do pensamento. É antes uma formação dinâmica que estática. O estabelecimento da mutabilidade dos significados só se tornou possível quando foi definida corretamente a natureza do próprio significado. Esta se revela antes de tudo na generalização, que está contida como momento central, fundamental, em qualquer palavra, tendo em vista que qualquer palavra já é uma generalização. Contudo, uma vez que o significado da palavra pode modificar-se em sua natureza interior, modifica-se também a relação do pensamento com a palavra. (VIGOTSKI, 2009, p. 408).

A linguagem e o pensamento são dois tipos de atividade social, diferentes tanto pela sua natureza quanto em suas características específicas, mas que se unem, segundo Sousa *et al.* (2014, p. 97): "A linguagem alimenta o pensamento". As pessoas podem expressar seus pensamentos de muitas maneiras, como em gestos, ações, músicas, desenhos e ou até em fórmulas. Mas esse modo de se expressar, que é universal, é a linguagem.

É na linguagem que o homem fixa sua ideia e assim tem a oportunidade de expor a sua análise. Ao expressar seus pensamentos, o homem esclarece sua mente. A palavra é essencial para o pensamento e é a forma material da existência do conhecimento. "Não é pela palavra por si mesma o que constitui o eixo da consciência, mas os conhecimentos socialmente acumulados e objetivados na palavra." (RUBINSTEIN apud BERNARDES, 2012, p. 34). Os pensamentos não existem isoladamente da linguagem.

> [...] a linguagem torna-se necessidade e condição para o desenvolvimento social e individual dos homens. Pela linguagem, os homens compartilham representações, conceitos técnicos e os transmitem às próximas gerações. (RIGON, ASBAHR, MORETTI, 2010, p. 20).

Segundo a teoria vigotskiana, o significado do entrelaçamento entre o pensamento e a linguagem é chamado de *pensamento verbal.* Para o estudo do pensamento verbal, Vigotski parte de ideia de unidade de análise do pensamento verbal, que seria o significado da palavra.

Durante o desenvolvimento da linguagem e do pensamento, a natureza de sua interação não permanece inalterada. Segundo a ideia marxista, a linguagem é tida como a realidade do pensamento, ela é a expressão externa do conteúdo interno de objetos e fenômenos, ou seja, simula, ou melhor, traduz, o mundo exterior com a ajuda de signos. Em toda sociedade as pessoas reagem a certos sinais de acordo com as suas tradições culturais.

Quando a linguagem começa a servir de instrumento psicológico para a regulação do comportamento, inicia-se a percepção, e assim a formação de novas memórias, criando então novos processos no pensamento. Nesse sentido, a linguagem é a principal mediação na formação e no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, compõe um sistema simbólico que promove o desenvolvimento no decorrer da história social do homem, constituindo sinais ou signos em estruturas complexas. Essas estruturas permitem, por exemplo, nomear objetos e destacar as qualidades e as relações entre os próprios objetos.

De acordo com Vigotski, a linguagem incorpora e constitui o significado, que é construído no processo social e histórico. Quando um indivíduo internaliza a linguagem, acontece o acesso a esses significados que, por sua vez, fornecem a base para que isso possa significar sua experiência, constituindo, assim, a sua consciência.

Com base na origem do indivíduo (ontogênese), dois saltos devem ocorrer para que haja o desenvolvimento qualitativo. O primeiro, quando o indivíduo adquire a linguagem oral, e o segundo, quando passa para a linguagem escrita.

A linguagem é um dos sistemas de mediação das funções psicológicas superiores, a qual surge como um instrumento de comunicação e planejamento. É justamente por causa da sua função de comunicação que o indivíduo se apropria do mundo externo e, em seguida, pela comunicação estabelecida, há a interação quando ocorrem as interpretações da informação, dos conceitos e dos significados. O signo é uma criação humana e tem o caráter social da mente humana.

As funções mentais superiores e a ação humana em geral são mediadas por ferramentas que são definidas como instrumentos técnicos e também por signos que são considerados como as ferramentas psicológicas. Vigotski enfoca outros sistemas de signos e linguagem como sendo parte mediadora da ação humana. Entre esses instrumentos psicológicos, incluem-se vários sistemas de signos, como o sistema de numeração, mapas, desenhos e todos os tipos de símbolos ou signos.

> [...] os signos são 'instrumentos psicológicos' que ampliam as ações psicológicas do indivíduo, ao potencializar as capacidades de memória, atenção, controle voluntário sobre a própria atividade; ou seja, a mediação por meio de signos é fundamental para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores (SFORNI, 2004, p. 34-35).

Um exemplo nítido de unidade de internalização como processo constitutivo do ser humano é a relação dialética entre o pensamento e a linguagem. "Por sua estrutura, a linguagem não é um simples reflexo especular da estrutura do pensamento [...] ao transformar-se em linguagem, o pensamento se reestrutura e se modifica." (VIGOTSKI, 2009, p. 412). A linguagem pode ser representada como escrita, oral e interna.

> Se a linguagem escrita é diametralmente oposta à oral no sentido de sua máxima amplitude e da total ausência das circunstâncias que provocam a omissão do sujeito na linguagem oral, porém no sentido contrário, porque nela predomina a predicação de forma absoluta e constante, como resultado, a linguagem oral ocupa um lugar intermediário entre a linguagem escrita por um lado e a interna por outro (VIGOTSKI, apud BERNARDES, 2012, p. 138).

Há uma estrita relação entre a linguagem e a palavra, um dos símbolos mais importantes da cultura humana. Na palavra encontram-se informações que podem acarretar o pensamento. A palavra registra a expressão do conteúdo interno e seus significados. A linguagem interna se refere ao significado da palavra, ou seja, à sua semântica.

Segundo Luria (1987), o significado da palavra é formado pelas relações objetivadas no processo histórico da palavra. Assim,

> O significado é um sistema estável de generalizações, que se pode encontrar em cada palavra, igualmente para todas as pessoas. Esse sistema pode ter diferente profundidade, diferente grau de generalização [...], mas sempre conserva o núcleo permanente, um determinado conjunto de enlaces. (LURIA apud BERNARDES, 2012, p. 139).

O homem é um ser social que se apropria de significados dos objetos, atribuindo-lhes sentidos nas suas relações interpessoais. O sentido, segundo Luria (1987), "é o elemento fundamental da utilização viva, ligada a uma situação concreta afetiva, por parte do sujeito". Vigostki (2010, p. 465) diferencia sentido de significado:

> [...] o sentido de uma palavra é a soma de todos os fatos psicológicos que ela desperta em nossa consciência. Assim, o sentido é sempre uma formação dinâmica, fluida, complexa, que tem variadas zonas de estabilidade. O

> significado é apenas uma dessas zonas do sentido que a palavra adquire no contexto de algum discurso e, ademais, uma zona mais estável, uniforme e exata. Como se sabe, em contextos diferentes a palavra muda facilmente de sentido. O significado, ao contrário, é um ponto imóvel e imutável que permanece estável em todas as mudanças de sentido da palavra em diferentes contextos.

Assim, a palavra, com a evolução do seu significado, desenvolve e adquire novos sentidos, porque esses têm uma natureza mais dinâmica, fluida e complexa. O sentido e o significado demostram uma relação dialética entre o pensamento e a linguagem. Uma palavra pode ter um significado para um sujeito, mas o sentido pode ser diferente, dependendo do contexto empregado. O processo histórico formado pelas objetivações humanas, ou seja, contido na palavra, é o significado. O sentido é o que cada pessoa atribui a um significado.

Tais considerações são fundamentais para esta pesquisa, pois buscamos indícios dos significados atribuídos ao conceito de polinômio, um conceito algébrico trabalhado no Ensino Fundamental, no 8º ano. Os seus significados foram construídos historicamente pela humanidade, portanto, cabe à escola e, especificamente, aos professores de matemática organizar as atividades de ensino para que esses significados sejam partilhados e o aluno possa construir sentidos para ele, os quais poderão ser ampliados em sua trajetória escolar.

1.4 Conceitos espontâneos e conceitos científicos

Segundo Vigotski, há dois tipos de conceitos – o científico e o espontâneo. O conceito científico é o conhecimento que pode ser adquirido na escola, já o espontâneo é aquele formado a partir de vivências e da observação do mundo. Há uma relação dialética entre esses conceitos.

> O caminho do desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos da criança sob a forma de duas linhas de sentidos opostos, uma das quais se projetando de cima para baixo, atingindo um determinado nível no ponto em que a outra se aproxima ao fazer o movimento de baixo para cima. [...] o conceito espontâneo da criança se desenvolve de baixo para cima, das propriedades mais elementares e inferiores às superiores, ao passo que os conceitos científicos se desenvolvem de cima para baixo, das propriedades mais complexas para as mais elementares e inferiores. (VIGOTSKI, 2009, p. 347-348).

O conceito espontâneo surge, de acordo com Vigotski, a partir da própria experiência de vida, ou seja, primeiro, a criança aprende nas relações sociais com outras crianças e com os adultos e faz generalizações, portanto, constrói conceitos. Mas essas generalizações são fruto de relações orientadas pelas semelhanças, ou seja, pelos atributos comuns aos objetos. Não há uma clara consciência das relações percebidas e dos atributos essenciais. Esses conceitos são dependentes do contexto.

> [...] enquanto os conceitos completamente formados aparecem relativamente tarde, as crianças começam cedo a utilizar as palavras e ao estabelecer, com a ajuda destas, uma compreensão mútua com os adultos e entre elas próprias. A partir desta constatação, ele conclui que as palavras exercem a função de conceito e podem servir como meio de comunicação muito antes de atingir o nível de conceitos característico do pensamento plenamente desenvolvido. (VYGOTSKY, 2010, p. 69).

Os conceitos científicos são concebidos de forma complexa, como um “um processo complexo do pensamento em um sistema de relação de conceitos, no trânsito constante do geral para o particular e vice-versa, dependendo de cada nível de desenvolvimento dos significados e da estrutura de generalização [...] (NÚÑEZ, 2009, p. 43). Como corrobora Vigotski (2001, p. 213-214):

> Os conceitos científicos, com as atitudes totalmente distintas para o objeto, mediadas por outros conceitos com seu sistema hierárquico interno de relações mútuas, constituem a esfera em que a tomada de consciência dos conceitos, ou seja, a generalização e domínio surgem aparentemente em primeiro lugar. Uma vez que a nova estrutura de generalização tenha surgido, é transferida como qualquer estrutura, como um determinado princípio de atividade, sem necessidade de aprendizagem alguma, para todas as esferas restantes do pensamento e dos conceitos. Deste modo, a tomada de consciência vem pela porta dos conceitos científicos.

O processo de formação de conceitos científicos supõe a aquisição e o desenvolvimento de uma linguagem científica, “que implica a aquisição não só de um novo sistema semântico, mas também de um novo modo de pensar e de ver a realidade, de se pensar objetos do conhecimento ausentes nas experiências do cotidiano.” (NÚÑEZ, 2009, p. 45).

Assim, há dois tipos de conhecimento, o teórico e o empírico. O conhecimento empírico é aquele adquirido na vida, nas ações diárias como em uma atividade física ou até em um teatro, um cinema. Segundo Sousa et al.(2014, p. 64),

> Os conhecimentos empíricos são caracterizados da seguinte forma: materializam-se por meio da escolha de exemplos relativos a certa classe formal: são elaborados mediante uma comparação dos objetos às suas representações, valorizando-se assim as propriedades comuns aos objetos [...]

Na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, é o conhecimento teórico que deve predominar em relação ao empírico; na visão das propostas de Davidov e seus colaboradores, o ensino é voltado essencialmente para desenvolvimento dos conceitos teóricos.

> Os conhecimentos empíricos se elaboram no processo de comparação dos objetos e representações sobre eles, que permite separar as propriedades iguais, comuns. Os conhecimentos teóricos surgem no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral. Os conhecimentos empíricos, apoiando-se nas observações, refletem nas representações das propriedades externas dos objetos. Os teóricos, que surgem na base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas, saindo assim, dos limites das representações. (DAVIDOV, 1988, p. 87).

Por meio do pensamento teórico, o aluno terá mais condições para poder criar uma base para o desenvolvimento em outros aspectos da sua psique como um todo, pois é uma forma de pensar. O aluno passa a ser como sujeito de uma ação educativa e, assim, tornando-se um aluno pensante. Segundo Davidov (1988, p. 125),

> O conteúdo do pensamento teórico é a excelência mediatizada, refletida, essencial. O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetivo-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como peculiar experimento objetivo-sensorial. Logo, este experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, a realizar os experimentos mentalmente.

A educação é realizada por meio de atividades conexas e a assimilação dos conhecimentos teóricos transforma o aluno, quando ele se apropria dos conhecimentos. Então os sujeitos são submetidos a “um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento.” (MOURA et al. 2010, p. 221).

Segundo Sousa *et al*. (2014, p. 62):

> De acordo com Davydov (1972[1982]), o conhecimento teórico constitui o objetivo principal da atividade de ensino, pois é por meio de sua aquisição

> que se estrutura a formação do pensamento teórico e, por consequência, possibilita o desenvolvimento psíquico da criança.

No conhecimento teórico utilizam-se símbolos e instrumentos culturais desenvolvidos pela sociedade, usados em diversas áreas do conhecimento. Uma forma de apropriação do pensamento é percorrendo o caminho pelo qual a humanidade passou na construção do conceito, como cita Davidov (1999, p. 2):

> [...] reproduzir o próprio processo do seu surgimento, obtenção e formalização, ou seja, quando o sujeito transforma novamente um material. [...] percorrendo de novo (reproduzindo) os caminhos que outrora levaram os indivíduos a descobrir e conceituar o conhecimento teórico.

De acordo com a teoria davidoviana, a assimilação pelos alunos do conteúdo específico das disciplinas escolares pode servir de base para a formação do pensamento teórico, que é elaborado por meio da criação de abstrações e generalizações significativas. Em consonância com Davidov, o pensamento teórico é:

> [...] um procedimento especial com o qual o homem enfoca a compreensão das coisas e os acontecimentos por via da análise das condições de sua *origem* e *desenvolvimento.* Quando os escolares estudam as coisas e os acontecimentos do ponto de vista deste enfoque, começam a pensar teoricamente (DAVIDOV, 1988, p. 6).

No Quadro 1, apresentado por Rosa, Moraes e Cedro (2010), adaptado das ideias de Rubtsov (1996), faz-se um paralelo entre conhecimento empírico e teórico:

Características	**Conhecimento empírico**	**Conhecimento teórico**
Fundamentação	Observação do objeto.	Transformação do objeto.
Generalização	Generalização formal das propriedades dos objetos que permite situar os objetos específicos no interior de uma dada classe formal.	Forma universal que caracteriza simultaneamente um representante de uma classe e um objeto particular.

Quadro 1: Paralelo entre conhecimento empírico e conhecimento teórico (continua).

Elaboração	Comparação dos objetos às suas representações, valorizando as propriedades comuns.	Análise do papel e da função de uma certa relação entre as coisas no interior de um sistema.
Representação	Representação concreta do objeto.	Representa a relação entre as propriedades do objeto e as suas ligações externas.
Relação	A propriedade formal comum é análoga às propriedades dos objetos.	Estabelece uma ligação entre o geral e o particular.
Expressão	Um termo.	Sistemas semióticos distintos.
Concretização	Por meio de escolha de exemplos relativos a uma certa classe formal.	Mediante a transformação do saber em uma teoria desenvolvida por meio de uma dedução e uma explicação.

Quadro 1: Paralelo entre conhecimento empírico e conhecimento teórico (conclusão).
Fonte: MOURA, 2010, p. 77.

O desenvolvimento científico implica um tipo de aprendizagem que se desenvolve nas funções psíquicas superiores e nasce de uma perspectiva para a compreensão das mudanças nas estruturas do pensamento, durante o desenvolvimento do indivíduo.

Sobre a situação de ensino atual, podemos destacar uma ênfase no ensino voltado para o pensamento empírico, que não contribui com o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Conforme Davidov (1988), o objetivo principal da atividade de ensino constitui-se no conhecimento teórico/científico e é por meio da sua aquisição que se estrutura a formação do pensamento teórico e, por consequência, o desenvolvimento psíquico do aluno.

> [...] formar nas crianças representações materialistas firmes para produzir nelas o pensamento independente e melhorar significativamente a formação artística e estética, elevar o nível ideológico e teórico do processo de ensino e educação, expor claramente os conceitos básicos e principais ideias das disciplinas escolares, erradicarem quaisquer manifestações de formalismo no conteúdo e métodos de ensino e no trabalho de formação e aplicar amplamente as formas e métodos ativos de ensino, etc. (DAVIDOV, 1988, p. 44).

Devemos atentar ao movimento de transformação do pensamento do aluno, extrapolar o nível empírico, por meio do desenvolvimento teórico, com o uso de instrumentos e condições adequados aos objetivos de uma ação.

Essa distinção entre o conceito espontâneo e o científico, entre pensamento empírico e teórico é também fundamental para este estudo, pois o conceito de polinômio é um conceito científico, cujo significado foi sendo construído pelo homem, atingindo níveis mais amplos ao longo da história da matemática.

1.5 Ensino desenvolvimental e a Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP

Um dos grandes investimentos em pesquisas de Davidov foi em relação ao ensino desenvolvimental. Esse ensino é uma relação entre a educação e o desenvolvimento humano. Conforme Davidov (1988, p. 93), "a base do ensino desenvolvimental é o seu conteúdo e dele se originam os métodos de organização de ensino". O seu principal pressuposto é: o ensino é uma forma privilegiada para a promoção do desenvolvimento do aluno e, por consequência, do desenvolvimento mental. As condições essenciais para o desenvolvimento do aluno são as relações dele com outros e a apropriação da cultura.

As atividades humanas são guiadas e controladas pela psique, a consciência tem uma natureza sócio histórica, que permite que uma pessoa procure julgar a sua ação de acordo com suas ideias.

A escola é o espaço, por excelência, para acontecer, ou melhor, impulsionar o desenvolvimento dos conceitos científicos. É o espaço de transmissão formal e planejada do saber sistematizado e elaborado, do conhecimento científico, filosófico e artístico, historicamente produzido pela humanidade. É na escola que a criança se apropria dos conceitos científicos. Esses conceitos são internalizados indo do geral ao particular, sempre procurando mais a unidade e a globalização do que a dispersão dos conceitos; e em consonância com Vygotsky (2001, p. 82), "um conceito é algo mais do que a soma de certas ligações associativas formadas pela memória, é mais do que um simples hábito mental; é um complexo e genuíno ato de pensamento".

Para tornar a aprendizagem mais consistente, o conceito científico deve ter um efeito real sobre o desenvolvimento da criança. Porém, é necessário que, além do conteúdo, ela aprenda os procedimentos a fim de que haja a aplicação em sua experiência. Portanto, a escola é o lugar onde se deve ajudar o aluno a aprender os conteúdos, por meio da aquisição de conceitos e métodos de análise científica, nas diversas áreas do conhecimento.

Vigotski e seus colaboradores defendem a existência de uma relação dialética entre o ensino, a aprendizagem e o desenvolvimento humano.

> [...] o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e dos conceitos não espontâneos – se relacionam e se influenciam constantemente. Fazem parte de um único processo: o desenvolvimento da formação de conceitos, que é afetado por diferentes condições externas e internas, mas que é essencialmente um processo unitário, e não um conflito entre formas de intelecção antagônicas e mutuamente exclusivas. O aprendizado é uma das principais fontes de conceitos da criança em idade escolar, e é também uma poderosa força que direciona o seu desenvolvimento, determinando o destino de todo o seu desenvolvimento mental. (VIGOTSKI, 2010, p. 74).

De acordo com Vigotski (2010), o processo de formação de conceito ocorre em três estágios básicos, cada um deles com várias fases, sendo que em cada uma delas existe uma relação diferente com o objeto. A essas fases denominou: *pensamento sincrético* ou *aglomerado*, *pensamento por complexos* e o *pensamento por conceitos potenciais*.

Na primeira fase, a do pensamento sincrético ou aglomerado, a criança obtém uma noção do conceito sem nenhuma organização, ocorre uma formação desordenada de ideias; o significado da palavra nesse momento é incerto.

A segunda fase, a do pensamento por complexos, ocorre quando se inicia a primeira etapa da educação escolar de uma criança. Ela já consegue realizar agrupamentos e percebe a existência de vínculos entre elementos que eram desconexos. Nessa fase observa-se que a generalização é criada com base em vínculos objetivos, portanto, ainda não subjetivos. A criança reúne objetos homogêneos em um grupo comum, com base nas evidências. É o momento característico de estabelecer conexões de impressões. Segundo Vigotski (2001, p. 62-63),

> [...] já não confunde as relações entre as suas impressões com relações entre coisas – passo decisivo para abandonar o sincretismo e se aproximar do pensamento objetivo. O pensamento por meio de complexos já é um pensamento coerente e objetivo, embora não reflita as relações objetivas da mesma forma que o pensamento conceptual.

“Na terceira fase, a do pensamento conceitual, a criança consegue desenvolver a decomposição, a análise e a abstração.” (VYGOTSKY, 2001, p. 220). Nessa fase, segundo o autor, a criança, o adolescente ou mesmo o adulto realiza um pensamento mais profundo, inter-relacionando os conceitos em uma rede articulada.

Vigotski (2009) alerta que tais estágios de desenvolvimento do pensamento não podem ser imaginados como processo mecânico, acabado e concluído, pois esse desenvolvimento é complexo. Afirma:

> Mas os próprios conceitos do adolescente e do adulto, uma vez que sua aplicação se restringe ao campo da experiência puramente cotidiana, frequentemente não se colocam acima do nível dos pseudoconceitos e, mesmo tendo todos os atributos de conceitos do ponto de vista da lógica formal, ainda assim não são conceitos do ponto de vista da lógica dialética e não passam de noções gerais, isto é, de complexos. (VIGOTSKI, 2009, p. 229).

Desse modo, para Vigotski o desenvolvimento consiste em um processo de aprendizagem com o uso de ferramentas intelectuais, por meio da interação social com o outro e mediada pela linguagem.

Com relação a esse desenvolvimento, o autor elaborou o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP. Segundo Vigotski (2003, p. 112), a ZDP é:

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

A ZDP é a distância entre o nível de desenvolvimento real da criança, no qual ela é capaz de realizar a resolução de problemas de forma independente, e o nível de desenvolvimento potencial, isto é, a capacidade de realizar tarefas com a ajuda de alguém. O nível de desenvolvimento real refere-se a um desenvolvimento consolidado, enquanto o potencial é algo que pode vir a ser, pois depende do momento de desenvolvimento da pessoa.

A ZDP é um domínio importante para explicar o progresso na construção de conhecimento que as pessoas estão percorrendo a partir de interações com outras pessoas que têm mais experiência, como é o caso do professor. De acordo com Damázio (2000, p. 59):

> Assim, a zona de desenvolvimento proximal é a disposição de uma pessoa para a aprendizagem, com a presença de alguém com quem estabelece interlocução. A disposição explicita a atividade da pessoa que, por sua vez, está sendo impulsionada pela vontade que manifesta, implicitamente, um motivo, um objetivo e um fim.

Desse modo, a ZDP é o espaço da interação, que não envolve uma sequência predeterminada de ações ou papéis fixos para os participantes (em especial sobre o papel das ações e do conhecimento do adulto).

A ZDP fornece ao professor um instrumento por meio do qual ele pode entender e intervir no curso interno do desenvolvimento, pois ele pode levar em consideração não só os ciclos e os processos de maturação já concluídos, mas também aqueles que estão em um estado de formação, que estão começando a amadurecer e se desenvolver. Pode-se dizer que a ZDP é um alavanque, ou um salto para ampliar o potencial de desenvolvimento. Segundo Bernardes (2012, p. 44), "[...] são nas atividades mediadas, presentes nas relações interpessoais, que são postas as condições para que ocorra a internalização e a apropriação do conhecimento e, consequentemente, o desenvolvimento das funções psíquicas superiores".

A introdução da noção da ZDP por Vigotski (2001) muda o significado do ensino como um fator que contribui para ampliar a oportunidade de aprendizagem do aluno. Para isso o professor deve utilizar instrumentos adequados para a atividade mediadora, beneficiando o desenvolvimento das funções psicológicas superiores. Por isso, é importante a interação entre professor e aluno, pois o professor propõe tarefas concernente às possibilidades dos alunos, organizando as atividades de ensino.

1.6 A Teoria da Atividade e a atividade de estudo

A atividade pode ser considerada uma palavra onipresente na vida escolar e comum para os educadores e educandos, mas como pode ser concebida? Do ponto de vista filosófico, no dicionário de Abbagnano (2007), encontramos: "atividade é uma forma especificamente humana, a atividade pressupõe uma relação entre o homem e um objeto".

Atividade é uma categoria fundamental na Teoria Histórico-Cultural. De acordo com Núñez (2009), apoiando-se em Leontiev (1978), a atividade humana é um processo que faz a mediação entre o ser humano (sujeito) e a realidade a ser transformada por ele (objeto da atividade). Essa relação é dialética, pois o objeto se transforma, mas transforma também o sujeito que a realiza.

Toda atividade inclui um objetivo para reconstruir ou repensar o processo do conhecimento. O caráter consciente e transformador da atividade permite a existência de objetivos definidos para alcançar um resultado final. A atividade de ensino é uma atividade humana que visa a um determinado resultado.

A atividade é uma categoria filosófica que descreve um método de existência do homem e da sociedade. Se na visão de Vigotski a psicologia apresentada está focada no desenvolvimento das funções mentais superiores durante o desenvolvimento da cultura humana, para Leontiev ela está condicionada a uma psicologia para estudar a estrutura e o funcionamento da reflexão mental da realidade.

Corroboramos a ideia de Davidov e Markova (1987, p. 324), quando afirmam: "Assim, pois, o conteúdo principal da atividade de estudo é a assimilação dos procedimentos generalizados de ação na esfera dos conceitos científicos e mudanças qualitativas no desenvolvimento psíquico da criança, que ocorrem sobre esta base". A assimilação é o processo de reproduzir o sujeito historicamente, constituindo-se em uma maneira de converter objetos da realidade. Assimilação não é uma adaptação passiva do indivíduo às condições existentes na vida social, mas sim o resultado de um trabalho ativo para dominar os modos socialmente evoluídos de orientação no mundo objetivo.

A atividade humana envolve uma composição de elementos que se interligam e se transformam um em outro: necessidade, motivo, o objeto para obter a finalidade. Além desses elementos de orientação, possui outros componentes que estão correlacionados à execução da atividade, que são a ação; e da operação, que são as condições objetivas e o objetivo (LEONTIEV, 1983).

A característica básica da atividade humana é o seu objeto, ou seja, o sujeito começa a interagir com o objeto, objeto material ou objeto ideal como o pensamento, o sentimento e a experiência. O objetivo inicial é a prática da atividade humana, dela surgem todos os outros tipos de atividade mental, cognitiva e intelectual. Isso ocorre por meio de um processo de interiorização em que as ações e as práticas externas se tornam ações internas para ir ao plano interno da consciência. Dessa forma, tem a sua própria estrutura, a sua integridade interna, uma lógica própria, e, se a vida do homem é um sistema de atividades sucessivas e coexistentes, a consciência é o que as une, enfim, promovendo o desenvolvimento.

A atividade está associada a uma transformação significativa do objeto, por meio de instrumentos e signos, criando uma nova transformação substancial do sujeito e da realidade social do homem.

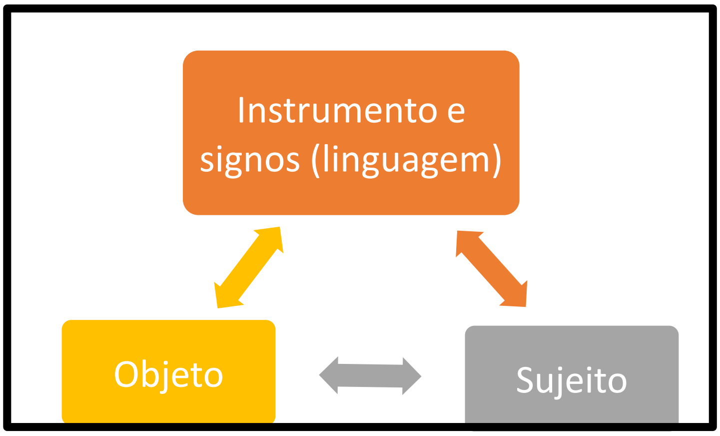


Figura 3: Relação entre os instrumentos e os signos.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

O conceito de Leontiev sobre atividade está na essência da natureza histórica da mente humana e da consciência. O desenvolvimento ontogenético da consciência ocorre no processo das interações do homem em suas formas mais específicas do ser humano, isto é, em termos das relações do sujeito com os outros numa experiência histórico-cultural. O conceito da atividade é, assim, um dos princípios centrais do estudo do desenvolvimento do psiquismo e da consciência.

> Nas relações entre a consciência e atividade, a consciência é a forma especificamente humana do reflexo psíquico da realidade, ou seja, é a expressão das relações do indivíduo com o mundo social, cultural e histórico, que abre ao homem um quadro do mundo em que ele mesmo está inserido. A consciência refere-se, assim, à possibilidade humana de compreender o mundo social e individual como passíveis de análise. (RIGON, ASBAHR, MORETTI, 2010, p. 20).

O princípio geral que norteou Leontiev em sua abordagem é que a atividade interna mental ocorre no processo de interiorização das práticas externas e tem essencialmente a mesma estrutura.

> Na primeira etapa: do *plano material*, as primeiras ações da criança se realizam na [...] forma de ações externas com objetos externos, depois da intervenção dos adultos. [...] Na etapa seguinte, as ações transferem-se para o plano da linguagem, verbalizam-se. [...] Durante a etapa seguinte, a ação é transferida no seu conjunto para o plano mental, onde fica sujeita a posteriores mudanças, até que adquire todas as características próprias de uma operação interna do pensamento. (LEONTIEV, 1991, p. 74).

A atividade, em termos de orientação, “compreende as necessidades, os motivos, o objeto e as tarefas; em termos de execução, inclui as ações e as operações.” (RIGON, ASBAHR, MORETTI, 2010, p. 23). Como afirma Bernardes (2012), “assim como os motivos se ligam à atividade, as ações aos objetivos [...] as operações vinculam-se às condições da atividade”.

Assim, a atividade humana se estrutura nesses elementos, não de forma linear e independente, mas constituindo um sistema, como o descreve Bernardes (2012, p. 49-50):

> A *atividade*, definida por seu *objeto*, fundamenta-se numa necessidade humana representada pelo *motivo*, que excita a execução da *ação*. Esta, por sua vez, vinculada ao *objetivo* da atividade, que se liga diretamente ao objeto da mesma, e que por isso é estável. Diante das *condições* de execução das ações, as *operações* estabelecem-se como funções automatizadas, que concretizam o objetivo da atividade. (Grifos do original).

A necessidade se liga diretamente ao objeto e é fruto da relação entre o homem e o mundo. Assim, a atividade depende do motivo, de modo que não há atividade sem motivo. São os motivos que conduzem o sujeito a ações conscientes que correspondem aos objetivos da atividade. A ação é baseada em certos métodos, ou seja, condições, que são chamadas de operações. São as operações que concretizam o objetivo da atividade.

Na Figura 4, buscamos mostrar esses elementos da atividade, com base em Leontiev (1978), lembrando que constituem um sistema, e não unidades isoladas.

Figura 4: Elementos sistêmicos de orientação e execução que constituem a atividade.
Fonte: Elaboração da autora (2015) com base em Leontiev (1978).

Em relação à atividade pedagógica, de acordo com Bernardes (2012), ela é entendida como aquela que unifica dialeticamente: a atividade de ensino, própria do professor; e a atividade de estudo, peculiar aos alunos. Seu motivo, mobilizador das ações e das operações desenvolvidas por alunos e professores, é a formação humana.

Na Figura 5, pode-se observar o movimento entre atividade de ensino e estudo na atividade pedagógica e suas ações:

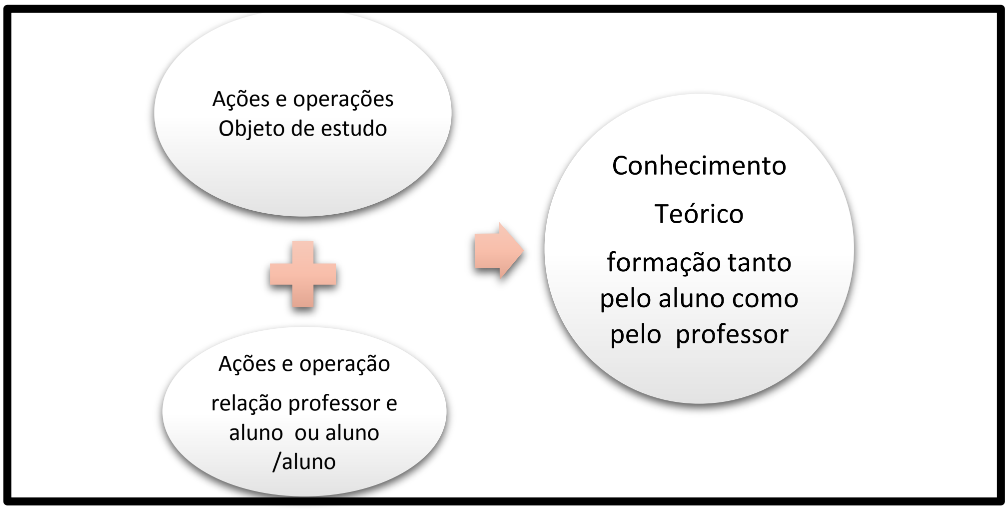


Figura 5: Relação da atividade pedagógica e suas ações.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

A Teoria da Atividade fundamenta uma teoria de ensino-aprendizagem, que incide sobre o processo educacional como um conjunto de aspectos epistemológicos, metodológicos e práticos, em que o papel do professor é o de organizador do processo. Para ocorrer a aprendizagem a partir da atividade de ensino, é necessário que o ensino seja considerado um elemento essencial para o desenvolvimento mental do aluno na sua experiência cultural.

A atividade é caracterizada pela utilização de instrumentos socializados, isto é, a atividade do homem não é só realizada pela mediação do instrumento, mas pela atividade de outras pessoas que estão em relação. Segundo Davidov (1988), a atividade de aprendizagem não é espontânea. Ela é sistemática e formal, realiza-se por meio das práxis. A práxis, ou o que se pratica normalmente, é particular, individual e ao mesmo tempo social, convertendo-se em parte da experiência vivida.

Com base na Teoria da Atividade de Leontiev (1978), podemos inferir que o estudante somente entra em atividade de aprendizagem, quando necessidades e motivos de apreender algo são desencadeados pela atividade intencional do professor. O pensamento humano é uma ação do sujeito dirigida para um objetivo e para uma aquisição de conhecimento.

> [...] a necessidade da atividade de estudo estimula os escolares a assimilar os conhecimentos teóricos; os motivos, [estimulam os escolares] a assimilar os procedimentos de reprodução destes conhecimentos por meio das ações de estudo, dirigidas a resolver as tarefas de estudos (recordamos que a tarefa é a unidade do objetivo da ação e as condições para alcançá-lo). (DAVIDOV, 1988, p. 178).

Para Davidov, a atividade de estudo tem sentido amplo na Teoria Histórico-Cultural, mas tem características próprias que a diferenciam de outras atividades. Além disso, não se confunde com aprendizagem:

> O termo "atividade de estudo", que designa um dos tipos de atividade reprodutiva das crianças, não deve identificar-se com o termo "aprendizagem". Como se sabe, as crianças aprendem nas formas mais diversas de atividades (no jogo, no trabalho, no esporte, etc.). A atividade de estudo tem um conteúdo e uma estrutura especial e há que diferenciá-la de outros tipos de atividade que as crianças realizam tanto na idade escolar inicial como em outras (por exemplo, há que diferenciá-la da atividade lúdica, social organizativa, laboral). Além disso, na idade escolar inicial, as crianças realizam outros tipos de atividade, porém, a principal é a de estudo. (DAVIDOV, 1988 p. 159).

O desenvolvimento mental é realizado por meio da atividade e em todas as faixas etárias. Na atividade de ensino-aprendizagem, ocorre a apropriação da experiência histórica acumulada pela humanidade.

> Vygotsky explica o desenvolvimento humano por processos mediados e destaca a importância da educação e do ensino na aquisição de patamares mais elevados de desenvolvimento. Leontiev mostra que tanto a atividade profissional quanto a atividade cognitiva implicam o desenvolvimento de ações muito específicas, obrigando-nos a não tratar a atividade docente como algo abstrato, uma vez que o professor desenvolve uma atividade prática, no sentido de que envolve uma ação intencional marcada por valores (LIBÂNEO e FREITAS, 2009, p. 8).

Desta forma a atividade de estudo pretende promover mudanças qualitativas nos alunos para que esses possam transformar a qualidade do pensamento.

1.7 O experimento didático

Ressaltando o que afirma Vigotski (1988): "O bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento", propusemo-nos a realizar um experimento didático, que caracterizaremos a seguir.

Segundo Freitas (2007), o termo "experimento", utilizado aqui, não tem equivalência com a pesquisa quantitativa experimental identificada comumente como uma abordagem positivista. Com base nos estudos da Teoria Histórico-Cultural, é possível e necessário que haja um desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Existem três elementos importantes que participam e interagem no experimento didático, de acordo com Freitas (2007): o sujeito investigador, o sujeito investigado e o objeto da investigação:

> [...] no experimento didático não há uma separação entre sujeito que investiga, sujeito investigado e objeto da investigação. A investigação resulta em um conhecimento que busca explicar o objeto estudado (funções psicológicas), buscando também resultar em mudança qualitativa no sujeito investigado. No experimento didático, o que se busca é a explicação histórica das mudanças qualitativas no pensamento do sujeito, mudanças estas que são investigadas como uma cadeia complexa de processos inseparáveis de aprendizado, decorrentes da realização de uma atividade proposta no experimento e contida no modo como este se encontra organizado. A atividade proposta e os passos da atividade estão ancorados em um determinado conceito científico a ser aprendido. (FREITAS, 2007, p. 11).

Com relação à organização do experimento, a autora salienta que, na perspectiva desenvolvimental, mudanças ocorrem em relação à aprendizagem e ao desenvolvimento:

> A organização desses passos está ancorada em princípios teóricos da teoria histórico-cultural e da teoria do ensino desenvolvimental. Esses passos, ao serem cumpridos pelos sujeitos participantes, exigem determinado movimento do pensamento, movimento este que pode resultar em mudanças na sua qualidade em relação ao conteúdo da atividade, ou seja, o conceito científico. Em outras palavras: no decorrer do experimento acontece aquisição de atos mentais, atos esses que contribuem para reorganizar o pensamento, e as ações mentais realizadas pelo sujeito em etapas. (FREITAS, 2007, p. 11).

Nessa perspectiva, este experimento tem, por sua vez, o objetivo de auxiliar no processo de formação das ações mentais. Assim, este experimento alicerça-se na Teoria Histórico-Cultural, como corrobora Libâneo (2004, p. 14):

> Na base do pensamento de Davydov está a ideia mestra de Vygotsky de que a aprendizagem e o ensino são formas universais de desenvolvimento mental. O ensino propicia a apropriação da cultura e o desenvolvimento do pensamento, dois processos articulados entre si, formando uma unidade.

Para investigar como se dá a construção de significados, devemos organizar situações que promovam a apropriação de conceitos e procedimentos, ou seja, o pensamento teórico sobre o assunto em questão. Como afirma Davidov, “esse método apoia-se na organização e reorganização de novos programas de educação e ensino de procedimento para sua efetivação.” (DAVIDOV, 1988, p. 196).

Portanto, o experimento didático realizado neste estudo se estruturou em atividades de ensino que tinham o objetivo de propiciar ao educando uma aprendizagem que promovesse a apropriação de conhecimento científico e também o desenvolvimento mental do aluno, uma vez que buscamos o compartilhamento de significados de polinômio, com recursos didáticos diversificados.

CAPÍTULO 2

CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA E DE PENSAMENTO ALGÉBRICO, O CONCEITO DE POLINÔMIOS E OS SEUS NEXOS

Como o objeto deste estudo se insere no campo do ensino da álgebra, neste capítulo apresentamos aspectos referentes à história da álgebra, às concepções de álgebra e de educação algébrica, ao pensamento e à linguagem algébricos, às diretrizes para o ensino e a aprendizagem da álgebra propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) na Matriz Curricular municipal e no plano de ensino do professor. Trazemos, ainda, o conceito de polinômio e os seus nexos, como também procuramos analisar como esse tema aparece nos volumes do 8º ano de duas coleções, adotadas pelo município nos últimos cinco anos.

2.1 Um sobrevoo pela história da álgebra

Antes de abordarmos as concepções de álgebra, vamos fazer uma breve retrospectiva da história de seu desenvolvimento. Como esta pesquisa está fundamentada no materialismo histórico, por conseguinte, compreendendo o desenvolvimento humano como algo promovido social e historicamente, esse é um caminho necessário.

O matemático e educador português da primeira metade do século XX, Bento de Jesus Caraça, numa concepção dialética de história e da natureza, no nosso entender, concebe a ciência e, desse modo, a matemática como criações humanas. Para ele existem duas concepções sobre a ciência:

> Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como uma coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (CARAÇA, 1984, p. xxiii).

Segundo o autor, o homem, para sobreviver, teve a necessidade de *lutar c*ontra a natureza, de *dominá-la*. Isso o conduziu a observar os fenômenos, mas o homem não se contentou apenas com a constatação dos resultados – conhecimento *vulgar*. Ele buscou compreender os fenômenos naturais e sociais, isto é, construir "um *quadro ordenado* e *explicativo* dos fenômenos naturais – fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social." (CARAÇA, 1984, p. 107, grifos do original). Esse é o objetivo do conhecimento científico. A construção desse conhecimento não é linear, harmoniosa, mas é permeada por dúvidas e por contradições, que fazem emergir o novo. É da luta dos contrários, segundo Caraça, apoiado em Heráclito, filósofo grego que viveu por volta de 530 a.C., que o conhecimento científico avança. Com o conhecimento matemático, de modo especial com a álgebra, não é diferente – o novo surge da dúvida, da inquietação, da negação da negação, de modo histórico e lógico.

De acordo com Moura, citado por Oliveira (2014):

> A matemática vista como o conhecimento em movimento no homem coletivo, isto é, como o conjunto de práticas que se perpetuaram e se concretizaram enquanto conteúdo social, passa a ser elemento essencial no projeto cultural e científico do homem. [...] O que queremos ressaltar é que o conhecimento matemático social é movimento cultural fruto da dinâmica das práticas sociais e que a educação é o conhecimento em movimento no indivíduo. O qual, estando imerso no conjunto das práticas sociais, adquire conceitos e passa a operar com eles se construindo como sujeito individual e coletivo. Ao adquirir conhecimentos o indivíduo transforma-se, humaniza-se, contribuindo para a modificação do conjunto de práticas sociais. (MOURA apud OLIVEIRA, 2014, p. 14).

Nesse sentido, embasar os conhecimentos algébricos no movimento histórico que os constituiu é essencial para garantir a significação a ser trabalhada pelos professores e constituída pelos estudantes.

Existem nexos do pensamento teórico que foram construídos historicamente e os nexos da álgebra também o foram. Podemos dizer que tais nexos são como elos que foram construídos, ou melhor, desenvolvidos por diversas civilizações e não estão prontos e nem acabados. Em consonância com os PCN (1998):

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo. (BRASIL, 1998, p. 19).

No decorrer da história da linguagem algébrica, ela passou por três momentos, sendo eles: álgebra retórica, sincopada e simbólica. A linguagem algébrica simbólica, como conhecemos, teve um longo percurso.

Segundo Eves (2011), por volta do ano 2000 a.C., a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Eles já resolviam equações quadráticas, pelo método da substituição e de completar quadrados, como também algumas equações cúbicas e algumas biquadradas. O autor fala de uma geometria algébrica dos babilônios, pois problemas de cálculo de medidas de comprimento e áreas de figuras envolviam equações.

Essa álgebra geométrica tem continuidade na matemática grega, por volta dos anos 300 a.C., na obra de Euclides, *Os Elementos,* na qual aparecem as identidades algébricas numa linguagem geométrica.

Diofanto de Alexandria, no século III d.C.[2], foi um dos primeiros a utilizar abreviações nos textos e problemas matemáticos. Sua notação é chamada de sincopada, que significa que as palavras são substituídas por abreviações. Ele escreveu três trabalhos importantes: *Aritmética*, o mais importante, do qual remanesceram 6 dos 13 livros; *Sobre Números Poligonais*, do qual restou apenas um fragmento; e *Porismas*, que se perdeu. O trabalho *Aritmética*, com resolução de 130 problemas envolvendo equações de primeiro e de segundo graus, teve um enfoque relevante para a teoria algébrica dos números. Diofanto utilizava abreviações para a incógnita, potências da incógnita até o expoente seis, subtração e inversos. A palavra *aritmética* origina-se da palavra grega *arithmetike*, a qual é composta pelo radical *arithmos*, que significa "número"; e pelo sufixo *techne*, que significa "ciência" (EVES, 2011).

Foi com Diofante que o desenvolvimento algébrico começou a se constituir: ele utilizava abreviaturas para representar constantes, como exemplo, $\dot{M}$(abreviatura da palavra grega *mônades*) e ainda, utiliza o símbolo V para representar uma variável. A origem dessa notação pode ser a contração das duas primeiras letras da palavra grega que significava "número". As variáveis x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 eram representados respectivamente por Δ^y, K^Y, $\Delta^y\Delta$, Δk^y, $K^Y K$ (VAZ, 2007).

> Δ^yé a abreviatura das duas primeiras letras da palavra grega dunamis (DUNAMIS), que significa potência. K^Y é abreviatura das duas primeiras letras da palavra grega kubos (KYBOS), que significa cubo. $\Delta^y\Delta$, é a quarta potência da variável. Δk^y é a quinta potência da variável e $K^{\ Y} K$ é a sexta

[2] Embora não se saiba com certeza acerca de sua nacionalidade e da época exata em que viveu. Os historiadores tendem a situá-lo no século III d.C. (EVES, 2011).

> potência da variável. A potência inversa 1/x era representada por ς^{χ}, $1/x^2$ por Δ^{yx} e assim sucessivamente. (VAZ, 2007, p. 87).

Com relação aos sinais, Diofanto representou o sinal de subtração sendo o símbolo  que foi formado unindo Λ e Ι da palavra *Leipis* (ΛΕΙΨΙΣ). Diofanto não utiliza o sinal de soma para representar $x^3 - 4x^2 + 6x - 3$; ele agrupa os termos positivos e negativos, $x^3 + 6x - (4x^2 + 3)$. Esses avanços permitidos por Diofanto favoreceram um avanço significativo para os fundamentos algébricos, principalmente para a resolução de equações e de problemas.

Outra civilização que colaborou para o desenvolvimento da álgebra foi a dos hindus. Segundo Eves (2011), eles foram hábeis na aritmética e deram contribuições significativas à álgebra, principalmente à álgebra sincopada.

Dois matemáticos hindus que deram relevantes aportes à aritmética e à álgebra foram Brahmagupta, por volta do século VII, e Bhaskara, no século XII. Dentre os seus trabalhos, está a resolução de equações indeterminadas.

A palavra *álgebra* vem do árabe e foi introduzida pelo cientista muçulmano Al-Khwarizmi (790-840 d.C.). Ele escreveu o livro *Hisab al-jabr wa-al-muqabalah*, no qual estão as primeiras disposições didáticas sobre a resolução de equação. O título dessa obra foi traduzido de forma literal como:

> “Ciência da reunião e da oposição” ou, mais livremente, como “Ciência da transposição e do cancelamento”. O texto, que se preservou, tornou-se conhecido na Europa através de uma tradução latina e fez da palavra *al-jabr* ou *álgebra* sinônimo de ciência das equações. Obviamente desde a metade do século XIX o termo *álgebra* adquiriu um significado mais amplo. (EVES, 2011, p. 266, destaques do autor).

Al-Khwarizmi inovou em álgebra para resolver os difíceis problemas de herança e colocou suas regras e fundamentos, o que os tornou independentes da geometria e de outros tipos de matemática. Também escreveu um tratado de álgebra e um livro sobre os numerais hindus, que exerceram enorme influência na Europa. Publicou um tratado sobre o cálculo de reparar o equilíbrio. Al-Khwarizmi apresenta princípios para a resolução de equações de primeiro e segundo graus e seu trabalho parece ter sido introduzido na Europa, pela primeira vez, em 1202. O nome Al-Khwarizmi, traduzido para o latim, tornou-se *Algorismus* ou *Algorismi*; mais tarde, o nome foi mudado para *algoritmo*, o que significa uma série de cálculos que levam a um resultado.

Outros dois árabes que contribuíram com a álgebra nos séculos X e XI foram: Abu Kamil, que se utilizou de um comentário de Al-Khwarizmi, sendo em seguida aproveitado por Fibonacci; e Al-Karkhi, que foi um seguidor de Diofanto, lançando a importante obra da álgebra mulçumana, que se chamava *Fakhri.*

Um matemático europeu que influenciou o desenvolvimento da matemática foi Leonardo de Pisa, no século XIII, com a obra *Liber abaci*, contendo quinze capítulos nos quais explica métodos de cálculo com números inteiros e frações, cálculo de raízes quadradas e cúbicas e ainda resolução de equações lineares e quadráticas.

Na segunda metade do século XIV, o padre franciscano Luca Pacioli escreveu uma obra intitulada *Suma*, que pretendia ser um sumário da aritmética, da álgebra e da geometria da época. Nesta obra, fez uso de uma linguagem sincopada, com o uso de *p*, para indicar "mais", referindo-se à adição; *m*, "menos", para indicar a subtração; *co*, de "coisa", para representar a incógnita; *ce*, de "censo", para x^2; *cu,* de "cuba", para x^3; *cece*, de "censo-censo", para x^4 ; e o símbolo *ae*, de *aequalis*, para indicar "igual" (EVES, 2011).

Por volta de 1500, surgiu o moderno simbolismo com o francês François Viète. Ele concebeu a expressão escrita com várias incógnitas e coeficientes literais, trazendo métodos de resolução de casos, e não apenas resoluções particulares. Segundo Vaz (2007),

> A zetética pretende então traduzir o problema, aritmético ou geométrico, à linguagem Matemática, isto é, em uma ou mais equações, em uma ou mais variáveis. Para compor uma equação ou uma proporção estipulará o conhecido e o não conhecido no problema dado, por meio da sua simbologia. Usando a lei de homogeneidade, que pressupõe ainda um apego à questão da dimensionalidade dos gregos, escreve todas as potências adequadamente ordenadas. Podemos comparar somente termos homogêneos. Assim, em uma equação, os monômios que a compõem devem ter os mesmos graus. Isto quer dizer que os monômios compondo uma equação devem ser todos da mesma espécie, conforme explicação abaixo. A exegética, por sua vez, é a transformação, proporção ou equação configurada, buscando definir a solução do problema. A arte porística, por fim, é a fase intermediária do processo analítico e envolve técnicas de transformar igualdades e proporcionalidades algébricas. Viète estabelece as regras governando as equações e as proporções, que são as mesmas encontradas em *Os Elementos*. São propriedades básicas sobre como operar com equações e proporções, como as que conhecemos hoje. (VAZ, 2007, p. 93).

Segundo Viète, pode-se utilizar a álgebra para a resolução de problemas. Para facilitar, devemos atribuir ao termo desconhecido do problema uma variável, estabelecer uma equação entre os termos dados e os termos desconhecidos e assim aplicar as regras da álgebra para encontrar a solução. Dessa forma Viète superou as dificuldades de Diofanto, com o que concordamos, pois, da forma que a álgebra era apresentada, constituía-se em algo limitado, uma vez que não permitia generalizações.

> As dificuldades encontradas por Diofanto são superadas por Viète quando introduz a sua nova concepção simbólica, que o permite generalizar as soluções dos problemas e dos teoremas, além disso, as equações, em relação à notação diofantina, são bastante simplificadas, pois passa a designar a variável e suas potências usando apenas uma variável, pois, Diofanto utilizava diversos símbolos numa mesma equação. Outro avanço de Viète, em relação a Diofanto, é a ampliação do campo de aplicação, as equações são usadas tanto para magnitudes algébricas quanto para magnitudes geométricas, enquanto que em Diofanto o campo de aplicação era quase exclusivamente aritmético. Essa é a grande realização da logística especiosa de Viète, sua linguagem simbólica. Relembramos que o desejo de conceber uma nova Álgebra estava presente também nas ideias de Petrus Ramus, o influente pedagogo francês que escreveu livros textos de Matemática. (VAZ, 2007, p. 97).

Com Viète, os símbolos adquirem diversos significados, o que representou um progresso, pois os objetos matemáticos passaram a ser tratados de forma generalizada, com o uso de vogais para representar incógnitas e de consoantes para indicar constantes. Ele usava a mesma letra para indicar potências de uma incógnita, o que não era comum até sua época. Assim, usava A, A *quadratum,* A *cubum* para indicar o que hoje escrevemos como x, x^2, x^3. É a álgebra simbólica se estabelecendo.

Foi René Descartes (1596-1650) quem propôs utilizar as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas para as incógnitas. Por meio de um simbolismo algébrico, Descartes desenvolve a álgebra associada à geometria, dando continuidade à álgebra geométrica dos gregos, contribuindo significativamente e de forma decisiva para o desenvolvimento da geometria analítica. Em consonância com Vaz (2011), Descartes publicou a obra *O Discurso do Método*, envolvendo três eixos da matemática: geometria, lógica e álgebra:

> Em 1637 publicou sua principal obra, *O Discurso do Método*, com três apêndices: *A Geometria*, *A Dióptrica* e *Os Meteoros*. Ali, diz ter estudado: Lógica, Geometria e Álgebra e que deveria olhar para métodos que combinassem as vantagens dessas três ciências, mas livres de seus defeitos. Assim, informa a influência da Matemática sobre suas atividades intelectuais. (VAZ, 2011, p. 452).

Descartes teve a influência de dois grandes matemáticos gregos: Papus (III d.C.) e Diofanto (III d.C.). Na obra *A Coleção Matemática*, Papus afirma que “Em A Aritmética de Diofanto encontramos uma álgebra sincopada e métodos algébricos criativos na resolução de diversos problemas algébricos.” (VAZ, 2007). Assim, Descartes inaugura a álgebra moderna. Na sua obra *Livro III*, Descartes apresenta uma análise completa das raízes de equações polinomiais.

> Descartes apresenta as propriedades das equações polinomiais com coeficientes reais e suas raízes, chamando as raízes reais e positivas de verdadeiras e as negativas, de falsas. A variável é chamada de quantidade desconhecida. O coeficiente da variável, quantidade conhecida. A ausência de um termo na equação é indicada por um sinal asterisco (*). O grau da equação é, para Descartes, a dimensão. (VAZ, 2011, p. 465).

A partir do século XII, a matemática tem grande desenvolvimento e, consequentemente, a álgebra, com a invenção dos logaritmos por Nepier; a notação e a codificação da álgebra; a geometria analítica com René Descartes; a teoria das probabilidades; a teoria dos números, com Fermat. Ao final do século XVII e início do século XVIII, a invenção do cálculo foi um marco e, segundo Eves (2011), representa o final do desenvolvimento da matemática elementar, que serve de base para a matemática ensinada em nossas escolas de Educação Básica. Segundo o autor, a “tarefa de refinar conceitos básicos da matemática levou, por sua vez, a generalizações complexas.” (Ibidem, p. 462).

A álgebra, como pudemos ver nesse breve histórico, evoluiu gradualmente, ao longo dos séculos, acompanhando o desenvolvimento histórico da humanidade. Neste sobrevoo, vimos que nos escritos egípcios e babilônios na Antiguidade já estavam presentes os problemas algébricos. Os matemáticos árabes continuaram a estudar álgebra, a qual tomou a forma que conhecemos hoje graças à contribuição de matemáticos europeus, do século XII até o século XVIII. No século XVIII, os avanços em álgebra se tornaram maiores devido ao desenvolvimento do cálculo infinitesimal e ao desenvolvimento da análise.

Porém, segundo Eves (2011), até o início do século XIX, a álgebra era considerada simplesmente como a aritmética simbólica, isto é, enquanto a aritmética trabalhava com números específicos, em álgebra, empregavam-se letras para representar esses números. Entretanto, a partir da observação de que as propriedades básicas da adição e da multiplicação poderiam se aplicar a outros sistemas, tem início um novo capítulo para a álgebra, com a ideia das estruturas algébricas. Esse movimento começou com Peacock, que, em sua obra *Treatise on Algebra*, buscou um tratamento semelhante ao que Euclides deu à geometria, ou seja, um tratamento postulacional. Outros matemáticos ingleses deram continuidade ao trabalho iniciado por ele, como Hamilton[3], Boole[4], De Morgan[5]. É preciso marcar, ainda, a contribuição de Gauss, com o Teorema Fundamental da Álgebra.

Assim, G.H.F. Nesselmann, em 1842, segundo Eves (2011), distinguiu três estágios da álgebra: o primeiro, a álgebra retórica, em que o desenvolvimento da resolução de um problema era escrito na linguagem verbal, sem abreviações e nem símbolos, que, segundo os historiadores, durou pelo menos três milênios; o segundo, a álgebra sincopada, que adotava abreviações para algumas operações e quantidades, com mais ou menos um milênio de duração; e, por último, a álgebra simbólica, em que as ideias algébricas são expressas por meio de símbolos algébricos, os quais, aparentemente, não têm relação com o que representam. Exemplos dessas linguagens podem ser observados na história em quadrinhos (Apêndice E).

Certamente esse desenvolvimento não se encerra nessas contribuições, mas o que trouxemos é suficiente para desenvolver nosso trabalho sobre o ensino da álgebra na Educação Básica.

2.2 Concepções de álgebra e de educação algébrica – a linguagem e o pensamento algébricos

A álgebra é um importante campo da matemática e, por consequência, da matemática escolar. Entretanto, não é fácil definir álgebra e estabelecer seus limites e abrangência na matemática e no seu ensino na Escola Básica. Assim se expressa Zalman Usiskin, um educador matemático norte-americano:

> Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de problemas, mas também é mais, ela é mais que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e compreensão das estruturas matemáticas. Dados esses trunfos e a matematização crescente da sociedade, não é de

[3] Willian Rowan Hamilton, matemático irlandês, que nasceu em 1805, inventou uma álgebra em que a lei comutativa para a multiplicação não valia.

[4] Geoge Boole, matemática inglês, nascido em 1815, criador de uma nova álgebra, a álgebra booleana, partindo de seus pressupostos de que a matemática não é apenas a ciência das medidas e dos números, mas de sistemas de símbolos que mantêm regras precisas e consistência interna.

[5] Augustus De Morgan, nascido em 1806, deu continuidade ao trabalho de Boole, na álgebra de conjuntos, partindo dos mesmos pressupostos em relação à matemática.

> surpreender que a álgebra seja hoje a área-chave de estudo da matemática da escola secundária e que essa posição de destaque provavelmente perdure por muito tempo. (USISKIN, 1995, p. 21).

Também é difícil dizer quando se inicia o ensino de álgebra na escola. Quando a criança começa a trabalhar com os números naturais e as relações entre eles, como as de igualdade e de ordem, podemos afirmar que já estão presentes elementos do pensamento algébrico. Usiskin (1995) aponta para o desenvolvimento da álgebra, que tem relação com o que se passa no ensino.

> A álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com letras que representem os números. Revela-se que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...] e que as regras inclusive se aplicam às coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam a certas regras básicas. (USISKIN, 1995, p. 9).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) consideram características do pensamento algébrico: levantar hipóteses, fazer afirmações e justificações, identificar regularidades, variáveis e constantes, estabelecer relações entre grandezas, generalizar as regularidades, usar variáveis e pensar em totalidades.

Educadores matemáticos têm se preocupado com as concepções de álgebra e de educação algébrica e com as implicações que essas concepções têm na organização dos currículos, nos livros didáticos e no ensino-aprendizagem dessa área. Alguns trabalhos têm se constituído em referências para os pesquisadores interessados nessa temática, como os de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), educadores matemáticos brasileiros; Lins e Gimenez (2001), o primeiro, brasileiro e o segundo, espanhol; Usiskin (1995), educador matemático norte-americano; e Lee (2001), educadora matemática que atua no Canadá.

As concepções da álgebra, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), são, considerando-se o seu desenvolvimento histórico: *a processológica, a linguístico-estilística, a linguístico-sintático-semântico e a linguístico-postulacional.* Na Figura 6 a seguir, sintetizamos a caracterização de cada uma delas.

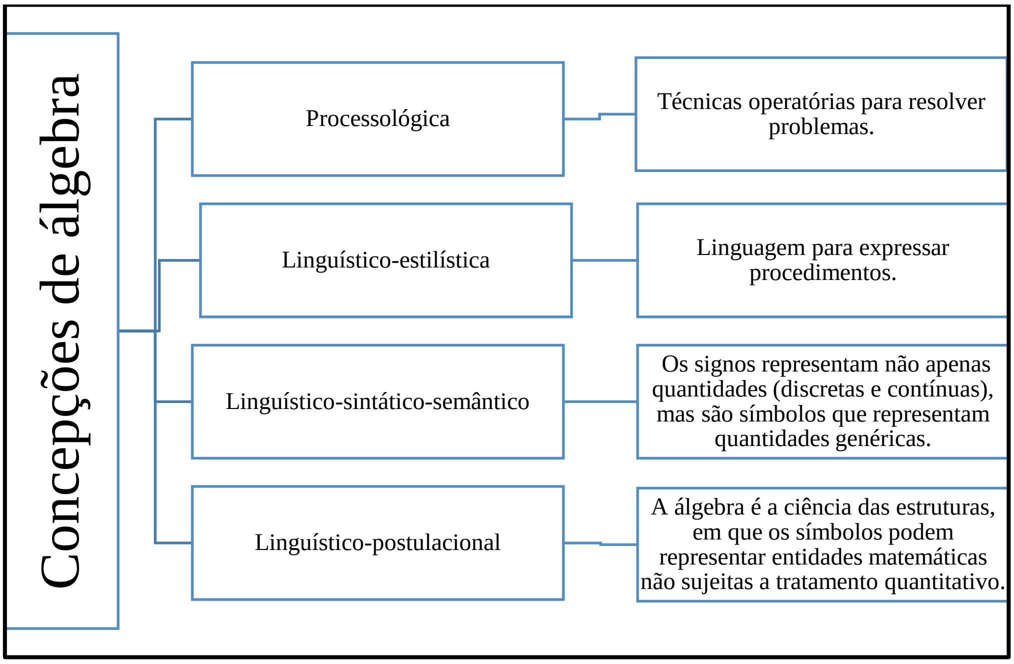


Figura 6: As concepções de álgebra, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel.
Fonte: Elaboração da autora (2015), adaptado de Fiorentini, Miorim, Miguel (1993).

Já para a educação algébrica, os autores fazem a seguinte categorização*: a concepção linguístico-pragmática, a fundamentalista-estrutural, a fundamentalista-analógica*.

A concepção linguístico-pragmática foi utilizada de forma dominante no período entre os séculos XIX e XX. Nessa concepção, a álgebra tem o seu papel pedagógico vinculado à resolução de problemas, com ênfase no transformismo algébrico. Há uma sequência de conteúdos que se inicia com o estudo das expressões algébricas, passando pelas operações, chegando às equações e depois à aplicação na resolução de problemas quase sempre artificiais.

A concepção fundamentalista-estrutural está ligada à concepção linguístico-postulacional da álgebra, na qual a álgebra é o estudo das estruturas gerais, em que os signos representam entidades mais gerais. Essa concepção de educação algébrica se insere no Movimento da Matemática Moderna, na segunda metade do século XX, e coloca ênfase nas propriedades das operações, pressupondo que o seu domínio garantiria a compreensão das estruturas em diferentes contextos. A ênfase recai sobre a Teoria dos Conjuntos, as propriedades das operações, as equações e inequações; e introduz o estudo de funções de primeiro e de segundo graus, considerados novos conteúdos.

Por fim, a concepção fundamentalista-analógica, que procura a conciliação das concepções anteriores, buscando desenvolver instrumentos para a resolução de problemas e a manutenção da preocupação com a justificação, agora apoiada em recursos analógicos, especialmente, os geométricos, por exemplo, a utilização de áreas para explicação de casos de produtos notáveis.

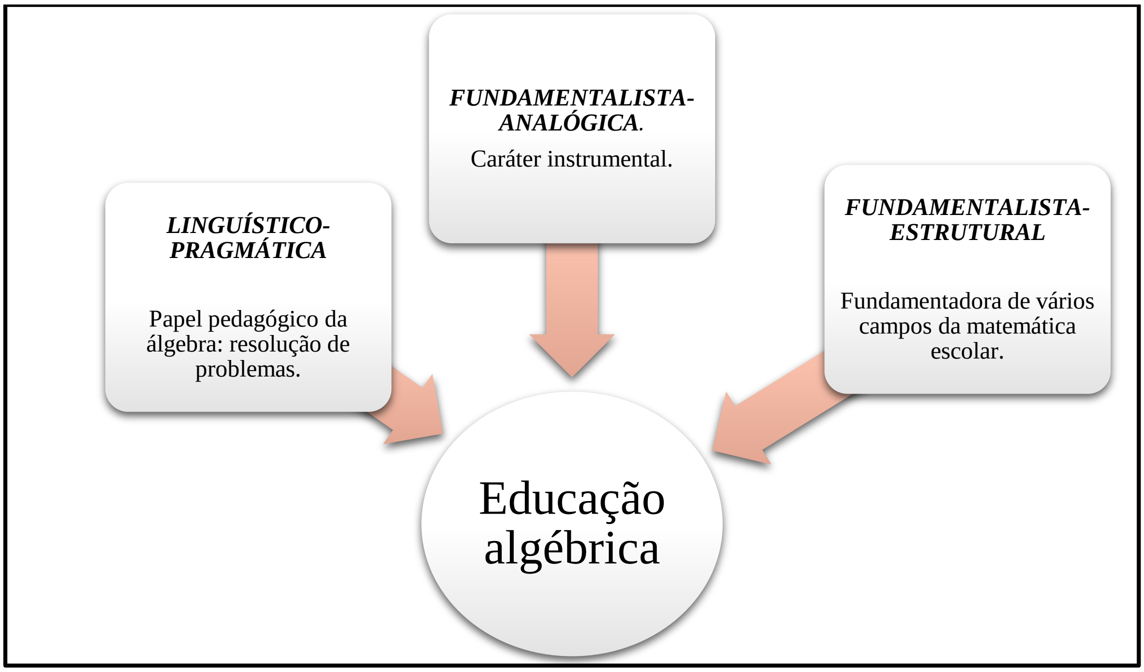


Figura 7: As concepções da educação algébrica, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel.
Fonte: Elaboração da autora (2015), adaptado de Fiorentini, Miorim, Miguel (1993).

Segundo os autores, o aspecto comum a essas concepções, considerado por eles negativo, é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Há uma ênfase na linguagem simbólica, para a qual os alunos não percebem a necessidade, ou seja, há a utilização de símbolos desprovidos de significados. Com base na Teoria Histórico-Cultural e, em consonância com os autores, podemos afirmar que o pensamento algébrico e a linguagem não podem ser dissociados.

> Tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra. Para nós, entretanto, tanto do ponto de vista histórico quanto cognitivo, a linguagem algébrica é também resultado de uma forma especial de pensamento. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 4).

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) apoiam-se em Vigotski para argumentar que entre pensamento e linguagem não existe uma relação de subordinação, mas uma relação dialética:

> Para Vygotsky (1993), pensamento e linguagem são interdependentes, um promovendo o desenvolvimento da outra e vice-versa. Ou seja, no processo ensino-aprendizagem, a linguagem não antecede necessariamente o pensamento, embora a apropriação da linguagem possa potencializar e promover o desenvolvimento do pensamento algébrico. (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p. 4)

Segundo Usiskin (1995), a concepção de álgebra no ensino está diretamente relacionada ao papel que é conferido às variáveis. O autor lembra que as concepções de variáveis mudam com o tempo. As finalidades do ensino de álgebra, as concepções que temos sobre ela e a utilização das variáveis são itens intrinsecamente relacionados. "**As finalidades da álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes **da álgebra** que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis."** (USISKIN, 1995, p. 13, grifos do original).

Nessa perspectiva o autor estabelece quatro concepções de álgebra: a álgebra como aritmética generalizada; a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver problemas; a álgebra como estudo de relações entre grandezas; a álgebra como estudo das estruturas. Na Figura 8 a seguir, sintetizamos tais concepções:

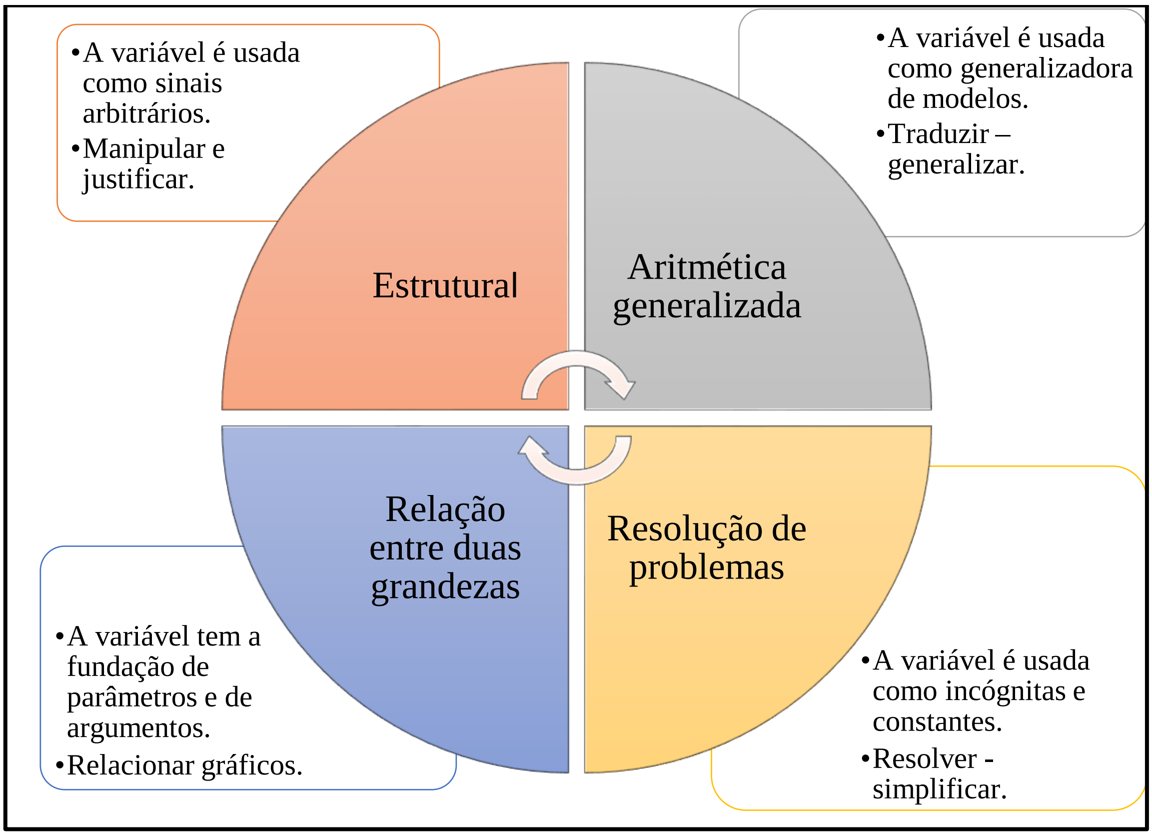


Figura 8: Síntese das concepções de Usiskin sobre álgebra.
Fonte: Adaptado de Usiskin (1995, p. 20).

O autor remete ainda ao uso das variáveis na computação, situação na qual a sintaxe utilizada é diferente da usada em matemática, o que não cabe explorar aqui. Para Usiskin (1995), ainda que as variáveis e, consequentemente, o ensino de álgebra comportem todas essas concepções, elas não se limitam a nenhuma delas. Por esse motivo, podemos afirmar que todas elas devem ser exploradas no ensino, mas de forma contextualizada na sociedade de hoje, em que as calculadoras, os computadores e outros meios digitais realizam muitas das tarefas que eram manipulatórias, de forma mais rápida e eficiente.

Lins e Gimenez (2001), partindo do pressuposto de que não há consenso sobre o que significa pensar algebricamente, reconhecem diversas concepções de atividade algébrica e de educação algébrica.

No que se refere às concepções de educação algébrica, a primeira delas é "calcular com letras", ou tendência letrista, segundo a qual atividade algébrica se resume a resolver problemas. A ênfase dessa perspectiva recai no esquema técnica (algoritmo)/prática (exercício). Os autores afirmam que essa é a tendência mais presente nos livros didáticos brasileiros e também na prática dos professores de matemática. A segunda se refere ao que chamaram de abordagens facilitadoras, as quais partem do pressuposto de que "a capacidade para lidar com expressões literais vem por 'abstração', por meio do trabalho com situações concretas." (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 107). Essas abordagens se assemelham em parte ao que Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) chamaram de fundamentalista-analógica, descrita anteriormente. Num terceiro grupo incluem as concepções ligadas à investigação e à modelagem matemática em que o "'concreto' é visto como o real, e as atividades propostas são de investigação de situações reais ou 'realistas' (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 108). São abordagens em que os alunos aprendem "em ação".

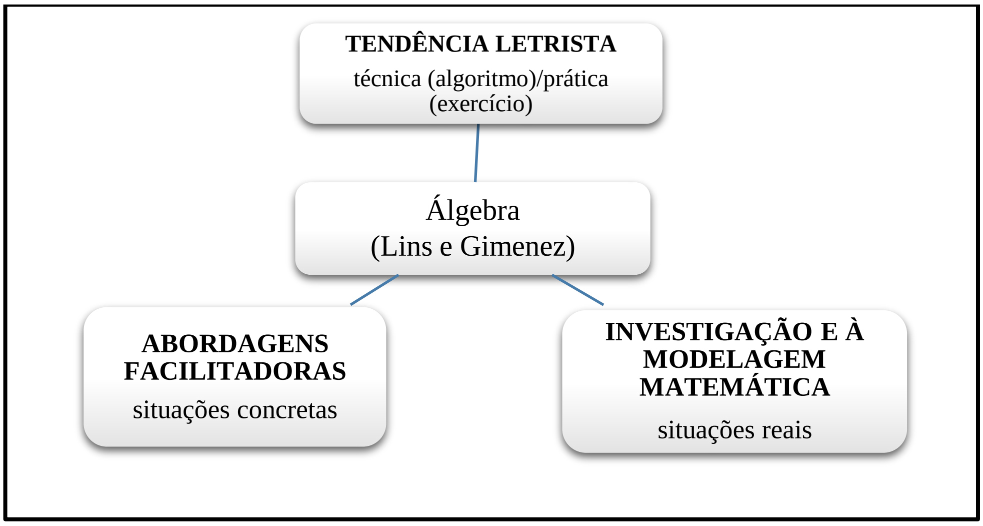


Figura 9: Síntese das concepções de Lins e Gimenez sobre educação algébrica.
Fonte: Elaboração da autora (2015), adaptado de Lins e Gimenez (2001).

Esses autores defendem que é preciso repensar a educação aritmética e a algébrica, não as tratando de forma fragmentada, uma antecedendo a outra, mas sabendo que uma depende da outra. Citam Davidov, que afirma que o ponto de partida da atividade algébrica está na atividade de lidar com relações quantitativas, esclarecendo que:

> O importante aqui é entender que Davidov estabelece, com essa afirmação, o fato de que, para ser capaz de resolver o mais simples dos problemas ‘aritméticos’, a criança precisa também lidar – de forma tematizada ou não – com as relações quantitativas. (LINS; GIMENEZ, 2001, p. 113-114).

Segundo Figueiredo (2007), para Lee (2001), há seis concepções de álgebra e de educação algébrica: como linguagem, como caminho do pensamento, como atividade, como ferramenta, como aritmética generalizada e como cultura. Algumas dessas concepções têm semelhanças com as tratadas pelos pesquisadores já mencionados, ora focando símbolos e regras, enfatizando o aspecto sintático, mais do que o semântico, como na primeira; ora os processos de generalização, como na segunda; ou os processos que envolvem modelagem matemática; ou a resolução de problemas. Acrescenta a concepção de álgebra como cultura, entendida pela autora como englobando crenças, valores, práticas, formas de transmissão, numa perspectiva de síntese das anteriores.

No Quadro 2, sintetizamos as concepções tratadas anteriormente e acrescentamos outras que referendam o que foi apresentado.

Lins e Gimenez (2001)

- Letrista.
- Letrista facilitadora.
- Modelagem matemática.
- O ensino da álgebra e a Teoria dos Campos Semânticos.

Fiorentini, Miorin e Miguel (1993)

- Processológica.
- Linguística - estilística.
- Linguística - sintático-semântico.
- Linguística - postulacional.

Lee (2001)

- Linguagem.
- Caminho do pensamento.
- Atividade.
- Ferramenta.
- Aritmética generalizada.
- Cultura.

Bednarz, Lee e Kieran (1996)

- A generalização de padrões geométricos e numéricos e as leis que governam relações numéricas.
- Solução de problemas.
- Situação envolvendo funções.
- Modelagem de fenômenos físicos e matemáticos.

Usiskin (1988) e Robayna (1996)

- Como artimética generalizada.
- Métodos para resolver certos problemas concretos: as equações.
- Relação entre as quantidades.
- Como estrutura.

Robayna (1996)

- Aritmética generalizada.
- Resolução de equações.
- Funcional.
- Estrutural.

Kieran (1995)

- Álgebra é uma matéria da escola.
- Álgebra é um aritmética generalizada.
- Álgebra é uma ferramenta.
- Álgebra é uma linguagem.
- Álgebra é uma cultura.
- Álgebra é um modo de pensamento.
- Álgebra é uma atividade.

Quadro 2: Concepções de álgebra e de educação algébrica de educadores matemáticos.
Fonte: Elaboração da autora (2015), com base em Figueiredo (2007) e Sousa et al. (2014).

O pensamento algébrico inclui a capacidade ou a habilidade de criar regras para representar relações entre duas grandezas e também a capacidade de fazer generalização sobre as propriedades de operações aritméticas. De acordo com Sousa et al. (2014, p. 29), “Para Vigotski, os conceitos algébricos permitem que se realizem os processos de generalização e abstração das ideias, diferentemente dos conceitos aritméticos, que realizam tais processos sobre objetos”.

A abstração é uma das características do pensamento algébrico. Abstrair é separar aspectos dos objetos sensoriais para pensar em um nível mais geral. Segundo Lins e Gimenez (2001, p. 107), “[...] a capacidade para lidar com as expressões literais vem por abstração, por meio do trabalho com situações concretas”. Portanto, é representar mentalmente uma situação. A abstração é um processo básico de construção do conhecimento, ou seja, de apropriação do conceito. A formação do conceito supõe necessariamente a generalização e a abstração; segundo Vigotski (2001), na formação do pensamento algébrico não é diferente, generalização e abstração são fundamentais e imprescindíveis.

Segundo Vigotski (1987), citado por Cedro e Moura (2007, p. 37), “[...] pelo aprendizado de álgebra, a criança passa a compreender as operações aritméticas como casos particulares de operações algébricas. Isso dá à criança uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada de suas operações com quantidades concretas [...]”.

A álgebra pode também ter uma concepção como linguagem, que inclui a relação entre incógnitas e variáveis, bem como a generalização de padrões. Entretanto, há considerações de que não há uma subordinação da linguagem ao pensamento e vice-versa.

> Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-la, colocar as questões de quais seriam os elementos caracterizados de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85).

Para Vigotski, o significado da palavra é a unidade do pensamento e da linguagem:

> Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível de pensamento. Consequentemente estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno do pensamento. (VIGOTSKI, 2009, p. 398).

Os elementos que distinguem o pensamento algébrico, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87), são “a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”. A capacidade de expressar o pensamento algébrico pode ser desenvolvida quando o aluno propaga a sua compreensão de uma situação-problema ou conceito, e defende a sua ideia por meio de diferentes modos de representação matemática.

Em consonância com os autores, Lins e Gimenez (2001, p. 137) afirmam: “A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra”. Para adquirir uma sólida compreensão é necessário que o aluno tenha adquirido um conhecimento aprofundado, desenvolvendo o conceito algébrico, ou seja, que tenha se apropriado de seu(s) núcleo(s).

Segundo Lee (2001), citada por Figueiredo (2007), existem alguns pensamentos que são adequados para iniciar os estudos algébricos: raciocinar sobre padrões, envolvendo operações utilizando gráficos, padrões numéricos, formas, etc. Generalizar ou pensar em termos do geral para o particular. Controlar mentalmente o ainda desconhecido, inverter e tornar a inverter operações. Pensar sobre conexões na matemática, em vez de objetos matemáticos. E existem alguns que não são considerados adequados, se abordados como exclusivos na educação algébrica, como o transformismo algébrico, a manipulação para resolução, a ênfase no pensamento formal, com o uso de símbolos sem significado, de forma mecânica.

A álgebra pode ser percebida como uma ferramenta para tornar o pensamento mais eficiente, uma ferramenta para resolver problemas não só no campo da matemática, como em outras ciências. De acordo com os PCN (1998):

> O ensino de álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (BRASIL, 1998, p. 84).

Conhecer as concepções de álgebra e de educação algébrica é fundamental para um professor de matemática, quando organiza as suas atividades de ensino, assim como para os envolvidos na definição dos conceitos matemáticos.

Podemos verificar que as concepções de álgebra apresentadas nos PCN de matemática são muito próximas das sugeridas por Usiskin (1995), como mostra a Figura 10:

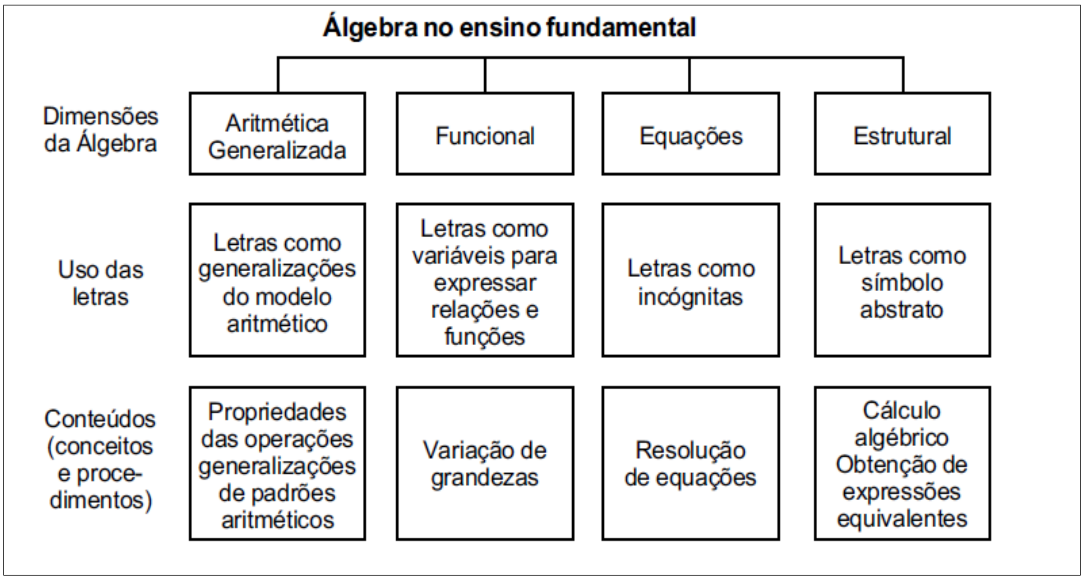


Figura 10: As dimensões da álgebra no Ensino Fundamental de acordo com os PCN/Matemática.
Fonte: BRASIL, 1998, p. 116.

No entanto, a álgebra deve ser percebida como um campo da matemática que possui elementos que a caracterizam como um corpo de conhecimentos, socialmente reconhecido. Deve ser abordada como procedimento para resolver certos tipos de problemas, mas a isso não se restringe. Compreende o uso de ferramentas algébricas, mas a isso não se limita. Promove o desenvolvimento de um tipo de pensamento, o algébrico, mas não tem existência desvinculada de uma linguagem, a linguagem de comunicação algébrica. Por esses motivos, Lee (2001) dá-lhe uma configuração mais abrangente, a de uma forma de "cultura".

Na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, compreendemos que a educação algébrica passa necessariamente pela produção de significados pelo estudante, que, para Vigotski (2009), não são únicos e nem imutáveis.

> [...] a autonomia da gramática do pensamento e da sintaxe dos significados verbais nos levam a perceber, no mais simples enunciado discursivo, não uma relação imóvel e constante, dada de uma vez por todas entre os aspectos semântico e sonoro da linguagem, mas um movimento, uma transição da sintaxe dos significados para a sintaxe da palavra, a transformação da gramática do pensamento em gramática das palavras, a modificação da estrutura semântica com a sua materialização em palavras. (VIGOTSKI, 2009, p. 417).

O sujeito se apropria do pensamento algébrico e da linguagem algébrica, que lhe possibilitam resolver situações-problema e atingir níveis superiores de pensamento.

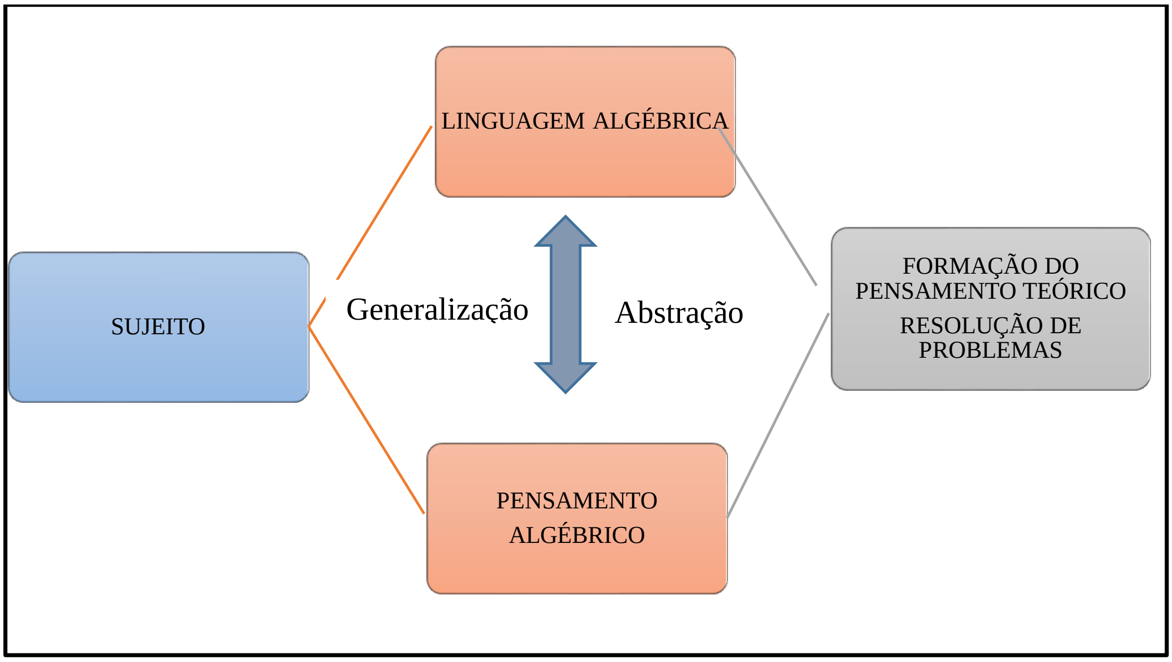


Figura 11: A linguagem e o pensamento algébricos mediados por instrumentos e signos diversos.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Desta forma podemos entender que a generalização é o cerne do raciocínio algébrico e pode ser expressa por meio de símbolos, ou melhor, signos, ou seja, por uma linguagem. Segundo Vigotski (2009), generalização e significado da palavra são sinônimos.

2.3 Polinômio: o conceito e sua inserção nos documentos oficiais e no livro didático

Nesta seção, inicialmente, abordamos o conceito formal de polinômio e buscamos percebê-lo relacionado a diferentes concepções de álgebra. Em seguida, verificamos como esse tema aparece nos PCN, que, ainda constituem os referenciais para o ensino de matemática no país.

2.3.1 O conceito de polinômio

A apropriação dos significados de polinômios pelos alunos do Ensino Fundamental, objeto deste estudo, está ancorada nas diversas concepções algébricas apresentadas anteriormente.

A formalização do conceito de polinômio visto no Ensino Fundamental tem tido um enfoque diferente do apresentado no Ensino Médio. No Ensino Fundamental, é abordado visando as estruturas algébricas, o campo das expressões algébricas, como sendo somente soma de monômios, no entanto, no Ensino Médio, é formalizado a partir do conceito de função.

O conceito científico de polinômio é dado por:

> Um *polinômio* é uma expressão formal do tipo
> $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots a_1X + a_0$
> onde $(a_0, a_1, ..., a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e x é um símbolo (chamado uma *indeterminada)*, sendo X^i uma abreviatura para X. X. .... .X (i fatores). Em essência, o polinômio p(X) é o mesmo que a lista ordenada dos seus coeficientes. (LIMA et al., 1996, p. 158)

Como para cada valor de X, um número real X_i, corresponde um único número $p(X_i)$, também pertencente ao conjunto dos números reais IR, podemos falar que o polinômio é uma função do conjunto IR em IR, definida por: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$.

> A toda igualdade da forma $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, obtida igualando um polinômio inteiro a zero, chama-se uma equação algébrica; o grau do polinômio diz-se grau da equação. Por exemplo: $x^3 – 6x^2 + 11x – 6 = 0$ é uma equação algébrica do grau 3. (CARAÇA, 1984, p. 143).

Segundo Iezzi (2001, p. 85), tratando os polinômios no campo dos números complexos, que também é válido para o campo dos números reais, pode-se garantir que, se for dado um número complexo "a" e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, chama-se o *valor numérico de f em "a"* à imagem de "a" pela função f, isto é, $f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n$. Em particular, se "*a*" é um número complexo e f é um polinômio tal que $f(a) = 0$, dizemos que "*a*" é um zero de f.

A partir da definição formal de polinômio, podemos afirmar que a sua essência está no conceito de função. Considerando a importância desse conceito na matemática, buscamos as suas raízes epistemológicas nas ideias de Caraça, em sua obra *Conceitos fundamentais da* *matemática.* Esse autor, expressando uma visão de ciência que se constrói de forma não harmoniosa, mas a partir de contradições, conforme já o dissemos, considera o conceito de função como fundamental, para a compreensão da Realidade[6] que cerca o homem.

Rompendo com a lógica da Teoria dos Conjuntos, presente em sua época, inova com a associação do conceito de função às ideias de *interdependência* e *de fluência*, que são duas características fundamentais para compreender a Realidade.

A interdependência diz respeito ao fato de que existe relação entre tudo que constitui a Realidade, como o afirma Caraça (1984, p. 109): "Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta *Realidade* em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros".

Por exemplo, existe uma relação de dependência entre um filho e seus pais; ao abastecer um veículo no posto de combustíveis, o valor a ser pago depende da quantidade de litros colocados no tanque, dentre muitos outros que poderíamos citar, já que, de acordo com Caraça (1984), todos participam da vida uns dos outros.

A fluência, segundo o autor, apoiando-se em Heráclito de Éfeso, é movimento pelo qual as coisas se transformam, portanto, tudo muda o tempo todo, tudo flui, muitas são as transformações vividas pelo homem.

Para o autor, uma das tarefas mais importantes no trabalho e na investigação da natureza é a procura de regularidades dos fenômenos naturais. A lei natural é toda a regularidade de evolução dum isolado[7] de um fenômeno natural, isoladamente. Segundo o autor, o instrumento matemático próprio para o estudo das leis naturais é o conceito de função, que também não surgiu de forma pronta e acabada.

Analisando as definições formais dadas aos polinômios, percebemos que elas têm subjacentes, além da concepção de álgebra como função; a concepção de álgebra como estruturas algébricas, pois, para os polinômios, podem se definir a igualdade, a soma e a multiplicação; a concepção como equação, quando fazemos p(X) = 0; e a concepção como aritmética generalizada, quando operamos com os polinômios como se opera com os números.

Entretanto, analisando nos livros didáticos do 8º ano/7ª série do Ensino Fundamental, o conceito de polinômio é abordado como sendo uma expressão algébrica formada pela adição algébrica de monômios, sendo cada monômio um termo do polinômio, como se pode

---

[6] Mantivemos a grafia do autor.
[7] Isolado é uma seção da realidade, segundo Caraça, quando o homem em um certo momento faz uma análise delimitando o espaço.

constatar em Souza e Pataro (2012, p. 96). O monômio, por sua vez, é uma expressão algébrica formada por um único termo. Esse termo é constituído por duas partes, que são: a variável, chamada de parte literal; e o número, que é denominado coeficiente. Na perspectiva teórica que estamos procurando adotar neste estudo, essa abordagem pode ser problemática e, inclusive, causa da falta de significados que esses conteúdos têm para os alunos.

Os conceitos matemáticos são, na sua essência, abstratos, sendo necessário utilizar capacidades cognitivas de ordem superior para interiorizá-los. Assim, a organização de seu ensino supõe ter clareza dos conceitos a serem trabalhados, pois é objetivo do ensino nesse nível o desenvolvimento do pensamento teórico. “Formar um conceito significa reproduzir mentalmente seu conteúdo, bem como compreender sua essência.” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 95).

De acordo com esses autores, apoiados em Davidov (1982) e Kopnin (1978), o pensamento teórico tem nexos internos, a que chamam de *nexos conceituais*. “Definimos nexo conceitual como o elo entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 96). Tais autores atrelam os nexos internos ao movimento lógico-histórico do objeto estudado. Os nexos conceituais, em consonância com Davidov (1982), são a base da formação do conceito, pois, na sua estrutura, possuem as ramificações, envolvendo o lógico, a história, as abstrações e a formalização do pensamento. Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 96), “os nexos conceituais são os elos que podem ligar os conceitos que historicamente foram construídos pelas diversas civilizações”.

Corroboramos essas ideias e as complementamos com as de Araújo (2013, p. 154), quando afirma que:

> Assumir a dimensão lógico-histórica do conhecimento pressupõe, na perspectiva do ensino que promove o desenvolvimento, organizar o ensino de forma que o sentido do conhecimento possa ser percebido não apenas na esfera das sensações, mas também na esfera dos processos mentais. [...], isto é, no trabalho mental há um movimento do pensamento que permite compreender os nexos conceituais do conteúdo científico.

A partir dessas ideias, mapeamos o conceito de polinômio, buscando estabelecer alguns desses nexos.

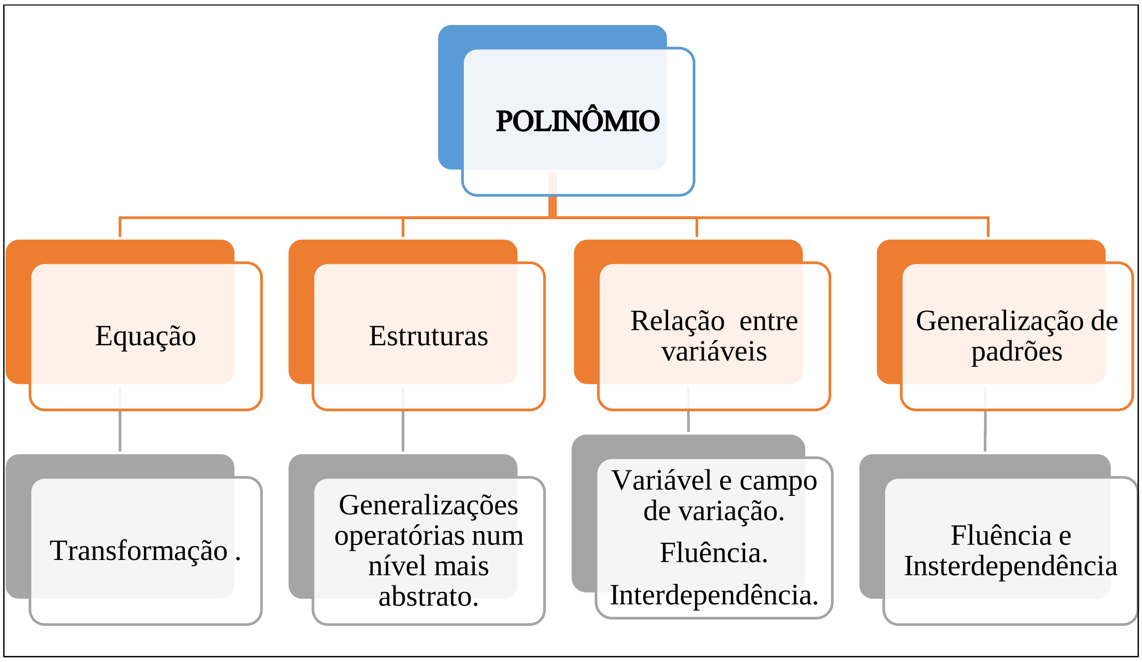


Figura 12: Nexos conceituais do conceito de polinômios.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Os nexos conceituais do polinômio podem ser mediados pelas diversas formas da linguagem para assim permitir a apropriação dos conhecimentos e, consequentemente, elevar ao pensamento teórico.

2.3.2 Polinômio nos PCN

Para tratar dos polinômios nos PCN, é importante lembrar que o pensamento algébrico está subjacente a todo pensamento matemático, perpassando os outros blocos de conteúdo, de acordo com os quais os PCN se organizam: a aritmética, a geometria e o tratamento da informação, porque permite explorar a estrutura da matemática.

Nesse sentido, lembramos o que diz Vigotski (1987, apud CEDRO; MOURA, 2010, p. 61) ao afirmar que “a álgebra livra o pensamento da criança da prisão das relações numéricas concretas e o eleva ao nível mais abstrato”. Outro ponto que cabe esclarecer é que concordamos que o desenvolvimento do pensamento algébrico se inicia tão logo a criança começa a generalizar algumas relações, por exemplo, as relações de igualdade e a de ordem, e quando começa a tratar as relações quantitativas, como o afirmam Lins e Gimenez (2001). No entanto, iremos nos deter nas referências específicas ao tema polinômios, nos anos finais do Ensino Fundamental.

Os PCN também sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico começa nas séries iniciais:

> Embora nas séries iniciais já se possam desenvolver alguns aspectos de álgebra, é especialmente nas séries finais do Ensino Fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 50-51).

Segundo os PCN, o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

> As atividades algébricas propostas no Ensino Fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. Os contextos dos problemas deverão ser diversificados para que eles tenham oportunidade de construir a "sintaxe" das representações algébricas, traduzir as situações por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas e variáveis), e construir as "regras" para resolução de equações. (BRASIL, 1998, p. 121-122).

Com base na teoria na qual esta pesquisa se embasa, lembramos que a construção do pensamento teórico, a apropriação dos significados dos conceitos e dos procedimentos é o que deve orientar a organização do ensino. Para atingir esse objetivo, é necessário estabelecer diferentes formas de organizá-lo, porém, priorizando uma lógica que se desenvolve a partir dos nexos internos dos conceitos. Entretanto, o que se observa nas recomendações dos PCN é a valorização do pensamento empírico, a separação do pensamento e da linguagem algébricos, como se pode perceber na sugestão a seguir:

> Iniciar o estudo da sintaxe que o aluno está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico. Esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema. (BRASIL, 1998, p. 118).

Assim, os PCN sugerem ser mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica.

De acordo com os PCN, nos anos finais do Ensino Fundamental, no bloco *Números e Operações*, são trabalhados os conceitos de variável e de função, podendo ter a representação de fenômenos na forma gráfica, ou a resolução de problemas por meio de equações. Os PCN (1998) do Ensino Fundamental aconselham ensinar a álgebra a partir da 5ª série/6º ano.

A capacidade de raciocinar algebricamente permite que os alunos explorem situações e organizem seus pensamentos. Enquanto a aritmética é normalmente vista como um cálculo a partir de quantidades conhecidas, com o objetivo de encontrar o caminho certo para uma resposta, o raciocínio algébrico visa analisar as relações entre os números para encontrar um valor desconhecido. É por isso que é essencial para o desenvolvimento básico, a habilidade de pensar algebricamente, especialmente em situações de resolução de problemas.

Quando os alunos utilizam gráficos, tabelas de valores, expressões, equações ou análise de situações envolvendo mudança de quantidades para estabelecer a relação entre essas quantidades, eles estarão desenvolvendo o pensamento algébrico.

Segundo os PCN (1998), os objetivos do ensino da matemática com relação ao pensamento algébrico, no terceiro e no quarto ciclos[8] são, respectivamente:

> Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p. 62).

> Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades –, identificando as equações, inequações e sistemas; resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81).

Analisando esses objetivos, percebemos que eles expressam as diferentes concepções de álgebra que os PCN endossam. Há uma ênfase na generalização empírica, indutiva, porém

[8] À época, o terceiro ciclo do Ensino Fundamental compreendia a 5ª série, hoje 6º ano; e a 6ª série, hoje 7º ano. O quarto ciclo englobava a 7ª série, hoje 8º ano; e a 8ª série, hoje 9º ano.

alguns autores, como Lins e Gimenez (2001), Sousa, Panossian e Cedro (2014) alertam para propostas de ensino, inclusive recorrentes nos livros didáticos, de generalizações empíricas, e não de generalizações teóricas para as quais o conceito de variável é fundamental, o que extrapola a simples manipulação simbólica.

Nos PCN, não aparece de forma explícita o termo *polinômio*, tanto na descrição dos objetivos, como nos conteúdos e nas orientações didáticas. Evidencia-se o ensino de polinômios como a utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas. Também utilizam a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos. Fala-se em “construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas; obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatoração e simplificação.” (BRASIL, 1998, p. 88). Percebe-se nessa última indicação uma ênfase nas expressões algébricas, mas não nos polinômios.

Em nossa compreensão, fala-se de generalização, de observação de regularidades, o que em muitas atividades traz implícito o conceito de função, mas esse conceito também não aparece de forma explícita. Portanto, tratar os polinômios como função, que é a essência desse conceito, não está indicado explicitamente. Há uma afirmação nas orientações didáticas com a qual concordamos em parte:

> Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a este grau de ensino. (BRASIL, 1998, p. 116).

Concordamos que a abordagem excessivamente formal de funções possa trazer problemas para a aprendizagem, entretanto, o conceito de função é fundamental e pode ser explorado de forma a dar unidade a muitos conceitos trabalhados.

Davidov (1988), citado por Libâneo (2004), descreve as bases das generalizações teóricas no ensino escolar:

> a) A assimilação dos conhecimentos de caráter geral e abstrato precede a familiarização com os conhecimentos mais particulares e concretos; é a

> partir daqueles que se deduzem estes, correspondendo às exigências da ascensão do abstrato ao concreto.
> b) Os conceitos de uma disciplina escolar devem ser assimilados por meio do exame das condições que os originaram e os tornaram essenciais, ou seja, os conceitos não se dão como "conhecimentos já prontos", devendo ser deduzidos a partir do geral e do abstrato.
> c) No estudo da origem dos conceitos os alunos devem, antes de tudo, descobrir a conexão geneticamente inicial, geral, que determina o conteúdo e a estrutura do campo de conceitos dados.
> d) É necessário reproduzir esta conexão em modelos objetivados, gráficos e simbólicos (literais) que permitam estudar suas propriedades em "forma pura" (por exemplo, a estrutura interna das palavras pode ser representada com a ajuda de esquemas gráficos especiais).
> e) Há que se formar nos alunos ações objetivadas que lhes permitam revelar no material de estudo e reproduzir nos modelos as conexões primárias e universais do objeto de estudo, de modo que se garantam as transições mentais do universal para o particular e vice-versa.
> f) Os escolares devem passar paulatinamente e no seu devido tempo da realização de ações no plano mental para a realização de ações no plano externo (objetivadas) e vice-versa (LIBÂNEO, 2004, p. 14).

Essa base teórica proposta por Davidov se contrapõe a muitas das orientações presentes nos PCN e presentes em nossa prática docente. O conteúdo ministrado deve fazer com que o aluno se aproprie do pensamento teórico-científico e, para isso, é necessário que consiga assimilar o conteúdo proposto por meio de atividade de aprendizagem que tenha como princípio o movimento do geral para o particular.

2.3.3 Polinômio na Matriz Curricular

A Matriz Curricular (2014) é um documento que visa apresentar a proposta pedagógica da rede municipal de ensino. Foi elaborada pela equipe pedagógica e por docentes das escolas municipais, com a participação de representantes de professores e pedagogos, atuantes no oitavo ano, sob a coordenação da Secretaria Municipal de Educação e Cultura de Uberaba-MG.

No documento são estabelecidas as competências fundamentais a serem desenvolvidas pelos alunos da rede municipal. Foram elencadas quatro categorias para cada segmento escolar, ou seja, cada ano/série, que são: eixos estruturantes, objeto de conhecimento, direitos de aprendizagem e condições didáticas. Propõe-se a propiciar o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de uma forma coesa, ressaltando a importância de o professor avançar além das propostas explicitadas.

Com relação à matemática, o eixo no 8º ano - números e operações – tem como objetivo desenvolvimento da profundidade e abstração de cálculos. Os direitos de aprendizagem EE10C3DA14[9] citam a linguagem algébrica para a resolução de problemas, o EE10C3DA16 fala em construir procedimentos, para efetuar operações com expressões algébricas, utilizando propriedades conhecidas; e o EE10C3DA17, compreender e resolver situações problemas, envolvendo operações com monômios e polinômios, que abranjam conhecimentos de perímetro, de área e de volume.

Segundo a matriz, com relação às condições didáticas para trabalhar os conceitos algébricos, são importantes as atividades exploratórias e investigativas, para produzir escritas algébricas, em situações que envolvam generalização de propriedades, de incógnitas, de fórmulas, de relações numéricas e de padrões.

Percebemos que a Matriz Curricular mantém a lógica e as orientações dos PCN, não há uma relevância para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébricos, mas se dá ênfase à manipulação das estruturas algébricas. Não se faz referência explícita ao estudo de polinômio.

2.3.4 Polinômio no plano de ensino

No plano de ensino de matemática da professora do 8º ano de 2014, e no plano de aula semanal em que ela aborda o conteúdo, a partir dos descritores, da metodologia, das atividades, pudemos perceber a presença de um estudo algébrico voltado somente para a resolução das atividades propostas pelo livro e algumas propostas em folhas xerocopiadas nas quais a ênfase é na operação técnica dos polinômios.

Mais uma vez, perpassam pelas ações o conhecimento empírico, a construção da generalização intuitiva e o transformismo e os cálculos algébricos, o que impede a construção de significados pelo aluno.

---

[9] Representação, especificando a habilidade e competência da Matriz Curricular da Prefeitura de Uberaba.

2.3.5 Polinômio nos livros didáticos

O ensino e a aprendizagem da álgebra têm preocupado educadores desde o surgimento desse campo de pesquisa. Percebemos isso pelo fato de que, para muitos estudantes, o início do estudo de álgebra representa um momento de ruptura, quando ocorre o cessar de um pensamento matemático que faz sentido, tendendo a um pensamento baseado em regras para as quais eles não entendem a razão.

O significado de álgebra desaparece atrás do aprender um novo cálculo: o cálculo literal, muitas vezes concebido como uma atividade pré-algébrica, tarefas específicas como desenvolver, simplificar e fatorar expressões algébricas. Consideramos que a álgebra é um importante campo da matemática e, por consequência, da matemática escolar.

Apesar dos esforços significativos nos últimos anos no campo de pesquisa em Educação Matemática, o ensino da álgebra levanta muitas questões e introduz novas abordagens didáticas algébricas como resolução de problemas, generalização e modelagem. Segundo Booth (1995), a álgebra é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre os alunos.

Os conceitos algébricos exigem ir além de um raciocínio aritmético, em direção a uma forma de pensamento mais complexa, que opera sobre as relações quantitativas abstratas. Ensinar matemática é uma tarefa particularmente complexa se queremos ensinar os alunos a realmente “pensar matematicamente”.

Na organização do ensino na Educação Básica, o livro didático é uma ferramenta nas decisões que norteiam as ações docentes e, muitas vezes, é a única diretriz para o professor. Como as atividades propostas nesta pesquisa foram desenvolvidas em uma escola pública, é bom lembrar que o Estado tem o dever de distribuir material didático nessas instituições, e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem seu embasamento legal na Constituição de 1988, na qual se estabelece a obrigatoriedade do Estado em relação à educação:

> Art. 208 O dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de: [...]
> VII – atendimento ao educando, no ensino fundamental, através de programas suplementares de material didático-escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde. (BRASIL, 1988).

Tendo em vista o nosso objeto de estudo, analisamos os dois últimos livros adotados pela rede municipal de Uberaba. O livro utilizado a partir no ano de 2014 foi aprovado pelo MEC por meio do Guia dos Livros Didáticos - PNLD de 2005. O livro em questão é *Vontade* *de Saber Matemática*, dos autores Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro, da editora FTD, ano 2012. Os dois autores são graduados em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). O livro adotado anteriormente havia sido o do Sistema de Ensino CNEC[10].

Iremos analisar os volumes do 8°ano, iniciando pelo primeiro livro citado, *Vontade de Saber Matemática.* Esse volume foi dividido em treze capítulos, abarcando a geometria, a aritmética, a álgebra e o tratamento da informação, portanto, os quatro blocos de conteúdos sugeridos pelos PCN. Os capítulos propostos são introduzidos por meio de recursos como textos com situações do dia a dia, imagens do cotidiano e fatos históricos. Para auxiliar na compreensão do assunto abordado, o livro apresenta a teoria apoiada em alguns exemplos com o tópico *Explorando o Tema*. Traz, ainda, algumas seções como: *Testes e Revisão*, que são exercícios para fixação do tema estudado com questões de múltipla escolha cujo propósito é rever o conteúdo e verificar a aprendizagem. E, ao final do capítulo, há, ainda, algumas sugestões de livros e *sites* para complementação. Em alguns capítulos há um tópico que os autores chamam de *Acessando tecnologias*, no qual sugerem a utilização de alguns *sites* e *softwares* como uma ferramenta para estimular o aluno na aprendizagem.

Ao lermos a proposta de orientação dos autores para o professor, percebemos que eles não se referem a nenhuma concepção de álgebra empregada nesse volume e, em nenhum momento, argumentam sobre o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica. Notamos que os autores priorizam a comunicação entre os campos geométricos e algébricos, porém, por muitas vezes, as atividades se prendem à aplicação de propriedades e teoremas.

No Capítulo 5, intitulado *Monômio, Polinômio, Produtos Notáveis e Fatoração,* os autores iniciam mostrando uma relação entre grandezas, abordando um exemplo sobre a vazão de água por segundo. Trata-se de uma função, mas o foco dos autores é na linguagem, ou seja, na escrita de uma expressão algébrica, sem explorar o conceito de variáveis e o de função. Aliás, essa tendência está presente nos exemplos e nas atividades propostas aos alunos, ainda que busquem contextualizações na geometria ou em outras situações.

Apresentam, em seguida, o conceito de expressões algébricas, como “as expressões em que aparecem letras e números” (SOUZA; PATARO, 2012, p. 96), abordando depois o que chamamos de valor numérico. Os monômios são definidos como expressões algébricas formadas por um só termo, e os polinômios, como “expressões algébricas formadas pela adição algébrica de monômios, sendo cada monômio um termo do polinômio.” (Idem, p. 105).

---

[10] CNEC - Colégio Cenecista Doutor José Ferreira, localizado na cidade de Uberaba, instituição responsável pela produção do material didático adotado pela Prefeitura.

No estudo das operações com polinômios, há ênfase na representação das medidas dos lados de figuras geométricas planas e espaciais, na representação de áreas e de volumes, aparecendo, assim, expressões algébricas com duas variáveis independentes, como no exemplo (Figura 13).

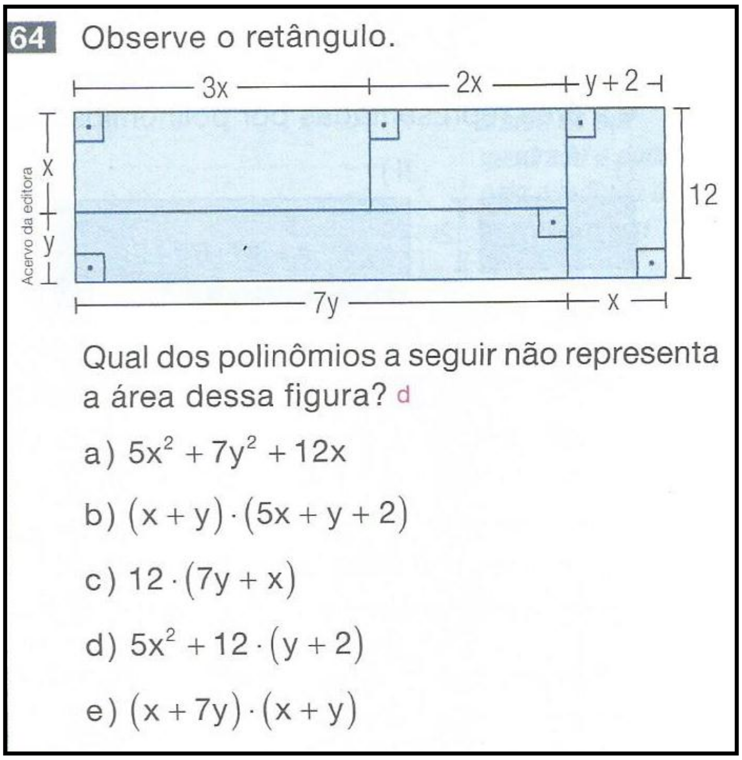


Figura 13: Exercício do livro utilizando conceito algébrico ligado ao contexto geométrico.
Fonte: Livro *Vontade de Saber Matemática*, 8º ano (SOUZA; PATARO, 2012).

Também no estudo dos produtos notáveis, há vários exemplos e exercícios envolvendo o cálculo de áreas (Figura 14).

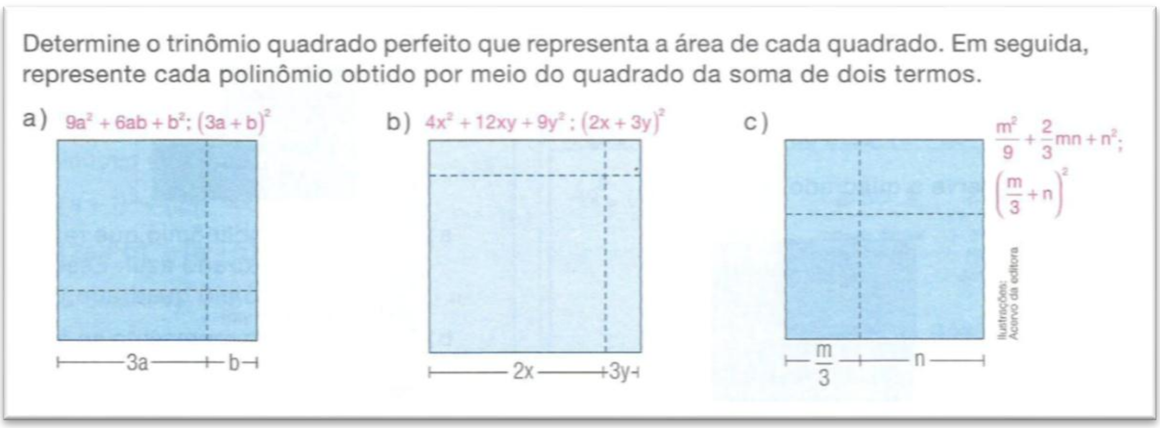


Figura 14: Exercício do livro abordando cálculo de área e polinômio.
Fonte: Livro *Vontade de Saber Matemática*, 8º ano (SOUZA; PATARO, 2012).

O livro didático adotado enfatiza o uso de recursos geométricos para dar sentido aos elementos algébricos, embora os PCN e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmem que o pensamento algébrico pode se expressar pela linguagem natural, pela linguagem aritmética, geométrica ou através de uma linguagem simbólica específica. Percebemos também que, nessa obra, a noção de variável não apresentou relevância. Em dois exercícios foi solicitado aos alunos resolver situações-problema envolvendo duas grandezas, mas não se aborda o movimento ou a relação entre elas. Segundo os PCN:

> [...] a noção de variável, de um modo geral, não tem sido explorada no Ensino Fundamental e por isso, muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve apenas para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles letra sempre significa uma incógnita. (BRASIL, 1998, p. 118).

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), a concepção da educação algébrica presente nessa obra foi a linguístico-postulacional, pois traz recursos geométricos para apresentar um objeto algébrico, como podemos observar na explicação de vários itens – as operações entre polinômios, produtos notáveis e fatoração, com o intuito de facilitar a compreensão dos alunos. Entretanto, essa abordagem, com ênfase na linguagem algébrica, causa-nos preocupação, pois pode ser negativa, dado que lidar com as medidas de figuras geométricas tem as suas restrições. Concordamos com Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005, p. 4), quando afirmam: “Além disso, a álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas. Ela é, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo”.

No capítulo 7, os autores abordam as equações do 1º grau, sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas e inequações do 1º grau com uma incógnita, assuntos específicos de álgebra. Ainda que os polinômios estejam presentes em equações e inequações de 1º grau com uma variável, pois resolver a equação é encontrar o zero do polinômio, nenhuma menção é feita sobre isso. Ao abordar as equações de 1º grau com duas incógnitas, os autores trabalham implicitamente com a ideia de função polinomial de 1º grau e com a sua representação no sistema cartesiano, sem se referir ao conceito de função, o que será retomado mais tarde, como se não tivesse nenhuma relação com o que foi estudado aqui.

As dificuldades encontradas no ensino e na aprendizagem da álgebra permeiam a forma como ela é abordada pelos livros didáticos e também sua utilização em sala de aula pelo professor. Os alunos sentem dificuldades com a álgebra que é ensinada em sala de aula por seus professores.

> Os alunos experimentam dificuldades com a álgebra que é ensinada em sala de aula por seus professores e os professores ensinam a álgebra que é apresentada nos livros-texto. [...] Presentemente, o conteúdo da maioria dos livros-texto de álgebra não incorpora uma perspectiva procedimental-estrutural de aprendizagem de matemática pelos alunos, nem parece refletir como a álgebra evoluiu historicamente. (KIERAN apud SANTOS, 2007, p. 12).

O outro livro escolhido para verificar como o assunto polinômios é tratado, como já anunciamos, é o do *Sistema de Ensino CNEC*. Essa coleção foi utilizada pelo município nos anos de 2011, 2012 e 2013.

De acordo com os elaboradores, o pressuposto que os norteiam é: o conhecimento é construído tomando sempre novos conhecimentos e em espiral, ou seja, retomando conceitos já abordados, numa sequência lógica, na qual os conceitos se retomam a cada ano, fazendo assim uma interligação entre as diferentes construções do saber. O material referente ao 8º ano é composto por três volumes e organizado em vinte unidades, que são a reunião de alguns tópicos relacionados entre si.

Na orientação para o professor, não foram abordadas as concepções de álgebra utilizadas e nem mesmo foram feitas considerações sobre pensamento e linguagem algébrica.

As unidades são desenvolvidas por meio de tópicos intitulados: *Ampliando o Conhecimento*, *Texto e Contexto*, *Saiba Mais*, *Exercícios de Sala*, *Exercícios Propostos*, *Minhas Ideias, Nossas Ideias* e *Práxis*. Grande parte das unidades é introduzida por meio de recursos como textos com situações do dia a dia e fatos históricos. Em seguida, apresenta-se a teoria apoiada em alguns exemplos, que auxiliam na compreensão do conteúdo. Na sequência, os exercícios de sala e, ao final do capítulo, são propostos os exercícios de aprofundamento. Há um material de apoio ao final de cada volume, ou seja, folhas para serem destacadas e recortadas para realização de atividades em sala, como desenvolvimento de jogos e figuras geométricas para montar.

A parte algébrica no material do 8º ano é tratada nos três volumes. No primeiro, a unidade *Cálculo Algébrico*; no segundo, a unidade *Fatoração de Expressões Notáveis*; e, no terceiro, *Equações e Sistemas*.

Como no livro anterior, o foco está na linguagem e no cálculo algébrico, o que pode ser constatado já no título da unidade. O conceito de expressões algébricas é apresentado também por meio de uma situação que expressa uma relação funcional, entretanto, o conceito de variáveis não é explorado, assim como não o é o conceito de função. A preocupação é com a generalização espontânea de uma expressão algébrica, definida como expressão constituída por letras e números, como se pode verificar na figura a seguir. De acordo com a classificação de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), trata-se de uma concepção linguístico-estilística.

Observe o exemplo a seguir:

Em um supermercado, o preço unitário de um pacote de bolachas é de R$ 1,50. Portanto, poderíamos construir a seguinte tabela:

Número de pacotes de bolachas	Valor a pagar em reais
1	R$ 1,50
2	R$ 3,00
3	R$ 4,50
4	R$ 6,00
X	????

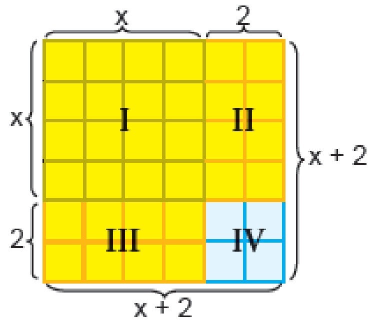
Qual a expressão que indica, de modo geral, o valor a pagar?_______________________________

Essa expressão do preço a pagar (1,50 X) é um exemplo de **expressão algébrica** ou **literal**.
Expressões algébricas podem ser definidas como expressões constituídas por números e letras entre os quais existem sinais de operações. As letras que aparecem numa expressão algébrica são chamadas de **variáveis**.

Figura 15: Exemplo para introduzir expressões algébricas no livro do 8º ano.
Fonte: Matemática 8º ano (SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, p. 88).

O conceito de polinômios é apresentado como soma algébrica de monômios. Ao tratar as operações com polinômios, busca-se analogia com as operações com os números naturais, embora de forma não muito explícita. Subjaz a essa apresentação a concepção de aritmética generalizada. Também se faz uso de recursos analógicos geométricos, porém, de forma menos frequente do que no outro livro analisado. Neste livro, eles aparecem mais no estudo dos produtos notáveis, como se pode ver na Figura 16.

Vamos representar o produto notável $(x + 2)^2$ no papel quadriculado.



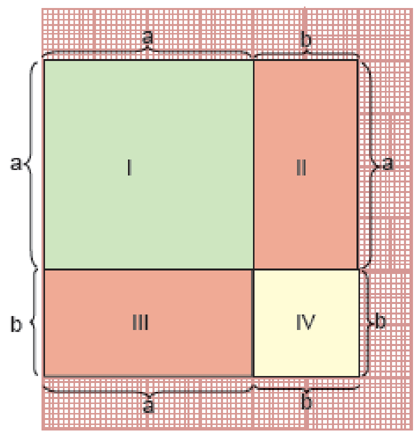
$$\underbrace{(x + 2)^2}_{\text{Área do quadrado grande (contorno)}} = \underbrace{x^2}_{\text{Área do quadrado (I)}} + \underbrace{2 \,.\, x}_{\text{Área do retângulo (II)}} + \underbrace{x \,.\, 2}_{\text{Área do retângulo (III)}} + \underbrace{2^2}_{\text{Área do quadrado (IV)}}$$

Logo:

$(x + 2)^2 = x^2 + 2 \,.\, x \,.\, 2 + 2^2$

$\mathbf{(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4}$

De maneira geral, temos:



Área I = $a \,.\, a = a^2$
Área II = Área III = $a \,.\, b$
Área IV = b^2

Logo:

$$\overbrace{(a + b)^2}^{\text{Área total}} = I + II + III + IV$$

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

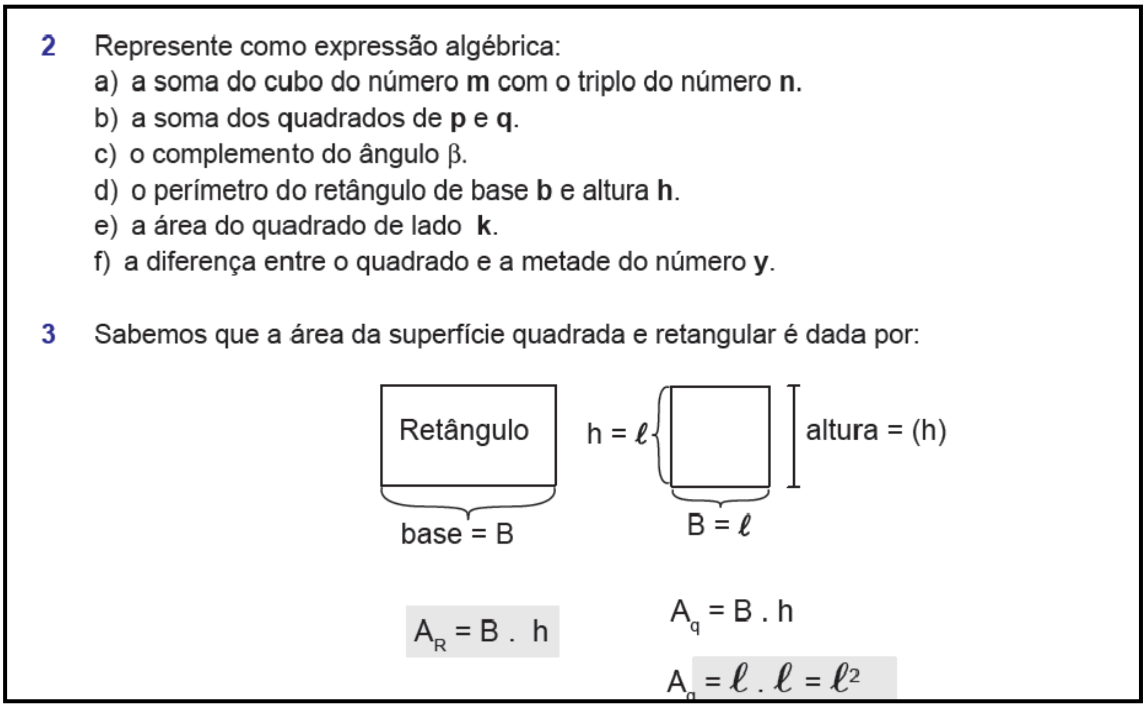
Figura 16: Produtos notáveis por meio da geometria.
Fonte: Fonte: Matemática 8º ano (SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, p. 107).

Lins e Gimenez (2001) fazem uma crítica à utilização de recursos geométricos para facilitar o processo de aquisição de significados algébricos, com a qual concordamos:

> [...] isso derruba de forma categórica as posições “letristas”, e revela que as posições “facilitadoras” ignoram o fato de que os produtos notáveis como áreas e como manipulação simbólica guardam em comum apenas o texto da *afirmação*, mas não *a justificação* que torna sua enunciação legítima. Em outras palavras, de áreas para pensamento algébrico ou de balanças para pensamento algébrico há *rupturas*, e não “abstração” ou “passagem”. (LINS e GIMENEZ, 2001, p. 121, grifos dos autores)

Segundo a caracterização dos autores supracitados para a educação algébrica, trata-se da concepção fundamentalista-analógica, pois ela visa restaurar o valor instrumental da álgebra e a sustentação do caráter fundamentalista, amparada em recursos analógicos geométricos.

Vale ressaltar a importância dada às técnicas de resolução, com destaque para cálculos algébricos. Notificamos o uso de grande quantidade de atividades sobre cálculo numérico e algébrico, com ênfase na apresentação de regras e procedimentos algébricos e, ainda, a transcrição da linguagem retórica para a linguagem simbólica.



2 Represente como expressão algébrica:

a) a soma do cubo do número **m** com o triplo do número **n**.
b) a soma dos quadrados de **p** e **q**.
c) o complemento do ângulo β.
d) o perímetro do retângulo de base **b** e altura **h**.
e) a área do quadrado de lado **k**.
f) a diferença entre o quadrado e a metade do número **y**.

3 Sabemos que a área da superfície quadrada e retangular é dada por:

$A_R = B \,.\, h$

$A_q = B \,.\, h$

$A_q = \ell \,.\, \ell = \ell^2$

Figura 17: Exercícios utilizados para cálculo algébrico.
Fonte: Matemática 8º ano (SISTEMA DE ENSINO CNEC, 2013, p. 89).

No que diz respeito à concepção de relação funcional entre duas grandezas, percebemos que as situações apresentadas poderiam ter sido usadas para a exploração da variação de determinada grandeza em função de outra, o que, pela nossa observação, não aconteceu.

Na sala de aula, ao nível do 8º ano, o livro deveria ser um instrumento de mediação com o objetivo principal de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, por meio da apropriação dos conceitos científicos. Não percebemos uma preocupação dos autores na condução de um processo de construção da linguagem algébrica e do pensamento algébrico de forma dialética. Os autores dessas duas obras enfatizaram o uso da linguagem algébrica.

Sintetizando os aspectos estudados, os materiais analisados, PCN, plano de ensino e os livros, pudemos constatar que há coerência entre eles, no que se refere à lógica de construção do conhecimento algébrico – a ênfase nas analogias, na generalização empírica, na qual se busca a compreensão de conceitos por meio de casos particulares.

No próximo capítulo, com base nos referenciais teóricos apresentados, apresentamos o local, os sujeitos da pesquisa e os resultados do experimento realizado.

CAPÍTULO 3

A TRAJETÓRIA METODOLÓGICA: A ESCOLA, OS ALUNOS, AS ATIVIDADES

Neste capítulo descrevemos a trajetória metodológica, no que se refere à pesquisa de campo, ao planejamento das atividades, à definição das unidades de análise; caracterizamos os sujeitos da pesquisa e a escola, analisamos os dados registrados por meio da observação.

Esta pesquisa pautou-se na análise dos fatos ocorridos nas ações observadas, portanto, é de cunho qualitativo - a construção do objeto ocorreu nas relações sociais e científicas do pesquisador com o seu contexto de pesquisa, primeiro externamente e, depois, internamente. Neste sentido, como afirma Vigotski (1996, p. 375), “a análise é a aplicação do método empregado e a avaliação do significado dos fenômenos obtidos”.

Após a pesquisa bibliográfica e a documental e a aprovação do protocolo de pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisa (Apêndice A), demos início à pesquisa de campo. Apresentamos a seguir a escola, lócus da pesquisa, os participantes do estudo e as observações realizadas inicialmente.

3.1 A escola pesquisada e os participantes do estudo

A instituição escolhida para realizar o experimento didático foi a Escola Municipal Uberaba. Ela está situada na Praça Estevam Pucci nº 288, no Bairro Fabrício, na cidade de Uberaba-MG. Foi fundada em 3 de julho de 1944 e municipalizada pela Resolução do Município nº 7.177, de 05 de fevereiro de 1994. Atende alunos do 1º ao 9° anos do Ensino Fundamental e, em 2014, funcionava com 85 turmas, 1.347 alunos, sendo 723 no período matutino e 624 no vespertino. A Escola Municipal Uberaba é constituída por dois prédios, que estão em ótimas condições de acomodações e instalações.

Possui cinco turmas do 8ª ano e uma foi escolhida em comum acordo com a supervisora, a professora regente e a pesquisadora. O experimento foi desenvolvido no turno matutino e no horário em que os alunos normalmente frequentam a escola.

A Escola Municipal Uberaba foi escolhida de forma intencional, por facilidade de acesso pelo fato de a pesquisadora já ter aí trabalhado por quase quatro anos. Houve uma interação positiva em todas as fases entre a pesquisadora, a professora e os alunos.

Para conhecermos os sujeitos da pesquisa, ficamos durante um mês observando a sala de aula. Em seguida, aplicamos uma avaliação diagnóstica (Apêndice C) com o intuito de verificar o conhecimento dos alunos sobre assuntos de álgebra, para elaborar as atividades e aplicá-las posteriormente.

Dos 26 alunos, 20 trouxeram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Anexo) assinado e, desses, dois não assentiram em participar da pesquisa. Na aplicação das atividades, organizamos a sala em seis grupos, com três a quatro elementos em cada, conforme a professora orientou. Os alunos mais próximos ou com mais afinidade foram se agrupando, e foi formado um grupo só com aqueles que não concordaram em participar ou não trouxeram o TCLE, cujos dados foram desconsiderados para análise.

A turma escolhida do 8ª ano tem 26 alunos, que se apresentaram bem envolvidos durante a observação e a realização das atividades. Os alunos têm uma relação de respeito entre si e com a professora regente da sala. Essa turma possui 15 meninas e 11 meninos, com idade em torno de 12 a 16 anos. Todos esses alunos estão na adolescência, o que nos levou a buscar elementos para compreender essa fase da vida, que é repleta de indagações, ilusões e emoções.

3.2 Etapa da adolescência

A partir do momento em que o ser humano é concebido, passa por uma série de fases com características distintas e, ao longo do tempo, vai se formando e é transformado, pelas influências da sociedade e pelas regras vivenciadas.

Em qualquer processo de formação, é necessário conhecer a característica do aluno, especialmente a etapa de desenvolvimento em que ele se encontra: infância, adolescência ou fase adulta, pois a aprendizagem é um processo evolutivo que tem relações especiais com o desenvolvimento. É importante perceber o aprendizado, a interação, o desenvolvimento e a transição de um nível para outro, e a Teoria Histórico-Cultural contribui para essa compreensão. Recorremos para essa caracterização a Bock (2004), Dominguez (1990), Vigotski (2001), Bernardes (2012) e Facci (2004).

Como o foco da nossa pesquisa são alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 12 e 16 anos, julgamos importante caracterizar a adolescência, que corresponde a essa fase. A adolescência é considerada como um divisor de águas: ocorre a transição da fase infantil para a puberdade e há três mudanças importantes: a do organismo, a sexual e a social.

O processo educativo não pode ignorar a idade que o aluno tem. As alterações que ocorrem na adolescência incidem no processo ensino-aprendizagem, devido ao fato de ser uma fase na qual notamos a transformação do corpo, o despertar pelo interesse sexual e a consolidação da estrutura psíquica, em que há o desequilíbrio entre o pensamento e o sentimento. O processo do desenvolvimento do adolescente depende de alguns fatores, entre eles a maturação e a experiência de aquisição, ou seja, a aprendizagem. A maturação corresponde à evolução biológica e à psíquica. Entretanto, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural é preciso compreendê-la em seu processo social, não de uma maneira naturalizada, como nos alerta Bock (2004).

A adolescência é uma fase crítica da vida, caracterizada por mudanças rápidas no comportamento emocional, intelectual, sexual e social. É um período de transição entre a infância e a idade adulta, em que as alterações do corpo e da personalidade geram conflito diário com os familiares e a sociedade. Segundo Dominguez (1990), a adolescência é caracterizada por alterações biológicas significativas que afetam o desenvolvimento psicológico do indivíduo e tais alterações estão relacionadas com a imagem corporal e a valorização que o sujeito recebe na comunicação, nos relacionamentos com adultos e colegas. Então, as mudanças psicológicas nessa fase estão relacionadas aos processos biológicos da puberdade e o adolescente se sente desconectado em relação à família, às normas sociais, mas também são mudanças constituídas a partir das relações sociais estabelecidas na sociedade em que vivemos.

Para Vigotski (2001), cada idade psicológica se baseia na situação social do desenvolvimento. Defende que a aprendizagem influencia o desenvolvimento e existe uma relação dialética entre eles. A passagem e a duração da adolescência variam significativamente, dependendo do nível do desenvolvimento social. Portanto, o desenvolvimento mental e a situação social do adolescente são características essenciais do momento histórico em que ele está inserido.

Existem muitos elementos identificados nessa fase, como a dificuldade de relacionamento com os adultos - notam-se os conflitos gerados em família e na escola. Surge também a característica de autoconfiança, por meio da qual o indivíduo se acha dono de si, começa a se sentir um adulto, procura fumar, beber, deseja vestir roupas da moda e namorar. Segundo Elkonin, citado por Bernardes (2012, p. 54), identifica-se um novo estágio do desenvolvimento, "com a chegada da adolescência, a presença de uma nova atividade principal - *comunicação íntima pessoal* – caracterizada por reproduzir entre os colegas as relações estabelecidas entre os adultos".

A escola é um importante lugar onde o adolescente desenvolve sua atenção, sua memória, seu pensamento, os processos cognitivos e a formação da sua personalidade. Nessa fase ocorrem mudanças significativas na sua capacidade de pensamento abstrato, que começa a ser construído. Inicia-se, então, a formação de um pensamento ativo, independente e criativo, pois:

> [...] o pensamento do adolescente assume dimensões mais amplas, sendo possível a caracterização do pensamento abstrato, conforme afirma Vigotski (1996, v4). Facci (2004, p. 71) considera que neste período "o pensamento do jovem converte-se em convicção íntima, em orientações dos seus interesses, em normas de conduta, em sentido ético, em desejos e seus propósitos". (BERNARDES, 2012, p. 55).

A adolescência é uma fase muito significativa no processo de construção de personalidade. Nela, o indivíduo busca compreender a realidade, compreender os outros e compreender a si mesmo. Desse modo irá desenvolver o seu caráter, uma descoberta do seu mundo interior. Está iniciando a formação do autoconhecimento no sentido de enriquecimento, aprofundamento, de reavaliação e mudanças de seus valores e capacidades.

A atividade de aprendizagem nessa etapa torna-se mais aguçada ao desenvolvimento da forma teórica do pensamento, um senso de responsabilidade; o desenvolvimento do pensamento faz aflorar o conhecimento científico. O professor deve compreender a coerência entre o ensinar e a formação do conceito nessa fase, observando o processo pelo qual passa seu aluno, em função do desenvolvimento sociocultural, que abrange tanto o conteúdo quanto a forma de pensar do adolescente. O pensamento por conceito permite ao jovem o desenvolvimento da consciência social, pois ele internaliza os conceitos científicos, artísticos e as normas de conduta, em sentido ético. O pensamento abstrato se desenvolve, permitindo-lhe compreender a realidade, as pessoas e a si mesmo (FACCI, 2004).

Nessa fase é importante observar a visão de mundo como um suporte para o desenvolvimento da vida, embora o sentido da sua existência seja o caminho ou estratégia para encontrar esse lugar. É importante elaborar estratégias para agir no presente e que haja contribuição para construção dos objetivos do seu futuro. A concepção que ele possui do mundo é um sistema de opinião, juízos e valores que determinam o papel do homem na sociedade e em seu próprio lugar como sujeito histórico e social.

> Por meio da comunicação pessoal com seus iguais, o adolescente forma os pontos de vista gerais sobre o mundo, sobre as relações entre as pessoas, sobre o próprio futuro e estrutura-se o sentido pessoal da vida. Esse

> comportamento em grupo ainda dá origem a novas tarefas e motivos de atividade dirigida ao futuro, e adquire o caráter de *atividade profissional/de estudo.* (FACCI, 2004, p. 71, grifos do original).

Nesse sentido, constata-se que os sistemas econômicos e sociais vigentes provocaram mudanças no modo de ser e de viver do adolescente na sociedade do século XXI, em que a entrada de muitos jovens no mercado de trabalho foi retardada (BOCK, 2004).

Tal fato acarreta mudanças, pois o adolescente tem também como atividade, embora não seja a principal, a atividade de estudo, visando à preparação profissional. Esse retardamento do ingresso no mercado de trabalho não é uma necessidade do seu desenvolvimento, mas consequência das circunstâncias das relações sociais e econômicas do mundo hoje, que exige mais preparação do jovem e a preservação do emprego para os adultos em função do desemprego crônico, como discute Bock (2004). Isso traz insegurança ao jovem com relação ao que pretende ser e fazer.

O problema maior para ele, nessa faixa etária, é o sentido da vida. Inicia uma reflexão interna, que se realiza e se expressa apenas na atividade do sujeito e do sistema de inter-relação com aqueles que estão ao seu lado. O adolescente dá início à formação de uma concepção teórica e filosófica da realidade, com base na evolução do seu desenvolvimento.

Assim, a adolescência é uma etapa que marca a transição da infância para a idade adulta e uma manifestação do processo que continua ao longo do seu desenvolvimento, a capacidade de o indivíduo agir com independência relativa das influências externas, para orientar seu comportamento de forma consciente e estável.

Essa caracterização da idade foi importante para compreender os modos de agir dos adolescentes em sala, na relação com os adultos e com os colegas, como também nas formas de se envolverem com as atividades propostas.

3.3 A fase de observação e de diagnóstico

A fase de observação, uma das etapas do experimento didático, foi realizada no período de 16 de junho a 8 de agosto de 2014, no 8ª ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Uberaba, conforme anunciamos. Nesse período, a professora regente iniciou os estudos algébricos propriamente ditos.

Elencamos três aspectos para a análise, que foram elaborados a partir da definição do marco teórico da pesquisa, desse momento de observação: o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, o desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos, e o desenvolvimento de capacidades psíquicas superiores.

Quanto ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, observamos: atividade mediadora utilizando instrumentos e signos, conteúdos, organização do estudo e ainda a interação entre professor-aluno, aluno-professor, professor-conteúdo, aluno-conteúdo, aluno-aluno.

Durante esse período, a professora iniciou o estudo sobre as operações entre os polinômios e, para desenvolvimento dessas aulas, utilizou um material xerocopiado e o livro didático. Ministrou as aulas de forma organizada, explanando o conteúdo de forma clara e sensata. Apresentava domínio de conteúdo e, com relação aos alunos, era sempre cordial, tratando-os de forma carinhosa e sempre se preocupando com eles, criando condições para se motivarem e participarem da aula.

Em umas das aulas observadas, a professora regente preparou para os alunos uma lista com vinte exercícios enfocando o assunto de operação entre os polinômios. No decorrer das aulas, notamos que alguns alunos estavam interessados em participar; outros, aqueles que sentavam no fundo, não tinham interesse em resolver e nem participar das atividades em sala. Então, como a segunda categoria de análise refere-se ao desenvolvimento da motivação e à participação dos alunos, certas atividades podem desencadear situações que provocam a motivação dos alunos, estimulando-os a assimilar os conceitos e procedimentos e assim desenvolver a aprendizagem, enquanto outras, não.

Quanto ao desenvolvimento de capacidades psíquicas superiores, isto é, controle consciente do comportamento, atenção e memória voluntária, memorização ativa, pensamento abstrato, raciocínio dedutivo, capacidade de planejamento, durante a observação percebemos o quanto a prática de ensino está centrada na transmissão de conceitos prontos, mediante atividades de memorização e reprodução de conhecimentos que colaboram pouco para o desenvolvimento psíquico do aluno. As metodologias mais utilizadas pela professora regente da sala de aula foram as aulas expositivas dialogadas, atividades em duplas, listas de exercícios.

Observamos que o aluno utiliza as ferramentas operatórias, mas não compreende o porquê da sua utilização. Pode-se entender que o aluno faz uso dos conceitos, mas não consegue esclarecer as razões de sua utilização, portanto, não se pode afirmar que tenha o conceito formado. Segundo Vigotski (2009, p. 246), “[...] o conceito é mais do que a soma de certos vínculos associativos formados pela memória, é mais do que um simples hábito mental;

é um ato real e complexo do pensamento que não pode ser aprendido por meio de simples memorização [...]".

Nessa fase, ainda, realizamos uma avaliação diagnóstica para sondar o que é álgebra para os alunos e como lidam com alguns conteúdos já trabalhados. Utilizamos um instrumento que se encontra no Apêndice D. No dia da aplicação da avaliação, dos 26 alunos, somente 23 estavam presentes.

Uma das perguntas era relacionada à idade. Pudemos constatar que variava entre 12 anos e 16 anos, com a maioria (65%) na faixa de 13 anos, portanto, na adolescência (Gráfico 1).

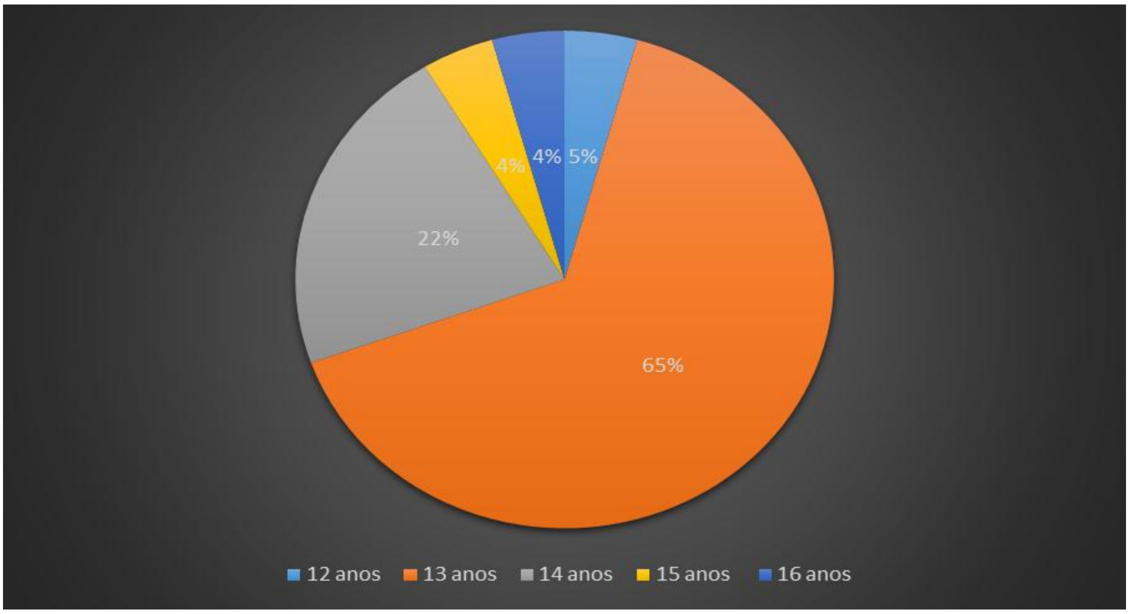


Gráfico 1: Idade dos alunos da turma de 8º ano pesquisada, da Escola Municipal Uberaba - 2014.
Fonte: Elaboração da autora (2015), a partir do questionário aplicado em sala.

Quando perguntados se gostam de matemática, 10 alunos (43%) disseram que sim e 13 (57%), que não gostam. Todos responderam que estudaram álgebra. Mas em relação à pergunta "O que estudaram em álgebra?", 87% dos alunos responderam que não sabiam o que já estudaram e somente 13% sabiam o que haviam estudado.

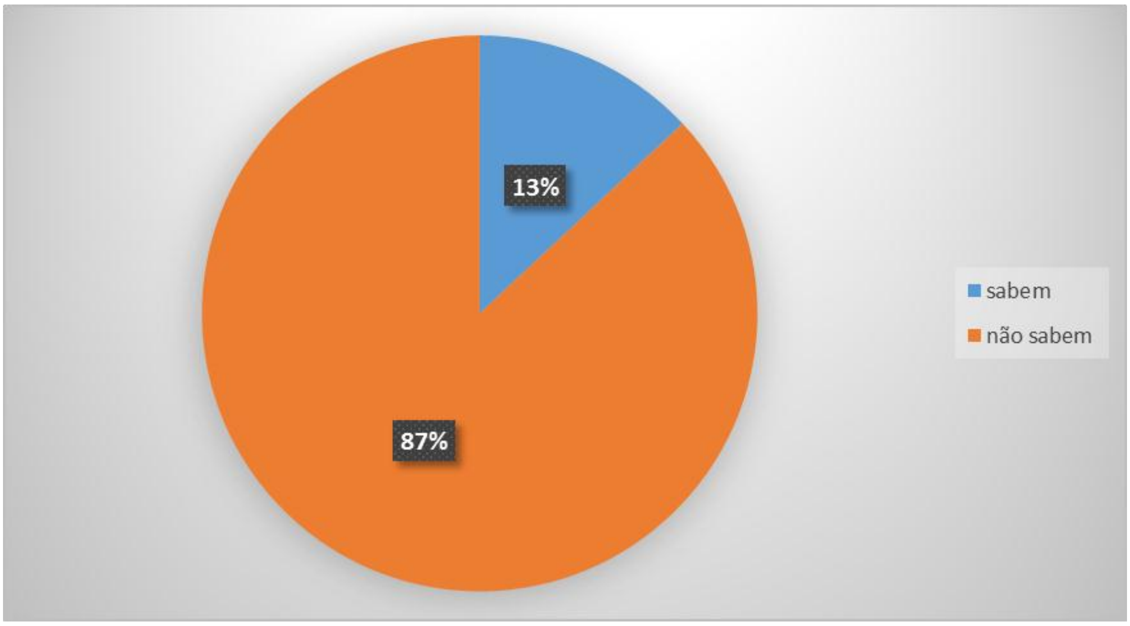


Gráfico 2: Respostas dos alunos da turma pesquisada à questão “O que estudaram em álgebra?”.
Fonte: Elaboração da autora (2015), a partir do questionário aplicado.

A pergunta sobre o que é álgebra provocou um rebuliço na sala de aula, com os alunos questionando a pesquisadora e a professora regente: “*Álgebra, o que é isso? Álgebra, como assim? Eu sei resolver os exercícios, mas não sei explicar o que é...*”.

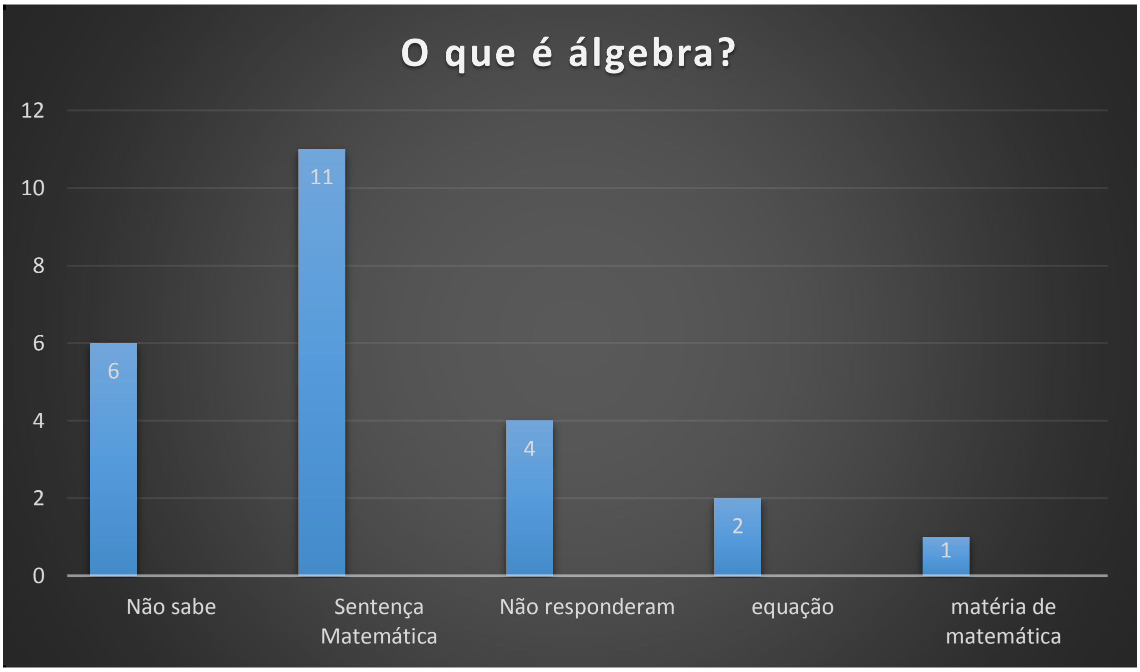


Gráfico 3: Respostas dos alunos da turma pesquisada à questão “O que é álgebra?”.
Fonte: Elaboração da autora (2015), a partir do questionário.

Alguns alunos reportaram-se ao estudo de equações quando se aborda o seu conceito como uma sentença matemática.

Desta forma, percebemos que os alunos, embora tenham, em algum momento, se deparado com a palavra "álgebra", na fala da professora ou nos textos, ela não tem significado para eles. É uma palavra vazia, ainda que saibamos que tem várias concepções. Realizam as atividades algébricas, ou melhor, resolvem exercícios de cálculo algébrico, sem se darem conta de que estão trabalhando num outro campo de significados, diferente da aritmética e da geometria.

A quinta questão se referia aos conteúdos de álgebra já estudados por eles (Gráfico 4).

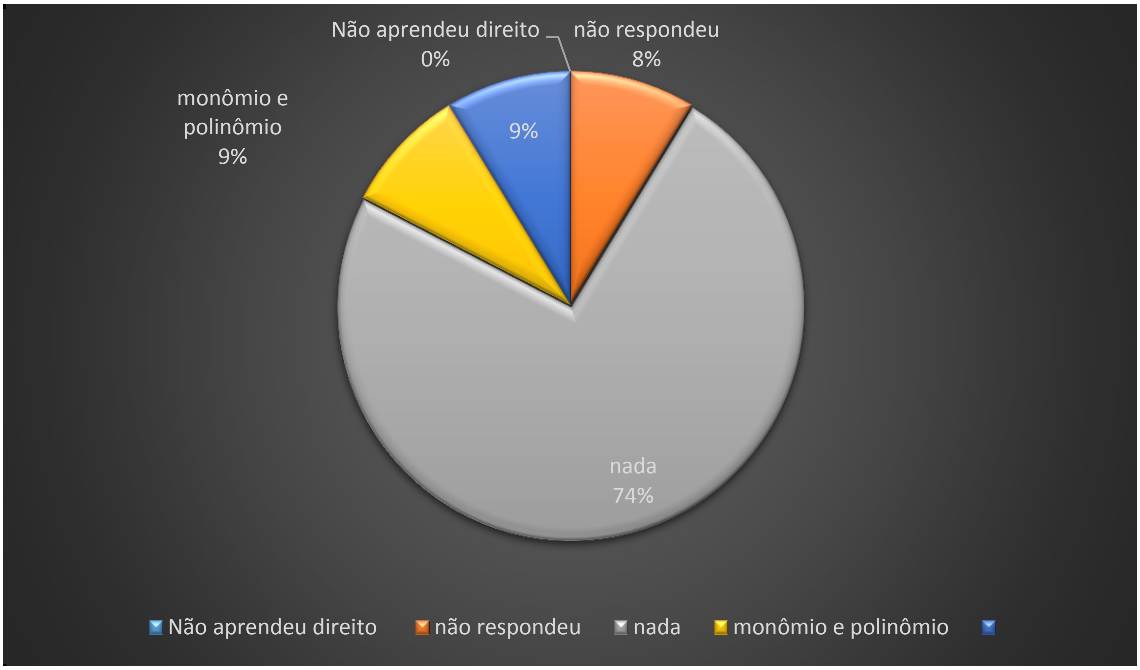


Gráfico 4: Respostas dos alunos em relação aos conteúdos de álgebra já estudados.
Fonte: Elaboração da autora (2015), a partir do questionário.

Verificamos que 74% dos alunos não souberam responder ou responderam "nada", apenas dois se referiram a monômios e polinômios, conteúdos que estavam sendo estudados. Essa resposta reforça o que dissemos em relação à questão anterior – a palavra "álgebra" é uma palavra vazia de significado, mesmo que apareça qualificando os conteúdos, como em "cálculos algébricos" ou "expressões algébricas".

Quando perguntados se estudaram o tema "equação", todos os alunos disseram que sim. Essa resposta mostra que os alunos não compreendem as equações como objeto de estudo da álgebra, aliás, o objeto da álgebra clássica. Evidencia, ainda, que o lógico-histórico não se faz presente no ensino da matemática, especificamente, no ensino da álgebra. Os elementos históricos aparecem nos livros didáticos como ilustrações, e não como nexos importantes dos conceitos e dos procedimentos.

Em seguida, perguntamos o que é equação (Gráfico 5).

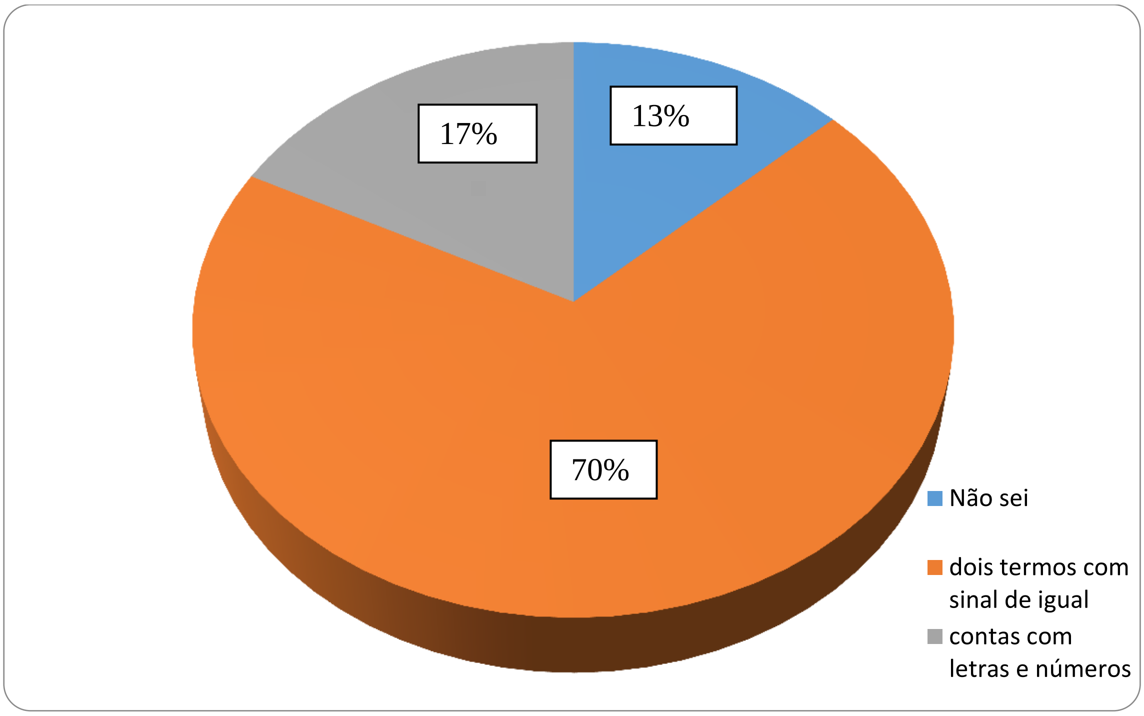


Gráfico 5: Respostas dos alunos da turma pesquisada em relação a “O que é uma equação?”.
Fonte: Elaboração da autora (2015), a partir do questionário.

Respostas dos alunos da turma pesquisada em relação a o que é uma equação.

Observamos que a maioria (70%) responde que são “dois termos com sinal de igual”, ou “conta com letras e números”; para 17%, o que mostra que os alunos se prendem aos nexos externos, àquilo que eles veem, porém, a resposta não evidencia a sua apreensão como importante ferramenta algébrica para a resolução de problemas.

E quanto às questões de aplicação do conceito de polinômios a uma situação geométrica, envolvendo a expressão do perímetro de duas figuras planas, verificamos que apenas 30% conseguiram expressar o perímetro da primeira figura dada, por meio de um polinômio, sendo que 57% nem tentaram responder. Na outra questão, por envolver apenas uma variável, o número de respostas corretas foi de 42%. Cabe considerar que o conceito de perímetro estava no enunciado da questão, o pensamento e a linguagem algébrica é que ofereceram dificuldades aos alunos.

As duas últimas questões que envolviam a apropriação de propriedades das igualdades, portanto, um conhecimento mais abstrato, nenhum aluno conseguiu fazer.

A avaliação diagnóstica permitiu observar que o ensino de álgebra para esses alunos é pobre de significados, está focado nos aspectos externos dos conteúdos estudados. O pensamento e a linguagem algébrica estão num estágio elementar de desenvolvimento, vazios de significados, provavelmente em decorrência da forma mecânica, por meio de regras e técnicas, com que são ensinados.

3.4 As atividades de ensino e o seu planejamento

A partir do referencial teórico, das observações das aulas e da avaliação diagnóstica, elaboramos as atividades de ensino. "O que distingue uma atividade de outra é o objeto da atividade [...] que confere a ela determinada direção." (LEONTIEV, 1983, p. 83). Essas atividades de ensino devem promover e motivar os alunos para as atividades de aprendizagem. Das atividades aplicadas, algumas foram criadas pela pesquisadora, outras foram copiadas e ou adaptadas de livro didático.

Para organizar o ensino é necessário um planejamento - ele se torna um elemento indispensável para organizar as ações. O planejamento orienta a tomada de decisão do professor e norteia tanto o ensino quanto a aprendizagem. De acordo com a proposta de Libâneo (1994, p. 222), "a ação de planejar não se reduz ao simples preenchimento de formulários para controles administrativos; é, antes, a atividade consciente de previsão das ações docentes, fundamentadas em opções político-pedagógicas [...]".

Para Sforni (2015), após a análise do conceito nos seus aspectos lógico-históricos, segue-se a elaboração de problemas que o aluno deverá resolver por meio da mediação do conceito, devendo ser incluídos novos problemas para verificar se os alunos operam mentalmente com o conceito. Segue o Quadro 3 com o planejamento das atividades para o desenvolvimento do conceito de polinômio, explorando situações ligadas às diferentes concepções de álgebra, a partir das quais os alunos poderiam construir significados para os polinômios, desenvolvendo o pensamento e a linguagem algébrica.

<table>
<tr><th colspan="3">PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES</th></tr>
<tr><td colspan="3">PRIMEIRA ATIVIDADE
Objetivo geral: Compreender a necessidade de se estabelecer uma linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><th>Conteúdo</th><th>Objetivo específico</th><th>Proposta de ação</th></tr>
<tr><td>3/10/2014
História da linguagem algébrica: linguagem retórica;
linguagem sincopada;
linguagem simbólica</td><td>Compreender a passagem da linguagem retórica para a sincopada e da sincopada para a simbólica, a partir da evolução do pensamento algébrico e da necessidade do homem de uma linguagem mais sintética.</td><td>Fizemos uso de uma história em quadrinhos, na busca de gerar situações nas quais os alunos pudessem atribuir significado à álgebra e à linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">SEGUNDA ATIVIDADE
Objetivo geral: Apropriar-se do significado de polinômios, a partir de uma situação de álgebra como aritmética generalizada.</td></tr>
<tr><th>Conteúdo</th><th>Objetivo específico</th><th>Proposta de ação</th></tr>
<tr><td>10/10/2014 e 24/10/2014
Quebra-cabeça
Área e perímetro
Valor numérico
Operação entre polinômios</td><td>Buscar indícios da apropriação de significados de polinômios por meio de uma situação de aritmética generalizada.</td><td>Utilizamos um quebra-cabeça para desenvolver o pensamento e a linguagem relacionados ao conceito de polinômios.</td></tr>
<tr><td colspan="3">TERCEIRA ATIVIDADE
Objetivo geral: Apropriar-se do significado de polinômios, a partir de situações envolvendo a resolução de problemas, por meio de equações.</td></tr>
<tr><th>Conteúdo</th><th>Objetivo específico</th><th>Proposta de ação</th></tr>
<tr><td>14/11/2014
Resolução de problemas
Polinômios e equações</td><td>Buscar indícios da apropriação de significados de polinômios, a partir da resolução de problemas, envolvendo equações.</td><td>Apresentamos situações-problema para serem resolvidas, por meio de equações, desencadeando o pensamento e a linguagem algébrica.</td></tr>
<tr><td colspan="3">QUARTA ATIVIDADE
Objetivo geral: Apropriar-se do significado de polinômios, a partir de situações que envolvem relação entre duas grandezas.</td></tr>
</table>

Quadro 3: Planejamento das atividades desenvolvidas na Escola Municipal Uberaba – 8º ano – 2014 (continua).

<table>
<tr><th>Conteúdo</th><th>Objetivo específico</th><th>Proposta de ação</th></tr>
<tr><td>28/11/2014

Kmplot[11]
Relação entre duas grandezas</td><td>Compreender a ideia de variável por meio da percepção da relação de dependência entre duas grandezas.

Buscar indícios da apropriação de significados de polinômios, a partir da relação entre duas grandezas, fazendo uso também de um software.</td><td>Apresentar situações que envolvem relações entre duas grandezas e que podem ser expressas por um polinômio.</td></tr>
<tr><td colspan="3">QUINTA ATIVIDADE
Objetivo geral: Apropriar-se do significado de polinômios, a partir de situações que envolvem a generalização de padrões.</td></tr>
<tr><td>Conteúdo</td><td>Objetivo específico</td><td>Proposta de ação</td></tr>
<tr><td>01/12/2014

Generalização de padrões</td><td>Buscar indícios da apropriação de significados de polinômios, a partir da generalização de padrões.</td><td>Demonstrar, por meio de figuras geométricas com padrões definidos, o desenvolvimento algébrico.</td></tr>
</table>

Quadro 3: Planejamento das atividades desenvolvidas na Escola Municipal Uberaba – 8º ano – 2014 (conclusão).
Fonte: Elaboração da autora (2015).

As atividades foram entregues aos alunos em folhas xerocopiadas; as peças do quebra-cabeça foram confeccionadas em EVA[12] e entregues a cada grupo; as atividades com o *software KmPlot* foram desenvolvidas no laboratório de informática da escola.

No decorrer do desenvolvimento das atividades, exercemos um papel de protagonista da interação entre os sujeitos da pesquisa e o conhecimento que estaria sendo construído.

A coleta de dados foi realizada por meio de observações, registros de atividades, gravações de áudio e videogravações das atividades de ensino. Os encontros contaram com a participação de três alunos de Iniciação Científica, ligados ao projeto OBEDUC: Vinicius, que fez as filmagens, e duas alunas do curso de Psicologia, Erika e Florença, as quais tinham como objetivo observar e analisar os alunos, verificando como os adolescentes se envolviam com as atividades de estudo.

---

[11] *KmPlot* faz parte de programa educacional, *KDEEduc*. Este programa desenha gráficos e funções. *Link:* <https://edu.kde.org/kmplot/>.

[12] EVA – vem de um nome em inglês, *Espuma Vinílica Acetinada*, que significa o composto formado por Etileno Acetato de Vinila.

Durante a realização das atividades, sempre procuramos oportunizar a discussão dos alunos, suas justificativas e argumentações. Segundo Leontiev (1983), a atividade consiste de um conjunto de ações para alcançar um objetivo.

Como salientam Rigon, Asbahr e Moretti (2010, p. 24),

> [...] o objetivo da atividade pedagógica é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes. Por meio dessa atividade - teórica e prática – é que se materializa a necessidade humana de se apropriar dos bens culturais como forma de constituição humana.

Assim, houve sempre o esclarecimento das dúvidas em relação ao conteúdo, a fim de ter um ambiente de aprendizagem que fosse harmonizador, motivador e enriquecedor.

3.5 A análise do material coletado

Desenvolvemos a análise considerando o problema investigado, os objetivos do estudo, procurando estabelecer relações entre o referencial teórico e o material empírico reunido, de maneira a interpretá-lo com mais coerência. Assim, buscamos identificar os indícios de apropriação dos significados de polinômios.

Na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, com a composição das unidades de análise, procuramos explicar o pensamento humano, a partir dos indícios externos. Para Vigotski (1996, p. 375), "explicar significa estabelecer uma conexão entre vários fatos ou grupos de fatos [...] A análise é a aplicação do método empregado e a avaliação do significado dos fenômenos obtidos". A análise é o componente que geralmente permite a elucidação do caráter geral de uma determinada situação real.

Segundo Rigon, Asbahr e Moretti (2010, p. 41), faz-se a "[...] análise científica para pôr a nu as diferenças internas escolhidas pelas similaridades externas". As unidades de análise estabelecidas nesta investigação estão constituídas na relação entre a teoria que nos serviu de sustentação e os dados de pesquisa.

O processo de ensino-aprendizagem é um processo único e nele é fundamental a presença de dois atores: o professor e o aluno. As ações necessitam promover no aprendiz as condições para que haja uma melhora nos resultados e no procedimento de assimilação. O professor é incumbido da sua organização, mas os alunos deverão se apropriar delas, para que se constituam em atividades de estudo.

As unidades de análise desta investigação foram estabelecidas *a priori*, de acordo com as concepções de Davidov e Márkova (1987), com base nas ações propostas e nas realizadas pelo aluno. Lembrando que a ação é a unidade da atividade humana que contém todas as características essenciais da psique humana, ou seja, e a menor unidade que inclui todos os elementos da atividade; o aluno deve compreender o que estuda e este estudo deve levá-lo a dominar a relação generalizada do conhecimento, para assim dominar novos procedimentos. Deste modo, estabelecemos as seguintes unidades de análise para as atividades:

1) *Condições objetivas* para a realização das atividades: incluindo os elementos mediadores; a motivação dos alunos; a apropriação, pelos alunos, da atividade, isto é, como os alunos se tornaram sujeitos da atividade; a compreensão da tarefa de estudo pelos alunos; a interação.
2) *Significados apropriados pelos alunos*, ou seja, as ações de estudo, como os alunos se apropriaram dos elementos caracterizadores do significado e do sentido de polinômios em cada situação – a ideia de variável, a ideia de variação, de instrumento para a resolução de problemas; a forma como os alunos realizam a passagem do modelo geral aos casos particulares e vice-versa; o uso da linguagem algébrica como forma de expressar essas significações.
3) As ações de controle e autoavaliação, que dizem respeito às ações dos próprios alunos na condução da atividade, na correção de rumos, na discussão em busca da realização da atividade.

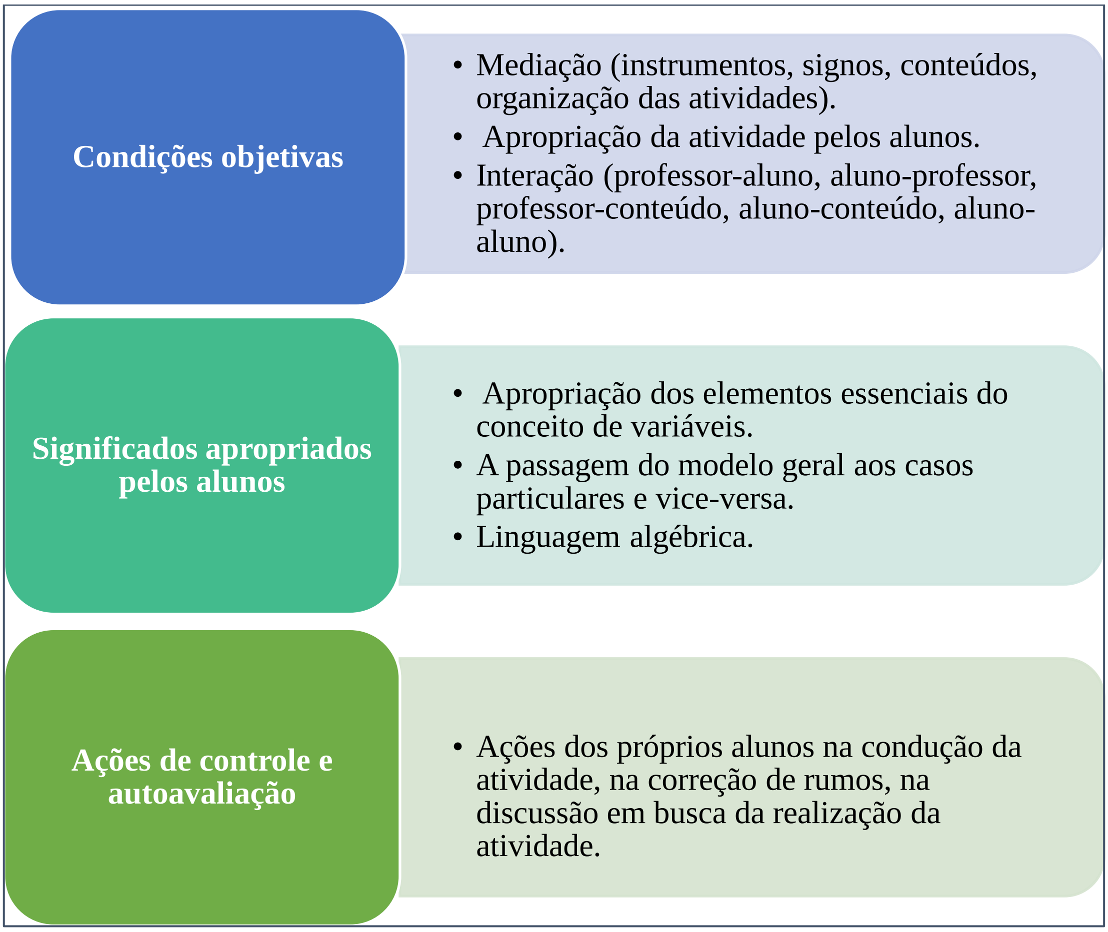


Figura 18: Síntese das unidades de análise das atividades.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Após a transcrição das gravações e leituras do material, procuramos identificar episódios de ensino que demonstrassem a interação de ações entre os sujeitos envolvidos. Podemos compreender os episódios “como aqueles momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem do novo conceito.” (MOURA, 1992, p. 77).

O episódio é constituído pelas situações em sala de aula que permitem compreender a organização, a sequência e o desenvolvimento das atividades de ensino adotadas pela pesquisadora, bem como o modo de comunicação que ocorre nas interações com os alunos. Segundo Moura (2004), os episódios de ensino são como ferramentas que estabelecem as ações que constituem e caracterizam as formas de organização de ensino.

No próximo capítulo, apresentamos os resultados e as análises de cada uma das atividades, de acordo com as unidades definidas, procurando dialogar com o referencial adotado.

CAPÍTULO 4

A ANÁLISE DAS ATIVIDADES: AS SIGNIFICAÇÕES CONSTRUÍDAS PELOS ALUNOS SOBRE POLINÔMIOS

O nosso pressuposto básico é de que os alunos vão à escola para se apropriar dos conhecimentos historicamente construídos pelo homem e, também, para internalizar os meios cognitivos de compreender e transformar o mundo. Nesta pesquisa, está em jogo a necessidade de o aluno apropriar-se dos significados de polinômio, refletindo internamente a atividade humana que se encontra objetivada nas concepções da linguagem e do pensamento algébricos na formação do conceito de polinômio.

4.1 Resultados e análises da primeira atividade: *História da Linguagem Algébrica*

Essa atividade foi elaborada para que o aluno sentisse a necessidade da apropriação da linguagem e do pensamento algébricos como algo construído historicamente. A forma mediadora escolhida foi uma história em quadrinhos (Apêndice E). A utilização da história no ensino de matemática justifica-se por vários fatos, um deles é que a história pode aumentar a motivação para a aprendizagem da matemática, segundo Mendes (2009), citando Fauvel (1991).

Utilizamos uma história com diálogos entre alunos e uma professora em sala de aula para apresentar a linguagem algébrica e suas modificações no decorrer do tempo. Nessa atividade, o conceito central é a linguagem algébrica, que ao longo da história sofreu modificações, atingindo níveis mais complexos de pensamento e de representação.

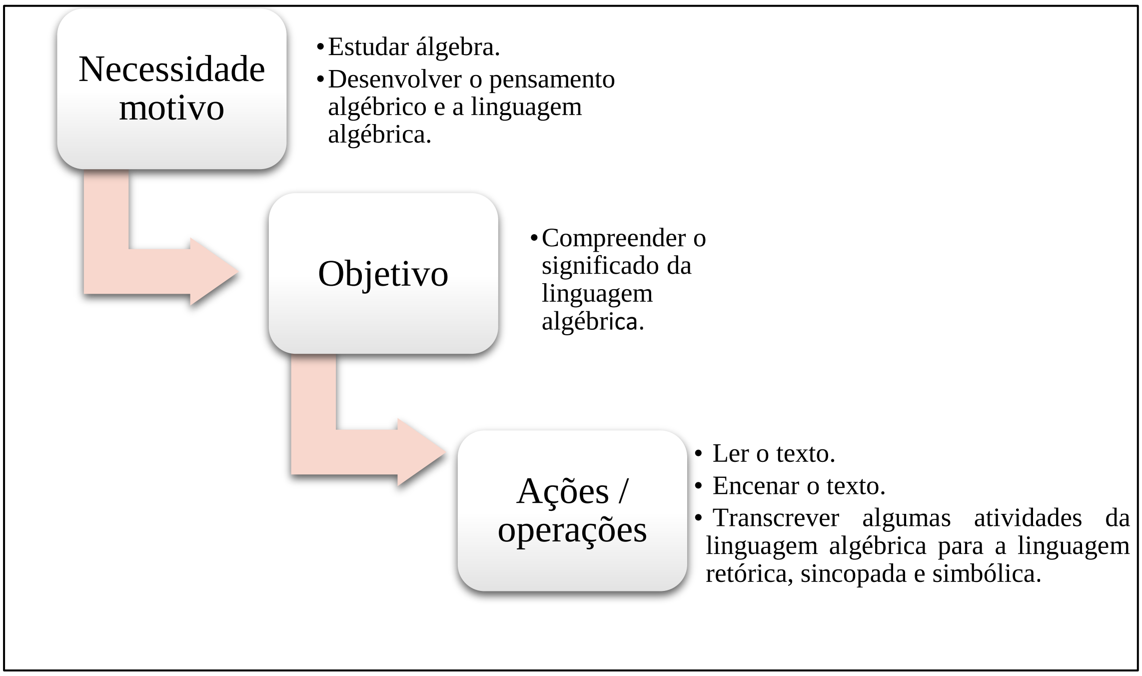


Figura 19: Esquema da atividade *História da Linguagem Algébrica*.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Esta atividade foi composta por três tarefas. Em cada uma delas, o aluno deveria transcrever a situação dada para uma linguagem diferente: a retórica, a sincopada ou a simbólica.

Condições objetivas

Ao entregar a história em quadrinhos para cada dois alunos da sala, a pesquisadora iniciou as orientações de como deveriam proceder para a realização da atividade, que seria feita em três momentos: a leitura da história individualmente, a encenação da história e a resolução das atividades propostas. Logo no início, deixou-nos intrigada a pergunta de um aluno: "*Professora, a atividade é difícil*?". Respondemos: "*Claro que não, espera para você ver*.", mas o aluno de novo falou por várias vezes: "*Mas é difícil?*". Essas palavras nos deixaram preocupada, pois demostravam que esse aluno manifestava um receio. Foi, então, que percebemos que tínhamos um desafio pela frente.

No primeiro instante, os alunos ficaram intrigados e agitados com a presença da filmadora e de um gravador que foi colocado em um grupo, próximo à mesa da professora.

Figura 20: Fragmento da história em quadrinhos *Linguagem da Álgebra.*
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Ao iniciar a primeira atividade proposta, os alunos se mostraram bem interessados e entusiasmados. As duplas receberam a *História da Linguagem Algébrica* e começaram a ler em silêncio e bem concentradas, o que nos despertou satisfação ao vê-las compenetrados na atividade. Essa situação mostrou que os alunos se apropriaram da atividade, demonstrando estarem motivados para a ação.

Figura 21: Foto dos alunos realizando a primeira atividade.
Fonte: Acervo da autora (2015).

Após a leitura, pedimos para que três alunos viessem à frente e fizessem a encenação da história lida. Vários alunos manifestaram vontade de participar, então escolhemos aleatoriamente três e eles executaram a ação proposta.

Depois da encenação, propusemos que alguém nos esclarecesse o significado da história. Alguns alunos levantaram a mão e explanaram situações da história da linguagem algébrica. Dialogamos sobre os significados apreendidos a respeito do desenvolvimento da linguagem algébrica. Logo após, entregamos a primeira folha de atividade, que chamamos de Tarefa 1, na qual havia uma situação-problema em que os alunos deveriam identificar o tipo de linguagem utilizada e, depois, traduzi-la para as outras duas. As tarefas foram elaboradas de modo que os alunos, tendo conhecimento do desenvolvimento da linguagem algébrica, objetivassem em modelos as conexões estabelecidas entre as diferentes formas de linguagem.

4.1.1 Análise das ações na Tarefa 1 da primeira atividade

1. No último Campeonato Brasileiro, o Corinthians marcou vários gols e o São Paulo, também. Quantos gols os dois times marcaram? Esse exemplo está na linguagem_________________________.
    a) Represente esse exemplo na linguagem sincopada:
    b) Represente esse exemplo na linguagem simbólica:

Significados apropriados pelos alunos

Na situação proposta, não foram dados valores numéricos, para que o aluno sentisse a necessidade de representação de um valor desconhecido, isto é, que não usasse o pensamento aritmético. A intenção era remeter para o pensamento algébrico, pois, como constatado por Panossian (2008, p. 149), "a resolução aritmética de uma situação-problema pode indicar que houve a compreensão da proposta, mas não garante a sua resolução algébrica".

Diálogo sobre a linguagem em que a situação foi expressa
Aluna B[13] - Não precisa entender de futebol. Não precisa para saber quantos gol ele fez. Ele [o exercício] só quer saber em qual linguagem está o exemplo de gols. Aluna AC - Não precisa entender de futebol para responder. Aluna B - E o resultado do time é simbólico. Aluna AC - Qual é que usa só palavras?

[13] Para preservar a identidade dos sujeitos, utilizamos um código constituído de letras maiúsculas do alfabeto.

Aluna B - Então, chama ela [a professora] para você ver. Aluno G - Professora, a linguagem é simbólica? Pesquisadora: Tem símbolos? Todos os alunos – Não. Pesquisadora - Não, então, como podemos chamar? Aluno G - Ah! Então, viu, C, é aquela... como se chama mesmo, sim... não, é retórica.
Análise: Indícios de apropriação da atividade e a interação entre alunos, alunos-pesquisadora. Percepção por parte dos alunos, fomentada pela fala da aluna B, de que não havia a necessidade de saber de futebol e conhecer os números.

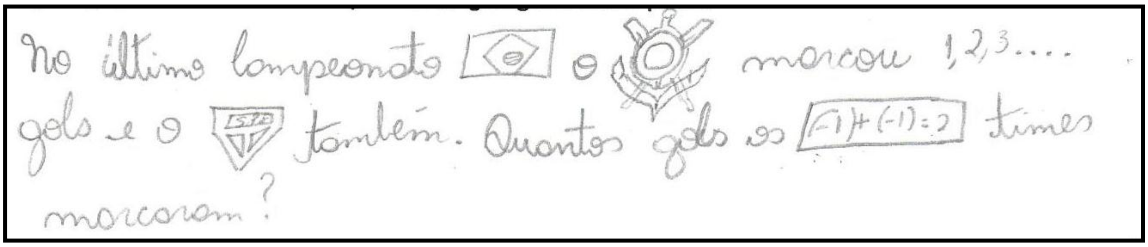
Os diálogos e as produções escritas apresentadas pelos alunos mostram indícios de apropriação da linguagem algébrica em suas diferentes formas, porém, ainda, atrelada aos aspectos externos. Os alunos B, AC e G manifestam suas opiniões. A aluna B salienta que, apesar de não entenderem de futebol, podem responder utilizando a linguagem simbólica por meio de signos quaisquer que representem o total de pontos de cada time. No momento da atividade houve a mediação da pesquisadora e dos alunos para conduzir a sua realização.

Nos diálogos constatamos a apropriação da atividade, e os alunos começam a incorporar elementos próprios do pensamento algébrico, percebendo a diferença entre as linguagens algébricas (sincopada, retórica e simbólica). A aluna AC percebe que essa situação não é uma situação real, portanto, o número de gols é desconhecido e qualquer, podendo ser representado genericamente.

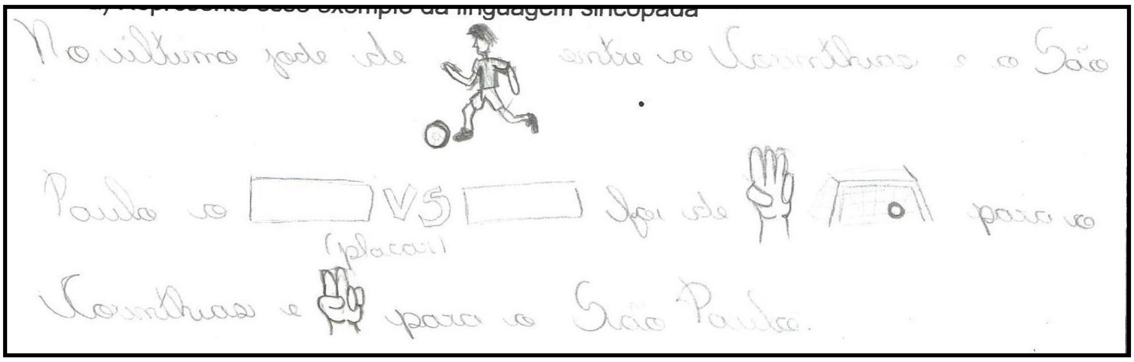
Diálogos sobre a transcrição para a linguagem sincopada
Aluno G - Não tem que descobrir quanto os dois times marcaram, não especificou quantos gols os dois times marcaram, os dois times marcaram, e não cada time, é ao todo. Quantos gols os dois times marcaram? São os dois times. Aluna AC - Os dois times? Os dois. Aluna B – Então... Aluno G - Não falou quantos gols cada time marcou, então x o quê? x^2? E essa é a sincopada. [...] Aluna AC - E nós vamos escrever uma palavra para representar. Qual vai ser a palavra para escrever x, não precisa escrever necessariamente nessas palavras [do texto].
Análise: Indícios de apreensão de significados empíricos pelos alunos.

Seguem as produções de alguns grupos, em relação à escrita na linguagem sincopada:

GRUPO 2



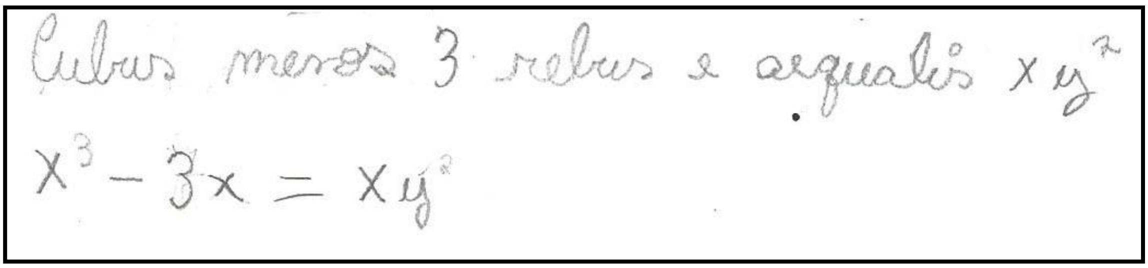
GRUPO 4



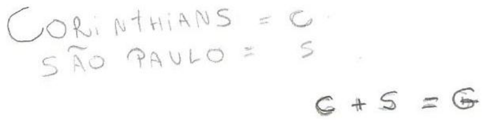
Esses dois grupos demostram ter compreendido que, na linguagem sincopada, usamos figuras, sinais para substituir as palavras. Embora alguns alunos tenham percebido que há um valor que não está determinado e, no diálogo, chegaram a pensar em usar x ou x^2, ao fazerem o seu registro usam números para indicar a quantidade de gols: 1, 2, 3... (Grupo 2); e os dedos da mão, mostrando quantidades, no caso do Grupo 4. Isso mostra o quanto estão ligados ao pensamento aritmético. O Grupo 2, ao colocar reticências após os números, demonstra perceber a ideia de variabilidade.

Já o Grupo 3 não atendeu ao solicitado, copiando a situação da história em quadrinhos. Possivelmente não atribuíram significado a esse tipo de linguagem.

GRUPO 3



Com relação à transcrição da situação para a linguagem simbólica, todos os grupos conseguiram realizar o solicitado, como se pode ver a seguir. Representaram as quantidades desconhecidas por letras, sendo letras diferentes para a quantidade de cada time e para o total, exceto o Grupo 5. Pode-se atribuir esse resultado ao fato de esses alunos já estarem familiarizados com essa linguagem.

 GRUPO 2	 GRUPO 4
 GRUPO 3	 GRUPO 1
 GRUPO 5	

Diálogo para a transcrição da situação na linguagem simbólica
AC – Por que é simbólica? Aluna B - A linguagem simbólica é 3 a 2, então vai ser simbólica. Aluno G - Porque é simbólica, tem um número de um lado é o sinal, então 3 a 2, represente esse exemplo na linguagem simbólica. Aluna AC – Por que é simbólica?! Aluno G - É diferente da palavra usada, diferente de escrever… Represente esse exemplo do primeiro. Aluno G - Não precisa, vamos fazer nessa linguagem aqui primeiro. [Repetiu, lendo a folha:] - *Cubus*... Então, coloca x^2. Aluna B - Mas porque x^2? Não tem que descobrir quanto os dois times marcaram, não especificou quantos gols os dois times marcaram, os dois times marcaram e não cada time é ao todo, quantos gols os dois times marcaram, são os dois times. Aluno G - Corinthians x e São Paulo, y. O Corinthians fez tanto x de gols e são Paulo fez tanto y de gols. Aluna AC - Pede qual resultado? Aluno G - A gente não sabe o resultado, então pode colocar outra letra para representar. E então vamos escrever!
Análise: Indícios de apropriação de significados para variáveis.

No decorrer da atividade, percebemos, pelos diálogos, a empolgação dos alunos, que desejavam obter a resposta, porém, não conseguiam, pois a atividade estava além do que eles conseguiam fazer sozinhos. Foi necessária a reorganização da atividade mediadora para que a ZDP fosse explorada, aproximando o nível de desenvolvimento real do nível de desenvolvimento potencial. Após a intervenção, os grupos começam a operar com o pensamento algébrico, afastando-se do aritmético. Destacamos que a interação e a comunicação dos alunos são ações imprescindíveis. As orientações feitas pela pesquisadora na atividade mediadora possibilitaram aos sujeitos o compartilhamento de sentidos e dos significados da tarefa. Houve indícios da compreensão do significado do pensamento e da linguagem algébricos com relação à situação proposta, ainda que os aspectos externos da linguagem tenham sido preponderantes.

Percebemos que a aluna AC necessitava encontrar um valor numérico para resolver a situação, não compreendeu que o pensamento e a linguagem algébricos se utilizam de letras as quais assumem diferentes dimensões, como indicado por Usiskin (1995), e presentes também nos PCN (1998). Sobre a capacidade de utilizar a letra, afirma Booth (1995, p. 24):

> Em aritmética, o foco da atividade é encontrar determinadas respostas numéricas particulares. Na álgebra, porém, é diferente. Na álgebra o foco é estabelecer procedimentos e relações e expressá-los numa forma mais simplificada geral.

O aluno G, quando expressa "*Coloca* x^2", demostra que não conseguiu atribuir o significado para a potência da variável, demostrando não fazer diferença entre o x e o x^2. Nota-se que para ele essa representação não tem significado. Ele está relacionando com a representação da situação apresentada na história em quadrinhos.

Nos diálogos finais, há indícios de apropriação de significados, os alunos utilizam corretamente a linguagem algébrica simbólica. Ao analisar a produção feita pelos grupos, entendemos que, quando utilizaram as letras *a*, *b*, *x*, *y*, *c*, *s* ou *z* para designar os valores desconhecidos, demostraram a compreensão do conceito de variável, expressa por uma letra para representá-la, o que mostra que pensamento e linguagem algébricos estão relacionados dialeticamente.

Ações de controle e autoavaliação

Nesta tarefa, evidenciamos que os alunos se controlam e autoavaliam, houve a mediação pela comunicação entre os sujeitos envolvidos, a presença do incentivo ao colega para tentar encontrar a resposta da atividade. A aluna B instiga o pensamento do colega G, para poder chegar a uma compreensão da atividade proposta, fazendo alguns questionamentos.

Aluno G - Não tem que descobrir quanto os dois times marcaram, não especifica quantos gols os dois times marcaram, os dois times marcaram e não cada time é ao todo, quantos gols os dois times marcaram, são os dois times. Aluna AC - Os dois times?? Aluna AC - Os dois. Aluno G - Não falou quantos gols cada time marcou, então, x o quê? X^2. E essa é a sincopada Aluna AC - Então a sincopada é aquela lá. Aluno G - E então? Aluna AC - Não pode usar o sinal na sincopada. Aluno G - Então x é o quê? x^2? Aluna AC - O exemplo, x^3. Aluna B - E então x^3, então é a linguagem atual, a nossa, então. Aluna AC - 2x ao quadrado. Aluna B - Porque x ao quadrado? Aluno G - Pelos dois times marcaram.
Análise: Autoavaliação e controle. Os alunos, nesse diálogo, demonstram que não perceberam a linguagem sincopada como um movimento entre a retórica e a simbólica, pois eles não dispunham de símbolos para tudo, mas se avaliam, tentam manter o controle da situação.

4.1.2 Análise das ações na Tarefa 2 da primeira atividade

Na segunda tarefa da primeira atividade, os alunos desenvolveram a seguinte proposta:

Seja *x* o número, que somado com 6, seja = ao seu dobro. Essa situação está na linguagem__________________________.

a) Represente essa situação na linguagem retórica.
b) Represente essa situação na linguagem simbólica.

Diálogos para a identificação da linguagem sincopada
Aluno G - Lê a atividade. Aluna AC - Aquela que usa x e letra é a linguagem atual x = 6, é igual a tanto. Aluna AC - É aquela que usa letra e número. Aluno G - É a simbólica, não é? Aluna AC - Qual é a simbólica? Aluno G - A simbólica é... Aluna AC - Essa aqui é o quê? Aluno G - De cardano, “sinpadona”... sincopada.

Aluna B - É retórica. Aluno G - Simbólica. Aluna AC - A outra foi simbólica. Aluna AC - A simbólica é x + 6, eu acho que é retórica. Aluno G - Tá aqui [lendo a folha]... é retórica. Aluna AC - Pensei em um número é igual... Aluna B - Mas aqui está letra e número, então tem letra e número. Aluno G - Como é que chama, esqueci o nome como é... sincopata... Aluna AC – Professora, como chama aquela linguagem, sinco...?? Pesquisadora – Sincopada. Aluna AC - Sincopada é palavra e número.
Análise: Os diálogos demonstram que os alunos estão presos aos aspectos externos e fica evidente a dificuldade com a linguagem sincopada. Pode indicar também que a atividade não foi adequada.

Logo após o diálogo, o grupo concordou com a resolução da aluna AC, resultando na anotação na folha da atividade.

Em seguida, os alunos iniciam a discussão para escrever a situação dada na linguagem retórica.

Diálogo para a transcrição da situação na linguagem retórica
Aluno G - Vamos logo terminar! Aluna AC - Pode escrever. Aluna B - E pensei em algarismo adicionei 6 como resultado... é sincopada? Aluno G - Está certo é sincopada. Pensei em um número. Aluno G - Está certo agora, adicionei 6. Aluna B - Como você falou antes, obtive um número. Aluno G - Que número? Tem diferença de número e algarismo. E adicionei 6 e obtive como resultado esse número. Aluna AC - Esse aqui está certo. Aluno G - É sim, agora escreve aí. Aluno G - Escreve. Você não obteve nenhum número, você pensou em qualquer número, você só obtém um número quando tem um resultado, sabe? Aluno AC – E, professora, está ficando certo? Pesquisadora – Está, pode continuar.
Análise: Discussão sobre a linguagem e sobre o conceito de incógnita. Ações de estudo, mediação.

Quanto à passagem da linguagem sincopada para a retórica, todos os grupos tiveram dificuldade em fazer essa transcrição, porém, mesmo com alguns problemas de pontuação, eles conseguem expressar o que a situação propõe. Isso mostra que a aprendizagem de um conceito científico é um processo, conforme nos afirma Vigotski (2009, p, 408): “O significado da palavra é inconstante. [...]. Modifica-se também sob diferentes modos de funcionamento do pensamento. É antes uma formação dinâmica que estática". Seguem alguns dos registros dessas produções:

Seja x o número que somado com seis seja igual ao seu dobro. GRUPO 1
Um número que somado a seis o resultado seja seu dobro. GRUPO 2
Pensei em um número que adicionado à seis é igual ao seu dobro. GRUPO 4

Em relação à transcrição da linguagem sincopada para a simbólica, Tarefa *b*, somente dois grupos conseguiram desenvolvê-la corretamente. Dois grupos entenderam "o dobro do número", como sendo "o dobro de seis", e não o dobro da incógnita. Segundo Ifrah (2005, p. 338), "Antes da descoberta da notação literal, qualquer proposição geral não passava de palavrório e continuava prisioneira das ambiguidades que comportam as línguas humanas". Desta forma, ao fazer uso de símbolos, a álgebra se transformou em uma linguagem universal, livrando-se das palavras.

Podemos inferir também que os alunos não têm o conceito geral de variável e de incógnita para se guiar, por esse motivo ficam discutindo em torno de tentativas. Somos conduzidos a pensar que as atividades de ensino deveriam ter focado primeiramente esse conceito.

$x + 6 = 2x$ GRUPO 2	$x + 6 = 12$ GRUPO 3

4.1.3 Análise das ações na Tarefa 3 da primeira atividade

Na terceira tarefa, os alunos deveriam identificar em que linguagem a situação proposta estava (linguagem simbólica), e, em seguida transcrevê-la para as linguagens, retórica e sincopada.

$2x + \frac{1}{2} = x$, essa situação está na linguagem__________________________.

a) Represente essa situação na linguagem retórica.

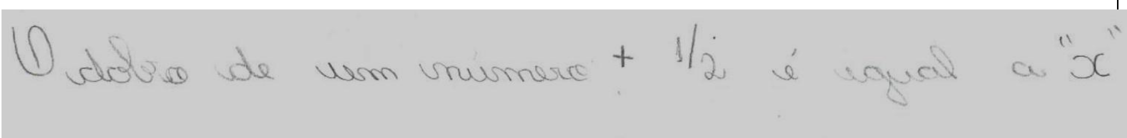
b) Represente essa situação na linguagem sincopada.

Na realização da Tarefa *a*, o diálogo do Grupo 2 revela que a situação descrita na linguagem simbólica tem significado para eles, pois conseguem expressar oralmente, de forma correta, o que está escrito. Porém, ao fazer o registro escrito, não traduzem o que disseram.

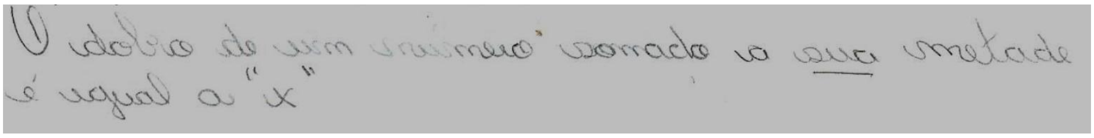
Apropriação da linguagem simbólica
Aluno G - Está na linguagem simbólica. Escreve aí: pensei em um dobro de um número, adicionei ½, que é equivalente a algum número. Aluna B - E que adicionado a ½... Aluno G - Pode ser assim, equivale ou igual a um número desconhecido. Aluna AC - Um número desconhecido.
Análise: Ações de estudo, pois os alunos se apropriam da atividade. A discussão gira em torno do conceito de incógnita.

O diálogo permite perceber que os alunos desse grupo não compreendem a relação entre 2x e x. Quando o aluno G diz “Pensei em um dobro de **um número**, adicionei ½, que é equivalente a **algum** número”, parece-nos que não há relação entre eles, o que é confirmado pelo aluno AC. Isso se confirma nos registros feitos, como se pode constatar a seguir.

GRUPO 2


O dobro de um número + 1/2 é igual a "x"

GRUPO 4

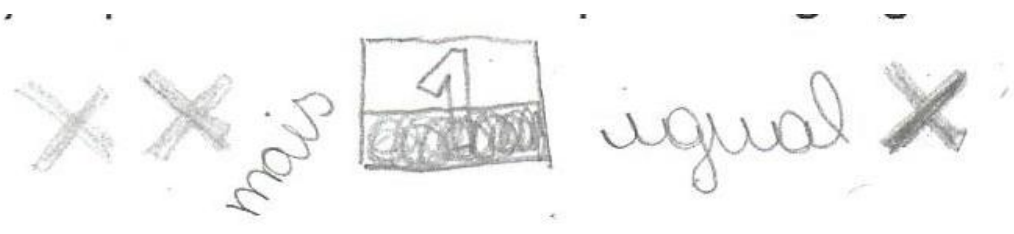

O dobro de um número somado a sua metade é igual a "x"

Os grupos escrevem numa linguagem sincopada, misturando palavras e símbolos, e o Grupo 2 interpreta ½ como a metade do número.

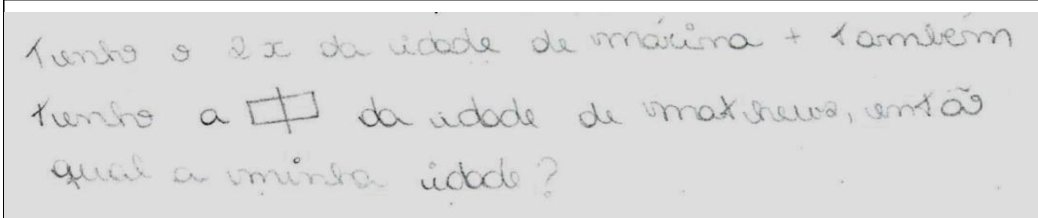
O fato de falarem corretamente, mas escreverem de forma incorreta, evidencia que a linguagem escrita demostra uma dificuldade maior em relação à linguagem falada, como afirma Vigotski, (2001, p. 314):

> É natural que a linguagem sem um som real, que é apenas concebível, que requer uma simbolização dos símbolos sonoros, ou melhor, uma simbolização de segunda ordem, deve ser igualmente mais difícil que a linguagem falada; a álgebra é mais difícil que a aritmética para a criança. A linguagem escrita é a álgebra da escrita. Entretanto, da mesma forma que a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética, mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído, de igual maneira a álgebra da escrita ou linguagem escrita introduz a criança no plano abstrato mais elevado da linguagem, reconstruindo, assim, o sistema psicológico da linguagem falada anteriormente constituída.

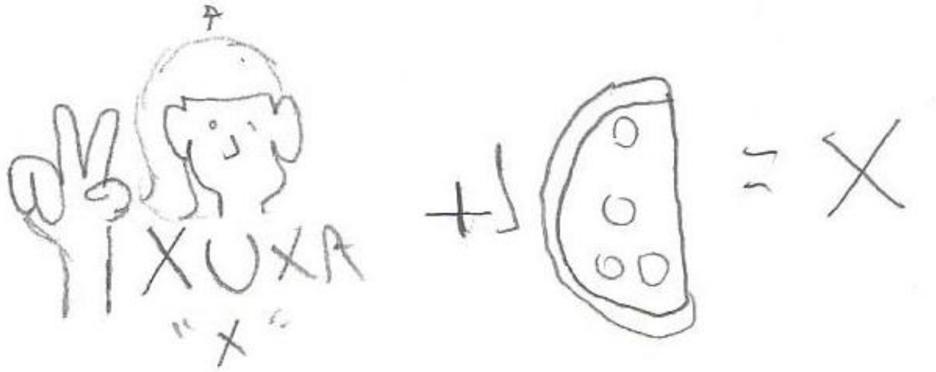
Na Tarefa *b*, traduzir da linguagem simbólica para a sincopada, alguns grupos conseguiram transcrever, utilizando novos símbolos, o que demostra sua criatividade, como se pode ver nas produções abaixo inseridas. Porém, é algo que está no plano empírico.



GRUPO 1


tenho o 2x da idade de márcia + também tenho a ☐ da idade de matheus, então qual a minha idade?

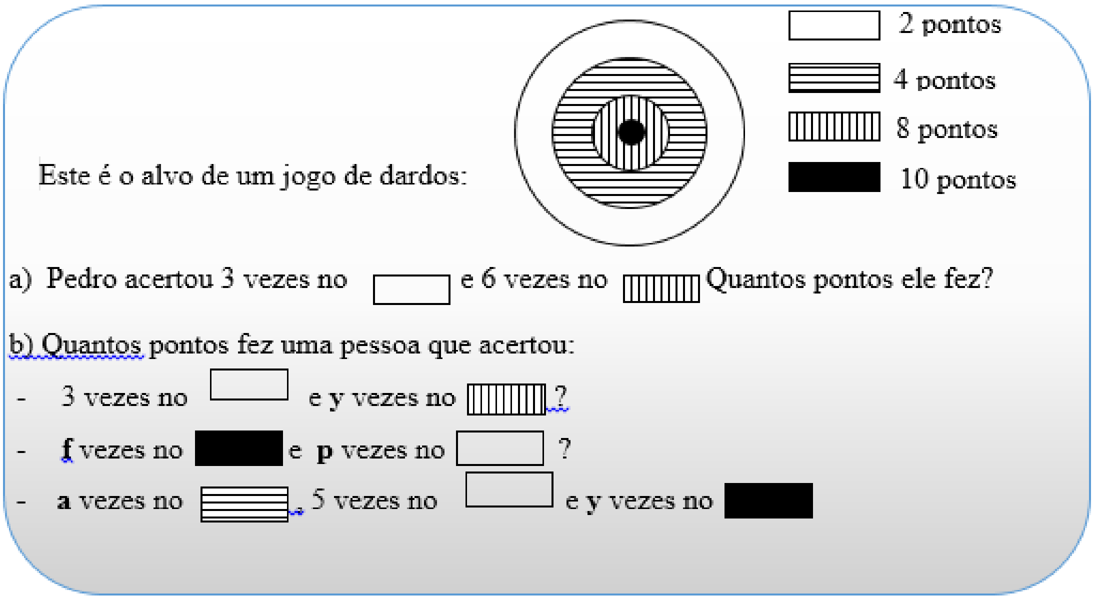
GRUPO 2



GRUPO 5

4.1.4 Análise das ações na Tarefa 4 da primeira atividade

Na tarefa seguinte, os estudantes, no item *a*, iriam operar aritmeticamente, e no item *b*, algebricamente. Abarcamos a praticidade da linguagem simbólica no cotidiano dos alunos e no desenvolvimento do seu pensamento.



Este é o alvo de um jogo de dardos:

2 pontos
4 pontos
8 pontos
10 pontos

a) Pedro acertou 3 vezes no e 6 vezes no Quantos pontos ele fez?

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- 3 vezes no e **y** vezes no ?
- **f** vezes no e **p** vezes no ?
- **a** vezes no , 5 vezes no e **y** vezes no

.

A situação aritmética não ofereceu maiores dificuldades, apesar de dois grupos terem errado a operação de adição. Com relação ao item *b*, três grupos obtiveram os resultados algébricos e dois grupos não desenvolveram corretamente, apesar de o assunto, expressões algébricas, já ter sido abordado neste ano pela professora regente.

a) Pedro acertou 3 vezes no e 6 vezes no .

Quantos pontos ele fez? $(3 \cdot 2) + (8 \cdot 8) = 6 + 48 = 54$ pontos

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- 3 vezes no e **y** vezes no ? $(3 \cdot 2) + (y \cdot 8)$
- **f** vezes no e **p** vezes no ? $(f \cdot 10) + (p \cdot 2)$
- **a** vezes no , 5 vezes no e **y** vezes $(a \cdot 4) + (5 \cdot 2) + (y \cdot 10)$

GRUPO 4

a) Pedro acertou 3 vezes no e 6 vezes no .

$(3.2) + (6.8)$

Quantos pontos ele fez?

Pedro fez 50 pontos

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- 3 vezes no e **y** vezes no ? $6 + 8y$
- **f** vezes no e **p** vezes no ? $10f + 2p$
- **a** vezes no , 5 vezes no e **y** vezes $4a + 10 + 10y$

GRUPO 1

a) Pedro acertou 3 vezes no e 6 vezes no .

Quantos pontos ele fez? 49 pontos

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- 3 vezes no e **y** vezes no ? $3 + y \cdot 8$
- **f** vezes no e **p** vezes no ? $F \cdot 10 + P \cdot 2$
- **a** vezes no , 5 vezes no e **y** vezes $a, 4 + 10 + Y + 10$

GRUPO 5

a) Pedro acertou 3 vezes no e 6 vezes no .

Quantos pontos ele fez? 54

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- 3 vezes no e **y** vezes no ? 10
- **f** vezes no 10 e **p** vezes no 2 ? 12
- **a** vezes no 4, 5 vezes no 10 e **y** vezes 10 24.

GRUPO 3

O Grupo 3 não percebeu o uso das letras presentes nessa situação. Os sujeitos envolvidos nesse grupo não compreenderam o significado dos símbolos algébricos. Isso denota que eles ficaram presos ao pensamento aritmético. O entendimento de conceitos algébricos possibilita a aplicação, com autonomia, dos conceitos aritméticos, pois se colocam em níveis mais complexos de generalização e abstração do pensamento. Segundo Vigotski (2001, p. 267), “permitindo entender qualquer operação matemática como caso particular de operação de álgebra, facultando uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada e, assim, mais profunda e rica das operações com números concretos”.

As próximas atividades foram elaboradas utilizando as concepções algébricas segundo Usiskin (1995): aritmética generalizada, resolução de problemas, relação entre duas grandezas e generalização de padrões (Figura 22), para a apropriação dos significados de polinômios.

PENSAMENTO E A LINGUAGEM ALGÉBRICA

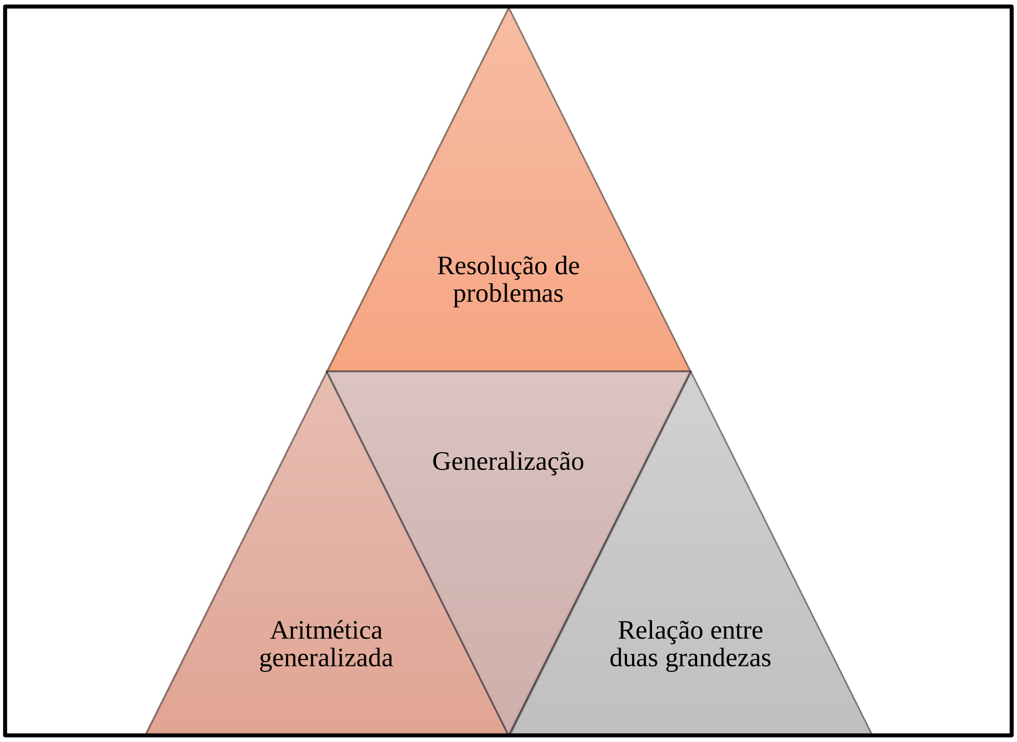


Figura 22: Concepções de álgebra utilizadas para as atividades.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Escolhemos essas concepções porque se aproximam das concepções envolvidas nos PCN (como já foi exposto no Capítulo 2). Nossos objetivos com essas atividades são que os alunos do 8º ano percebam a necessidade da utilização do pensamento e da linguagem algébrica em situações cotidianas, traduzindo-as por meio de um polinômio.

4.2 Resultados e análises da segunda atividade: o significado de polinômio na perspectiva da aritmética generalizada – *O Quebra-Poli*

Na segunda atividade proposta, visando que o aluno sentisse a motivação para realizá-la, empregamos um quebra-cabeça pensado por nós, feito de EVA, ao qual chamamos de *Quebra-Poli*. Nesse jogo, a concepção de álgebra, para a construção de significados para polinômios, era de aritmética generalizada.

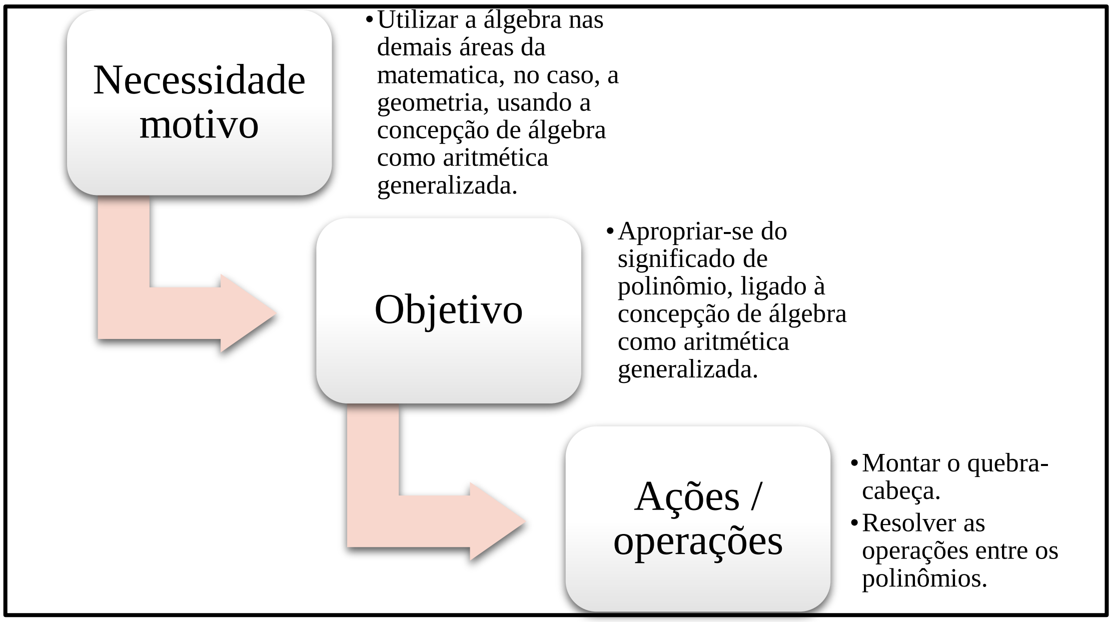


Figura 23: Esquema da atividade *Quebra-Poli*.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Essa atividade teve dois momentos: no primeiro, os alunos conheceram as peças do *Quebra-Poli* e fizeram uma montagem; no segundo momento, receberam a folha da atividade, contendo as tarefas a serem desenvolvidas com a utilização das peças do quebra-cabeça. Na Figura 24, mostramos tais peças. O *Quebra-Poli* é formado por vinte e quatro peças, sendo elas: cinco quadradinhos (A), dois quadrados (D), seis retângulos menores (B), quatro retângulos médios (C), um retângulo maior (H), quatro peças formando L (G), uma cruz (E) e uma figura convexa (F).

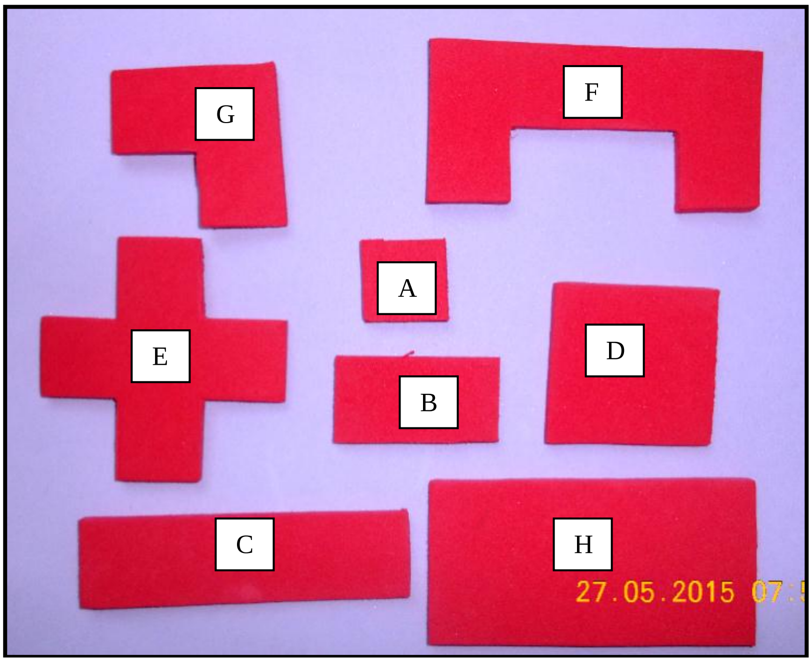


Figura 24: Peças do *Quebra-Poli*.
Fonte: Acervo da autora (2015).

Algumas peças do *Quebra-Poli* possuem uma relação de equivalência, sendo que quatro quadradinhos equivalem a um quadrado maior (Figura 25).

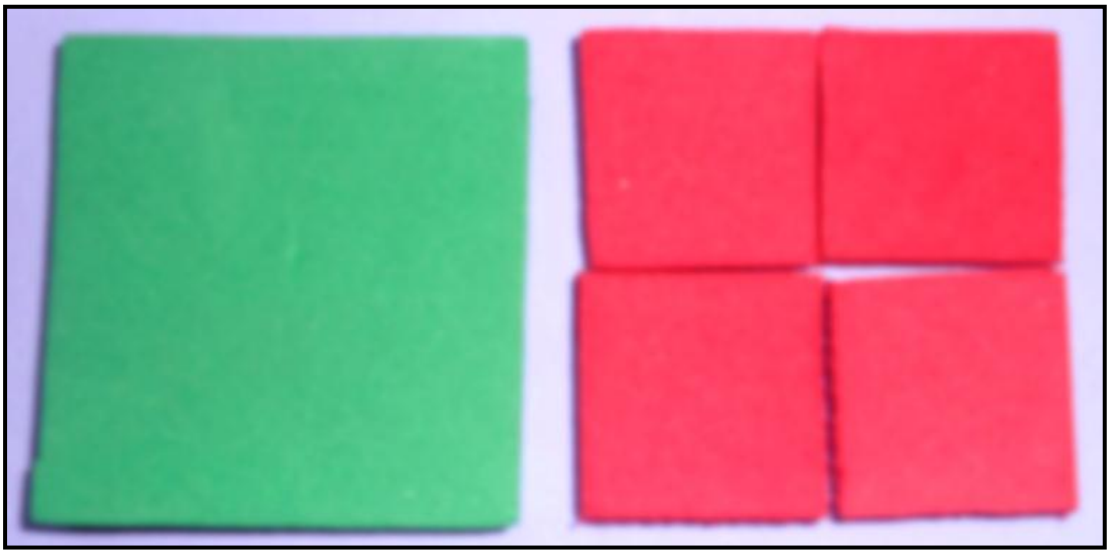


Figura 25: Relação de equivalência entre os quadrados do *Quebra-Poli*.
Fonte: Acervo da autora (2015).

Outras equivalências podem ser observadas, com as peças do quebra-cabeça (Figura 26), em que cinco quadradinhos equivalem a uma peça da cruz, ou também podemos verificar que um retângulo maior equivale a dois menores ou a quatro quadrados.

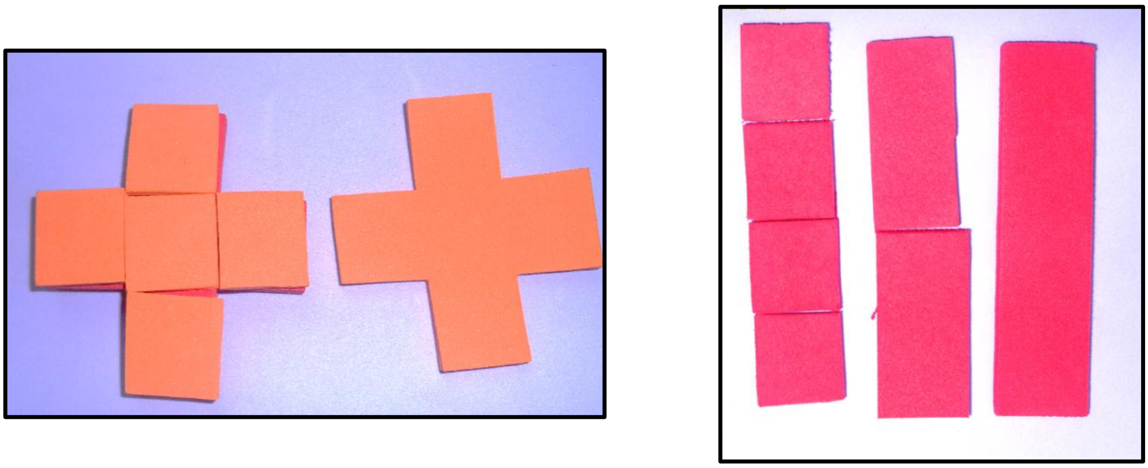


Figura 26: Relação de equivalência entre algumas peças do *Quebra-Poli.*
Fonte: Acervo da autora (2015).

Condições objetivas

Após o primeiro momento, em que os alunos brincaram e conheceram o quebra-cabeça, montando-o, partimos para a segunda etapa: distribuímos a folha para os grupos, contendo a primeira tarefa, a qual suscitou várias dúvidas, exigindo uma intervenção maior da pesquisadora. Em razão de a tarefa envolver o cálculo da área de três peças estipuladas, muitos alunos começaram a perguntar como deveriam proceder. Então, iniciamos a explicação no quadro, retomando conceitos geométricos que seriam necessários para sua execução. Relembramos o conceito de perímetro e de área de figuras geométricas, do quadrado e do retângulo.

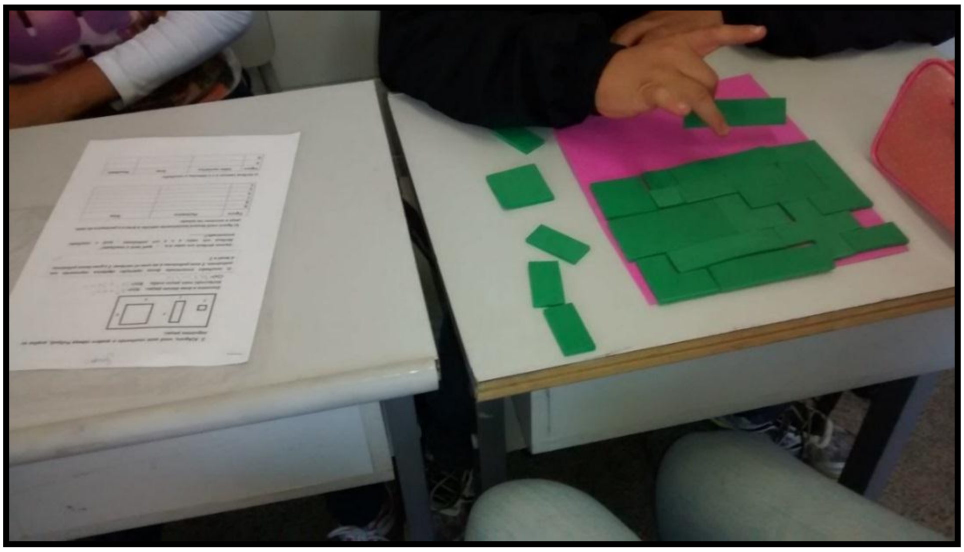


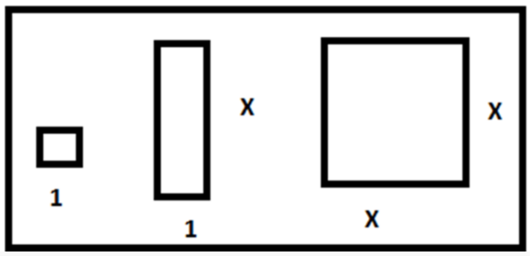
Figura 27: Alunos executando a montagem do quebra-cabeça.
Fonte: Acervo da autora (2015).

No planejamento, foram previstas duas horas/aulas para o desenvolvimento da Atividade 2, mas os alunos demoraram muito para resolvê-la, pois tiveram dificuldades nas operações com os polinômios, então foi necessário ampliar para quatro horas/aulas. A pesquisadora, várias vezes, fez intervenções, mas infelizmente, para alguns grupos, não foram satisfatórias. Alguns alunos não tiveram paciência para resolver as operações entre os polinômios, ou seja, não se apropriaram da atividade. Ainda que essa atividade tenha sido preparada para proporcionar motivação e com isso provocar a ação aos alunos, muitos não se estimularam para desenvolvê-la.

4.2.1 Análise das ações na Tarefa 1 da segunda atividade

Significados apropriados pelos alunos

Analise as seguintes peças:



Encontre a área total dessas peças: A(x)=
O resultado encontrado dessa operação algébrica representa um polinômio. E esse polinômio é de uma só variável. O grau desse polinômio é igual a 2.
Escolha mais peças e escreva a área total, então B(x) =
Acrescente mais peças e escreva a área total, C(x)=
Vamos atribuir um valor a x,____, qual será o resultado?
Atribua um valor a x a um polinômio, qual o resultado encontrado? **..........**

Essa primeira atividade foi resolvida no quadro pela pesquisadora devido à dificuldade dos alunos. Iniciamos a explicação, procurando fazer as mediações necessárias de modo a conduzir o pensamento do aluno. A primeira questão feita foi: qual seria a área de um quadrado de lado igual a uma unidade de medida? Todos os alunos souberam responder, sendo uma unidade de área ao quadrado. No segundo questionamento: “Qual seria a área da figura retangular, se um lado tem uma unidade de medida e o outro, x unidades de medida?”, a sala ficou em silêncio. Então explicamos o conceito de área de um retângulo e apresentamos o resultado. Para o terceiro questionamento, “Qual é a área do quadrado?”, um aluno respondeu: “*É só multiplicar um lado pelo outro”*; então perguntamos: “*Qual é a área desse quadrado de dimensão x unidades de medida*?”. Alguns alunos arriscaram, falando “*2x*”*;* outros, “*x vezes x*”. Então intervimos, explicando a operação de adição e multiplicação envolvendo uma variável. Pela explicitação do pensamento e da linguagem algébricos manifestados pelos alunos, percebemos que o conceito de variável ainda não está formado de maneira satisfatória, o que comprometeu a construção dos significados para polinômios. No que tange a esses aspectos, Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 30) afirmam:

> A linguagem oral requer um certo grau de abstração em relação ao mundo material, e a linguagem escrita requer abstração do aspecto sonoro da fala e também do interlocutor. Expressando por meio da linguagem algébrica, é possível falar e expressar oralmente, estruturando o pensamento algébrico e demonstrando a elaboração de certas abstrações em relação aos números, mas o registro escrito, o uso de simbolismo da álgebra, representa um grau de abstração ainda mais elevado.

4.2.2 Análise das ações na Tarefa 2 da segunda atividade

Na segunda atividade proposta, o aluno deveria encontrar a área e o perímetro das figuras que compunham o quebra-cabeça.

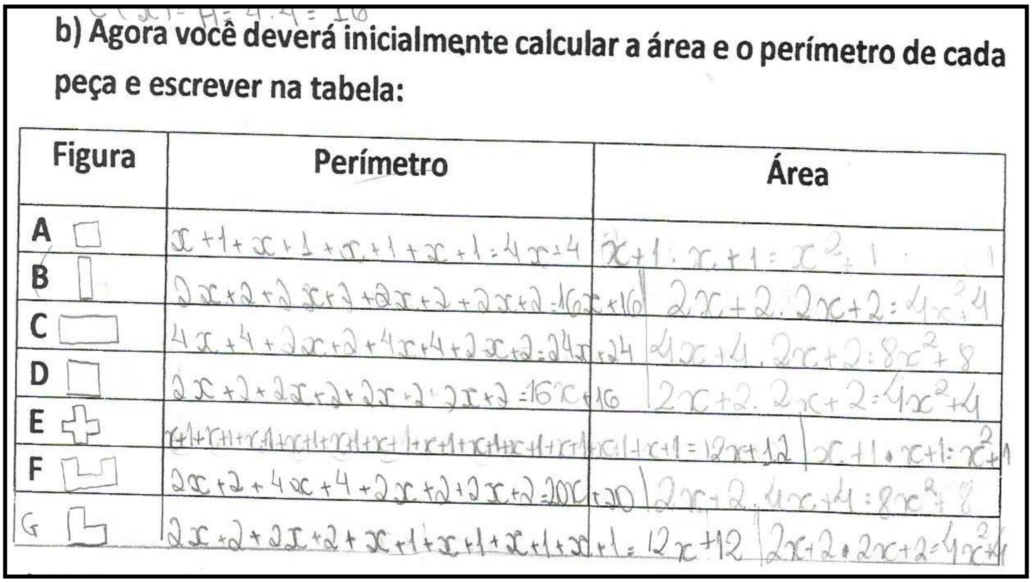
b) Agora você deverá inicialmente calcular a área e o perímetro de cada peça e escrever na tabela:

Figura	Perímetro	Área
A		
B		
C		
D		
E		

Inicialmente, foi pedido para os alunos nomearem as peças pelas letras indicadas na tabela e, a partir dessa nomeação, que calculassem a área e o perímetro, tendo sido estipulado que o quadrado menor seria representado por *x +1*. Ao desenvolver as operações pedidas, o Grupo 1 não atendeu ao que foi pedido, errou todas as operações para calcular as áreas. Detectamos que, apesar de os sujeitos realizarem uma generalização a partir de casos particulares, tais generalizações não garantem que os alunos tenham abarcado o modelo geral ao realizar as situações posteriores, o que corrobora a afirmação de Panossian (2008 p. 144): “Ainda que os estudantes realizem uma generalização por meio de casos particulares (a generalização empírica), tal generalização não se consolida e não garante a resolução posterior de outras situações, ainda que semelhantes”.

Os alunos não conseguiram produzir significado para o polinômio formado. Observamos uma dificuldade comum aos grupos, a de não aplicar a propriedade distributiva na operação de multiplicação entre os polinômios. Ao multiplicar *(x + 1).(x + 1)*, encontram como resultado $x^2 + 1$, como se pode verificar a seguir, nos registros do Grupo 2.

GRUPO 2

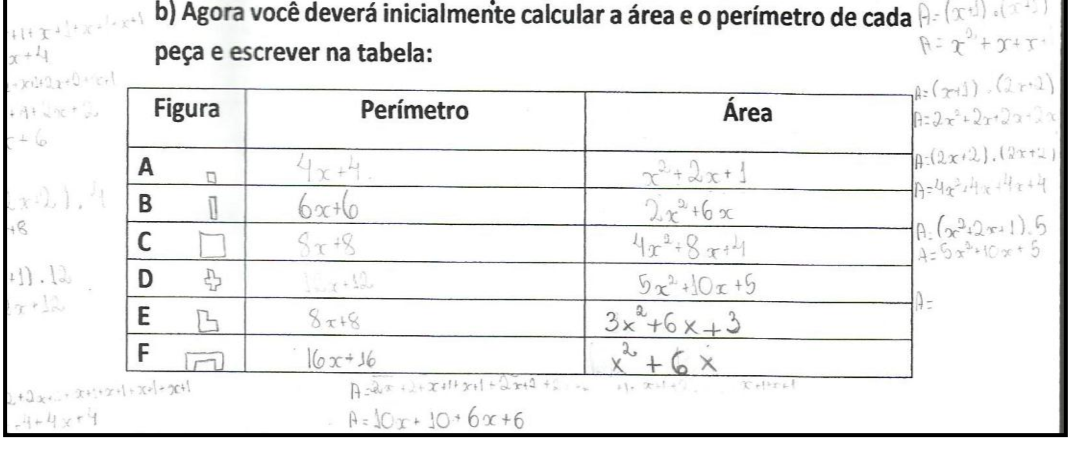


b) Agora você deverá inicialmente calcular a área e o perímetro de cada peça e escrever na tabela:

Figura	Perímetro	Área
A	x+1+x+1+x+1+x+1=4x+4	x+1 . x+1 = x²+1
B	2x+2+2x+2+2x+2+2x+2=16x+16	2x+2 . 2x+2 = 4x²+4
C	4x+4+2x+2+4x+4+2x+2=24x+24	4x+4 . 2x+2 = 8x²+8
D	2x+2+2x+2+2x+2+2x+2=16x+16	2x+2 . 2x+2 = 4x²+4
E	x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1+x+1=12x+12	x+1 . x+1 = x²+1
F	2x+2+4x+4+2x+2+2x+2=20x+20	2x+2 . 4x+4 = 8x²+8
G	2x+2+2x+2+x+1+x+1+x+1+x+1=12x+12	2x+2 . 2x+2 = 4x²+4

O Grupo 4, cujos registros estão a seguir, desenvolveu as operações na folha, acertando todos os itens. Desta forma, houve indícios de que os alunos desse grupo apresentam apropriação dos significados dos polinômios e de suas operações, no contexto geométrico, generalizando o pensamento aritmético.

GRUPO 4



b) Agora você deverá inicialmente calcular a área e o perímetro de cada peça e escrever na tabela:

Figura	Perímetro	Área
A	4x+4	x²+2x+1
B	6x+6	2x²+6x
C	8x+8	4x²+8x+4
D	10x+12	5x²+10x+5
E	8x+8	3x²+6x+3
F	16x+16	x²+6x

A = 10x + 10 + 6x + 6

4.2.3 Análise das ações na Tarefa 3 da segunda atividade

c) Atribua um valor para o x e obtenha o resultado:

Figura	Valor numérico	Área	Resultado
A			
B			
C			
D			
E			
F			

Para resolver essa tarefa, o aluno poderia atribuir qualquer valor numérico para realizar a operação. O Grupo 1, ao que parece, não tem um conceito completo de variável, pois não indicou o valor numérico que havia escolhido, embora tenha feito a substituição de um número na expressão escrita por seus membros, para a área. No resultado, os alunos escrevem novas expressões obtidas dos cálculos numéricos, porém, mantendo as letras. Esses alunos têm pensamento e linguagem sincréticos em relação aos conceitos de variável e de polinômio.

Figura	Valor numérico	Área	Resultado
A	2^2+1	x^2+1	$4x+1$
B	$4(2)^2+4$	$4x^2+4$	$16x+4$

GRUPO 1

O Grupo 3 atribuiu um valor à variável, substituiu corretamente, mas não demonstrou domínio dos cálculos aritméticos.

Figura	Valor numérico	Área	Resultado
A	4	$4^2+2.4+1$	13^2
B	2	$2^2+4.2+1$	11^2

GRUPO 3

O Grupo 4 atribuiu um valor numérico para a variável, havia escrito o polinômio correspondente à área de forma correta, apenas se enganou no resultado da segunda expressão.

Figura	Valor numérico	Área	Resultado
A	2	$2^2+2(2)+1$	9
B	4	$2(4^2)+6(4)$	62

GRUPO 4

A pesquisadora, durante o experimento, foi esclarecendo as dúvidas dos alunos, fazendo as mediações necessárias. Enquanto os alunos procediam ao cálculo do valor numérico, cometiam erros nas operações básicas entre os números inteiros. Vale ressaltar que os alunos já haviam estudado esses conceitos com a professora regente e mesmo assim muitos não conseguiam desenvolver a atividade proposta. Muitos alunos perceberam que havia uma relação de equivalência em cada peça, pois uma peça equivale a outra duas vezes maior.

Nessa atividade estavam presentes os pensamentos algébrico, aritmético e geométrico. Apesar de cada um possuir suas características próprias, inter-relacionam-se na resolução de problemas.

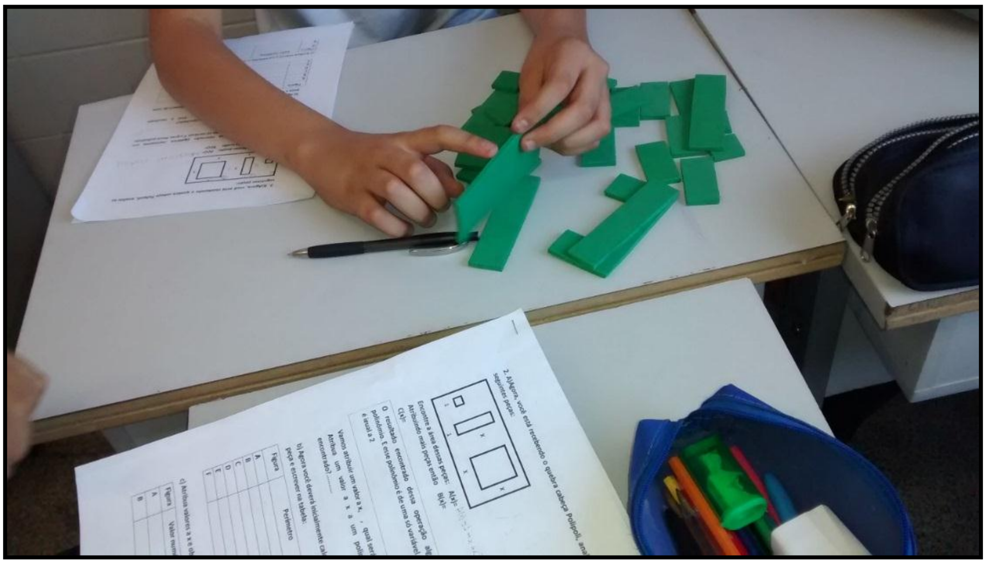


Figura 28: Os alunos percebendo a relação de equivalência entre as peças.
Fonte: Acervo da autora (2015).

Pelo registro escrito, dois grupos perceberam essa equivalência entre as peças e preencheram corretamente a tabela com o perímetro e a área pedida, ou seja, detectaram o conceito de termos semelhantes.

Mas os outros grupos não conseguiram desenvolver a atividade, erraram quase todos os cálculos e ainda demostraram falta de interesse na resolução das atividades. Em um dado momento, observei que havia um aluno perfurando o quebra-cabeça e não tentando realizar a atividade. Esses alunos não se envolveram, demonstrando um contato superficial com essa atividade.

Houve muita dificuldade entre os alunos para caracterizar as propriedades particulares das operações envolvidas, o que provocou a total dependência dos alunos em relação à pesquisadora, pois não conseguiam desenvolver as operações entre os polinômios, a multiplicação, a adição e a subtração: os nexos conceituais não estavam presentes.

Essa atividade tinha o objetivo de trabalhar o sentido e o significado de polinômio, que estaria presente nas expressões do perímetro e da área, no movimento entre o pensamento e a linguagem algébrica. Para desenvolver essa atividade, muitos conceitos estão envolvidos, formando uma rede, como o de número, de variável, de operações aritméticas, geométricas e algébricas.

Foram oito tarefas aplicadas ao todo e analisamos somente três. Como as demais tarefas implicam o mesmo pensamento algébrico proposto anteriormente, sendo elas a aplicação do conceito de área e do volume da junção de algumas peças do quebra-cabeça, não foram inseridas, pois não trariam outras contribuições.

4.3 Resultados e análises da terceira atividade: *O Significado de Polinômio na Perspectiva das Situações-Problema*

Nessa terceira atividade, foram elaboradas três situações-problema, visando explorar o significado de polinômio, ligado à resolução de problemas, por meio de equações. Iniciamos a atividade entregando a primeira tarefa aos alunos, que já se encontravam em grupos.

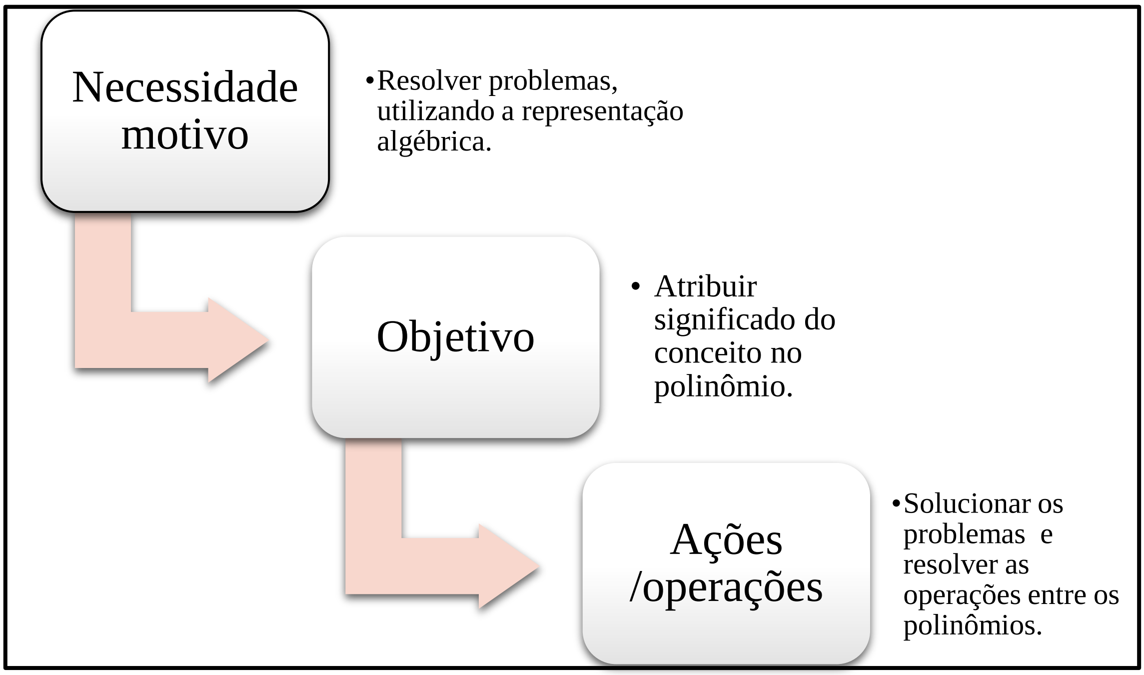


Figura 29: Síntese da atividade *Resolução de Problemas*.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

De acordo com D'Ambrósio (1986), a álgebra é um "estilo de pensamento, uma linguagem adequada para expressar as reflexões da leitura de mundo na sociedade atual".

Polya (1995) aponta um aspecto importante para o aprendizado da álgebra, ligado à motivação, quando afirma que é necessário que o aluno perceba a necessidade da linguagem simbólica a fim de que ele se interesse, para dela se apropriar e para que construa sentidos para ela:

> Há sempre alguma coisa de arbitrário e artificial numa notação e o aprendizado de uma nova notação constitui sobrecarga para a memória. O estudante inteligente recusará aceitar esse ônus se ele não notar nessa nenhuma compensação. A sua aversão pela Álgebra se justificará se não lhe for dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a *linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio.* Auxiliá-lo nessa experiência constitui uma das mais importantes tarefas do professor (POLYA 1995, p. 97-101, grifos do autor).

Quando abordamos a álgebra de forma concreta, isto é, por meio de situações mais próximas do aluno, ela se torna mais compreensível. De acordo com Moisés (1999, p. 97):

> [...] o momento da problematização é um momento especial no processo de criação científica e, portanto, da aprendizagem. É nele que se dá o salto de qualidade no pensamento, e nele que se expõe toda a capacidade criativa do homem, é a partir dele que se criam conceitos. Como para Kopnin (1987), entendemos que a problematização, isto é, a habilidade de se colocar

> corretamente o problema, de deduzi-lo do conhecimento antecedente, já significa resolver metade do problema.

Essas considerações de Moisés corroboram o que nos fala Davidov (1988): para a apreensão de um conceito, é importante o movimento do plano mental para a realização de ações no plano externo e vice-versa. A resolução de problemas, envolvendo equações, insere-se nesse movimento na apreensão de significados para os polinômios.

E ainda corroboramos Sousa, Panossian e Cedro (2014): "[...] há uma crescente valorização da perspectiva que concebe a álgebra como uma ferramenta para a resolução de problemas".

4.3.1 Análise das ações na Tarefa 1 da terceira atividade

a) A Construtora Uber está construindo um condomínio fechado, empreendimento diferenciado, projetado para oferecer espaço, valorizar paisagens e preservar ao máximo a fauna e a flora da região. Uma completa infraestrutura em pleno funcionamento permite que você usufrua de todo conforto e qualidade de um empreendimento de alto padrão. Ela pretende construir dois edifícios: Villagio de Roma e Villagio de Paris. O Villagio de Roma terá 10 andares. O Villagio de Paris terá 2 andares a menos que o Villagio de Roma e 4 apartamentos a mais por andar. Se Villagio de Roma tiver ***n*** apartamentos por andar, quantos apartamentos serão construídos? Descubra respondendo as seguintes questões:

b) Qual é a expressão algébrica que representa os números de apartamentos do Villagio de Roma? Essa expressão é um polinômio? O que a letra ***n*** representa?

c) Qual é a expressão algébrica que representa o número de apartamentos do Villagio de Paris? Essa expressão é um polinômio? O que a letra ***n*** representa?

d) Qual é a expressão algébrica que representa o número de total de apartamentos dos dois edifícios?

e) Se a construtora quiser construir 122 apartamentos, quantos apartamentos serão construídos por andar? Quantos apartamentos no Villagio de Roma? Quantos no Villagio de Paris?

f) Proponham vocês o total de apartamentos e descubram os números de apartamentos por andar.

Condições objetivas

Ao entregar a primeira folha de atividade aos alunos, detectamos que houve a motivação, ou melhor, um interesse pelos alunos em achar a resposta para os problemas, como se fosse um desafio para os sujeitos. Dessa forma, concordamos com Leontiev (1991, p 70), ao afirmar que o motivo induz a ação e torna os resultados mais significativos: “é uma questão de o resultado da ação mais significativa, em certas condições, que o motivo realmente a induziu”. Os alunos apresentaram estratégias para encontrar a resposta para desvendar uma situação que eles desconheciam.

Significados apropriados pelos alunos

Utilizar a linguagem e o pensamento algébrico por meio da resolução de problemas
Aluno G - O prédio terá 10 andares, então será 10x... terá 8 andares, mais 8x. 4 apartamentos a mais por andar, + 4. Aluna E: - ‘Vai’ ter n apartamentos. Por andar, quantos apartamentos? Alunas AC e B -Tanto faz. Aluno G - Então tá, né. n é o quê? Alunas AB e E - Número de apartamentos por andar. Aluna E - E a expressão será 10... Aluno G - O 10x. Aluna AB - 10? 10x + 4. Aluna E -10x + 4. Aluno G - 10x + 4. Aluno G - É 10x + 4 mesmo, porque o y representa o Villagio de Roma e o x representa o Villagio de Paris. Aluna AC - Então, pode pôr $10x^2+4x$. Aluno G - O que $10x^2$? Aluna E - É para ficar mais fácil. Aluna B - Mas por que $10x^2$? Aluna AC - Porque vai ser do segundo grau. Aluna E - Mas não está falando ao quadrado. Pesquisadora: Preste atenção, faça a leitura cautelosamente. São 8 andares e cada andar tem 4 apartamentos **a mais** do que o outro prédio. Aluna E - Então, 8x + 4. Pesquisadora - Por quê? Aluna B - Porque aí ‘vai’ ser 8 andares com x apartamentos, e cada andar tendo x apartamentos de Roma, ‘vai’ ter mais 4 inseridos.
Análise: Há indícios de problemas com relação ao conceito de variável e a forma de expressá-la, assim como nos modos de estabelecer relações operatórias que a envolvam. O desenvolvimento da motivação e a participação dos alunos.

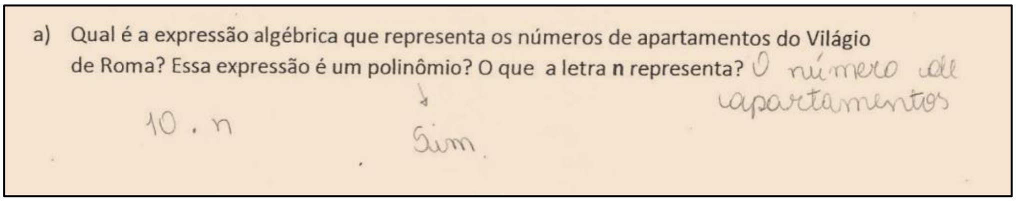
Constatamos nos diálogos que há alunos que não se apropriaram devidamente do conceito de variável e a forma de expressá-la, assim como nas formas de expressar as relações operatórias entre elas – o enunciado propunha que a variável fosse representada por *n* e os alunos insistiam no uso de *x;* o uso de x^2 revela que essa representação não se apresenta para os alunos como uma potência de *x*, ou seja, *x.x*; a expressão *8x + 4* demonstra que os alunos têm dificuldades em operar com a variável.

Esses indícios nos apontam que os conceitos envolvem uma rede de outros conceitos e relações. O fato de o aluno não ter se apropriado devidamente de um pode comprometer a apropriação de outro. Por exemplo, nesta situação, a falta de apropriação do conceito de variável prejudica a apreensão do significado de polinômio.

Desta forma, nesta atividade, em que os alunos tinham que escrever um polinômio e depois uma equação e resolvê-la, ou seja, encontrar um valor para a variável que satisfaça uma dada condição, os alunos foram desafiados a perceber o significado de polinômio como ferramenta importante para a resolução do problema. Entretanto, podemos inferir que há um descompasso, ou melhor, um fosso entre a linguagem retórica, expressa na língua materna, e a linguagem simbólica. Podemos deduzir, ainda, que o conceito de variável parece ser um pseudoconceito, conforme caracteriza Vigotski (2009).

No confronto das ideias, após a intervenção da pesquisadora, eles conseguiram escrever e identificar os polinômios que expressam o número de apartamentos de cada prédio e o número total. O Grupo 3 não utilizou a letra *n* sugerida para representar a variável, mas sim, a letra *x*. Percebemos que, pela linguagem, ou seja, a comunicação entre os alunos, os significados foram sendo partilhados, assim desencadeando a aprendizagem.

GRUPO 1

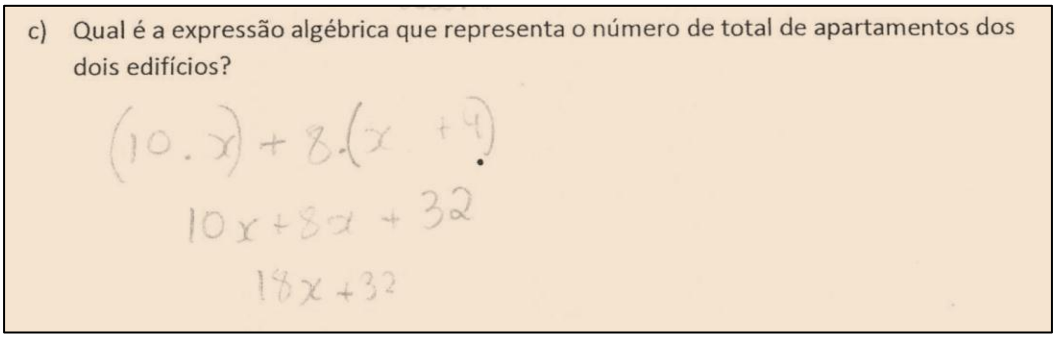


a) Qual é a expressão algébrica que representa os números de apartamentos do Világio de Roma? Essa expressão é um polinômio? O que a letra **n** representa? O número de apartamentos

$10 . n$

Sim

GRUPO 3



c) Qual é a expressão algébrica que representa o número de total de apartamentos dos dois edifícios?

$(10 . x) + 8.(x + 4)$

$10x + 8x + 32$

$18x + 32$

GRUPO 2

c) Qual é a expressão algébrica que representa o número de total de apartamentos dos dois edifícios?

$10 . m + 8 (m + 4)$

$10 . m + 8 (m + 4)$

$10 . m + 8 m + 32$

$18 . m + 32$

R: $18 . m + 32$

4.3.2 Análise das ações na Tarefa 2 da terceira atividade

Condições objetivas

Na segunda tarefa, os alunos demostraram entusiasmo para chegar a uma resposta, a uma conclusão, portanto se envolveram com a atividade de ensino, constituindo-se ela em uma atividade de estudo, a qual demandou um tempo para que chegassem à escrita de um polinômio que traduzisse a situação.

Em um estacionamento são cobradas as seguintes tarifas:

Pela 1ª hora (ou fração): RS 3,00

Pela 2º hora (ou fração): RS 2,00

O proprietário quer criar expressão algébrica para facilitar o cálculo. Pensou em chamar de x o número de horas (inteiras ou fração) que o carro permaneceu no estacionamento. Responda:

a) Escreva a expressão algébrica adequada para essa situação

b) Teste o seu modelo, considerando que o carro lá permaneceu por 5 horas:

c) Uma pessoa pagou R$ 27,00. Quantas horas ficou estacionada?

d) O funcionário cobrou de uma pessoa R$30,00. A pessoa não concordou e não quis pagar esse valor. Quem está com a razão?

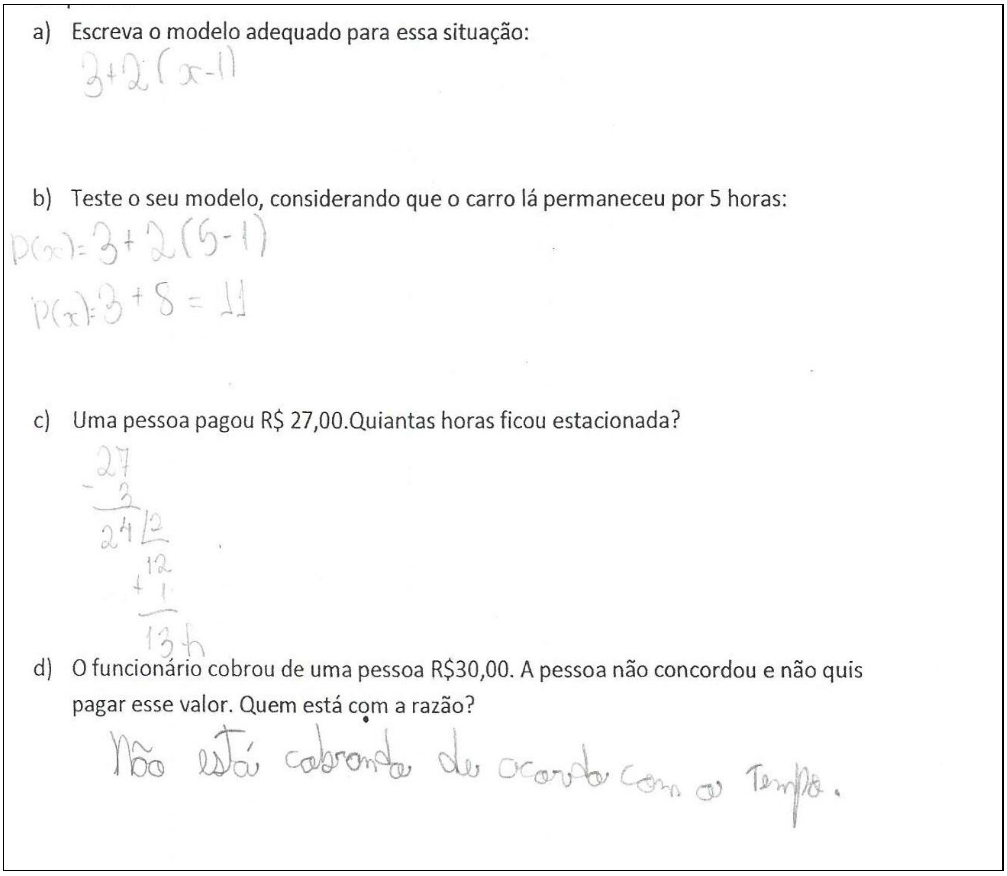
Significados apropriados pelos alunos

O episódio a seguir mostra a aluna AN utilizando um processo algoritmo repetitivo para encontrar a solução, ou melhor, empregando uma lógica aritmética indutiva para solucionar o problema, mas foi capaz de perceber que o primeiro polinômio escrito estava errado, pois não conduzia à resposta correta para 2 horas.

Utilizar a linguagem e o pensamento algébrico para resolução de problemas e dar sentido e significado ao polinômio
Aluna AN – Uma hora 'paga-se' 3 reais. Então, duas horas, ele pagará 5 reais. Pesquisadora: Por quê? Aluna AN - Se uma hora é 3 reais e 2 horas ele pagará 2 reais, então ao todo serão 5 reais. Mas se ficar 3 horas no estacionamento, gastará 3 mais 2, mais 2, então 7 reais. Se 'for' 4 horas, então vamos somar mais 2 reais a cada hora. Pesquisadora - Muito bem, mas como podemos escrever essa expressão para qualquer hora? Aluna AN - Ah!!!.. Se primeira hora são 3 e depois é 2 então... sempre temos que considerar essa hora para todo... Ai, professora, deixa eu pensar... hum, sempre vai ser 3 mais 2 vezes x. Pesquisadora - O que x representa? Aluna AN - Uai, o número de horas. Pesquisadora - Isso mesmo... muito bem, então como poderíamos escrever essa expressão algebricamente? Aluna: AN - 3 + 2x... é isso? Pesquisadora - Vamos verificar se está certo? Substituindo o x por 2 , pagaria por quanto? Aluna AN – 3 + 2.2 ficaria igual a 3 + 4 = 7, estou errada, se ele ficar duas horas, ele deveria pagar somente 5 reais ... Pesquisadora - Então aonde está o seu erro? Aluna AN - Já sei!!! É porque contou duas vezes a hora e devemos retirar a primeira hora, então acho que ficará... uh!!! 3 + 2 (n - 1), é isso? Pesquisadora - Vamos verificar se acertou, ficar duas horas será 3 + 2 (2 - 1) então 3 + 2.1 = 5. Aluna AN - Oba!! Acertei...
Análise: Desenvolvimento das atividades psíquicas superiores: atenção, memória e consciência. Autoavaliação e autocontrole.

A resolução de problemas é um facilitador da aprendizagem, pois existem várias estratégias para chegar ao pensamento e à linguagem algébrica, ela envolve a descoberta de padrões que contribuem para o desenvolvimento dos nexos conceituais. Essa situação demostrou que a aluna desenvolveu o pensamento algébrico, porque houve evidências de generalização.

GRUPO 4



a) Escreva o modelo adequado para essa situação:

$3+2(x-1)$

b) Teste o seu modelo, considerando que o carro lá permaneceu por 5 horas:

$p(x)= 3+2(5-1)$

$p(x)= 3+8 = 11$

c) Uma pessoa pagou R$ 27,00.Quiantas horas ficou estacionada?

$27 - 3 = 24$

$24 / 2 = 12$

$12 + 1 = 13$ h

d) O funcionário cobrou de uma pessoa R$30,00. A pessoa não concordou e não quis pagar esse valor. Quem está com a razão?

Não está cobrando de acordo com o Tempo.

Ao analisarmos a resposta do Grupo 4, podemos observar que eles escreveram corretamente o polinômio para a situação. Entretanto, para resolver o item *c*, recorreram a uma solução aritmética, o que demonstra um pensamento que não é reversível, isto é, dado o número de horas, utilizaram o modelo para encontrar o preço, mas dado o preço, não usaram o modelo para achar o número de horas. Para esse grupo, o significado de polinômio atrelado a uma relação entre variáveis ainda não está constituído. Os demais grupos utilizaram o polinômio obtido para resolver os itens *c* e *d*, ainda que nenhum tenha usado uma representação para o preço, ao responder ao item *a*. O polinômio não é tratado como uma função, o que observamos quando analisamos o livro didático.

4.3.3 Análise das ações na Tarefa 3 da terceira atividade

O último problema foi sobre a lápide de Diofanto de Alexandria. Ao iniciar a leitura, os alunos perguntaram se era o mesmo Diofanto da *História da Linguagem Alg*ébrica.

Vamos descobrir quantos anos viveu Diofante[14]?

Os alunos ficaram intrigados com a linguagem semântica do texto, pois desconheciam muitos termos e tiveram dúvidas com relação às palavras numéricas, não entendiam o significado de um duodécimo e um sétimo. Então a pesquisadora propôs fazer a leitura com os alunos para juntos irem desmistificando as palavras. Após a leitura e a explicação da linguagem numérica, os alunos tentaram resolver a situação. Somente um grupo conseguiu chegar à resposta, após as intervenções e os diálogos; os demais não conseguiram desenvolver a equação proposta.

Nessa perspectiva de significados de polinômios por meio de problemas, podemos discorrer sobre essas três situações, pois apresentamos significados para situações nas quais há apropriação de números e operações. A observação e os registros nos permitem inferir que a linguagem do enunciado pode ter sido um entrave, assim como o pensar e expressar as relações envolvendo a incógnita.

No seu conjunto, essa atividade mobilizou os alunos para a apropriação do significado de polinômios relacionado à ideia de relação entre variáveis e de equações para resolver situações-problema. Conforme já registramos, a falta de uma apropriação científica do conceito de variável se constituiu num obstáculo, assim como a prevalência do pensamento aritmético sobre o algébrico.

[14] Fonte: <http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=29119>. Acesso em: 13 set. 2014.

4.4 Resultados e análises da quarta atividade: *O Significado de Polinômio na Perspectiva da Relação entre as Grandezas*

Nessa quarta atividade, foram elaboradas três situações-problema, empregando o significado de polinômios atrelado à relação entre duas grandezas, ou seja, ligado ao conceito de função. Iniciamos a atividade entregando a primeira tarefa aos alunos, que já se encontravam em grupos. Depois de resolvê-las, seguimos para o laboratório de informática com o propósito de utilizar o programa *KmPlot*.

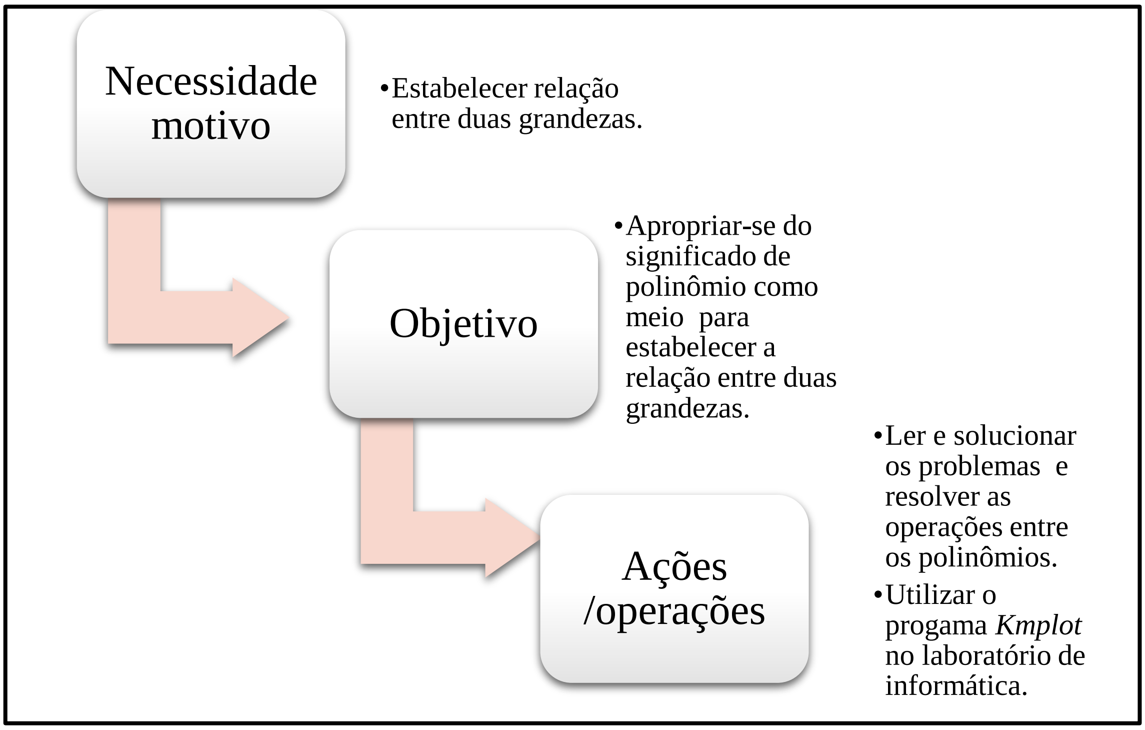


Figura 30: Esquema da atividade *Relação entre as Grandezas*.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

Nessa atividade, procuramos fazer uso dos recursos computacionais, utilizando um *software* compatível com o sistema operacional dos computadores existentes nos laboratórios da rede municipal de ensino, o *Kmplot.* A introdução de computadores no ensino é importante, pois os ambientes computacionais permitem que o aluno simule, conjecture, experimente e crie situações para o seu desenvolvimento, sendo um ambiente propício para a construção do conhecimento. Segundo Peixoto (2011, p. 36),

> Se considerarmos que as TIC [tecnologias da informação e comunicação] não são apenas objetos técnicos, mas artefatos culturais, artefatos simbólicos que se configuram por meio de relações recíprocas com os sujeitos e as

> práticas sociais, precisamos levar em conta que tais tecnologias proporcionam alterações significativas em nossa maneira de lidar com a informação e o conhecimento, as quais proporcionam situações pedagógicas particulares.

As tecnologias são instrumentos de mediação entre o sujeito e o conteúdo, ou seja, são recursos mediadores para os processos de ensino-aprendizagem.

> Nesse sentido, a situação de ensino, com o uso de tecnologia, pode ser considerada como uma situação de atividade instrumentada, na qual esse recurso constitui uma tecnologia para o ensino, que interfere nas relações e nas interações didáticas. Assim, o recurso às TIC permite pensar as situações de ensino como situações de atividade midiatizada ou instrumentada, nas quais o uso do computador constitui um dos meios da ação do trabalho do professor. (PEIXOTO, 2011, p. 32).

Os recursos encontrados no computador são os mesmos que na sala de aula, como: textos escritos, imagens estáticas e/ou em movimento, tabelas, gráficos, números, sons, entre outros, mas ele proporciona uma forma de encantamento ao ato de aprender e ensinar, pois apresenta uma velocidade de informação e agilidade que contagiam.

> A mediação é um aspecto primordial da psicologia histórico-cultural, caracterizando o fato de que os seres humanos não agem diretamente sobre o mundo. Pelo contrário, as ações são mediadas por ferramentas sócio-semióticas (tais como a linguagem ou a matemática), bem como por artefatos materiais e tecnologias. A esse aspecto, soma-se o entendimento de que a mediação se efetiva no bojo dos processos históricos, institucionais e discursivos, constituindo-se pela atividade prática e simbólica de um sujeito. (PEIXOTO, 2011, p. 33).

Condições objetivas

Neste dia os alunos do Grupo 3 faltaram, então ficamos somente com os grupos 1, 2 e 4, que participaram efetivamente na proposta da atividade. E a professora regente da turma não compareceu nesse dia, então os alunos ficaram um pouco agitados.

4.4.1 Análise das ações na Tarefa 1 da quarta atividade

1. Ao ir a uma sorveteria, percebi uma relação matemática no valor do preço em relação a quantidades de bolas. Se comprar um sorvete com uma bola, pagarei R$ 3,00. Então, complete a tabela a seguir:

Quantidade de bolas de sorvete	Preço a pagar (R$)
1 bola	R$ 3,00
2 bolas	R$ 6,00
3 bolas	
4 bolas	
....	
6 bolas	
bolas	R$ 24,00
10 bolas	
N bolas	

Você observa que a cada valor atribuído à quantidade de bolas corresponde um valor a ser pago.

a) O preço a pagar depende da quantidades de bolas de sorvete? Por quê?

b) Registre em forma de produto a operação matemática que você fez para chegar aos resultados.

c) Você pode escrever uma expressão matemática que simbolize as operações acima, ou seja, que simbolize o cálculo?

Vamos observar essa resolução gráfica no computador!

Com o auxílio do *software Kmplot,* desenvolva as atividades abaixo.

a) Marque os pontos da tabela, no gráfico.

b) O que você percebe a respeito da distribuição desses pontos?

c) Você acha que é possível fazer uma previsão do comportamento destes pontos, ou seja, aqueles pontos que não estão marcados seguem também uma regra de distribuição?

Significados apropriados pelos alunos

Todos os grupos preencheram a tabela da primeira tarefa corretamente, mas apenas um grupo soube generalizar a operação proposta. Compreendemos que os alunos entenderam os nexos externos, realizando os cálculos aritméticos, que são mais concretos, mais perceptíveis. Entretanto, a generalização não foi feita pela maioria, apenas o Grupo 4 escreveu o preço a pagar utilizando o polinômio correto. Podemos inferir mais uma vez que os alunos que não se apropriaram do conceito geral de polinômio e de seus nexos internos, não o fazem pelo procedimento da generalização empírica, como se pode observar nos registros a seguir:

GRUPO 1

Quantidade de bolas de sorvete	Preço a pagar (R$)
1 bola	R$ 3,00
2 bolas	R$ 6,00
3 bolas	R$ 9,00
4 bolas	R$ 12,00
…5… bolas	R$ 15,00
6 bolas	R$ 18,00
8 bolas	R$ 24,00
10 bolas	R$ 30,00
N bolas	N reais

GRUPO 2

Quantidade de bolas de sorvete	Preço a pagar (R$)
1 bola	R$ 3,00
2 bolas	R$ 6,00
3 bolas	R$ 9,00
4 bolas	R$ 12,00
5 bolas	R$ 15,00
6 bolas	R$ 18,00
8 bolas	R$ 24,00
10 bolas	R$ 30,00
N bolas	

GRUPO 4

Quantidade de bolas de sorvete	Preço a pagar (R$)
1 bola	R$ 3,00
2 bolas	R$ 6,00
3 bolas	R$ 9,00
4 bolas	R$ 12,00
…5…	R$ 15,00
6 bolas	R$ 18,00
8 bolas	R$ 24,00
10 bolas	R$ 30,00
N bolas	3n

Após o preenchimento da tabela, deveriam responder aos itens seguintes. Os alunos perceberam a relação do preço com a quantidade de bolas de sorvete, e que o preço depende da quantidade de bolas. O Grupo 1 julgou que o preço deveria ser somado com 3, porque associou ao preenchimento da tabela, em que cada valor é a soma do anterior com 3.

GRUPO 1

b) Agora, registre em forma de produto a operação matemática que você fez para chegar aos resultados do preço a pagar.

n+3

GRUPO 2

b) Agora, registre em forma de produto a operação matemática que você fez para chegar aos resultados do preço a pagar.

N.3 → número de bolos.

Ao responderem aos itens *c e d*, percebemos que houve indícios da apropriação do significado de polinômio ligado à relação entre variáveis, porém, apenas o Grupo 4 escreveu o polinômio. Vale ressaltar que os alunos do oitavo ano ainda não têm o conhecimento científico de função, mas já percebem a relação entre as variáveis.

GRUPO 1

c) Podemos escrever uma expressão matemática que simbolize as operações feitas no quadro 1, ou seja, que simbolize o cálculo realizado para se chegar ao valor a pagar à partir da quantidade de bolas de sorvetes? Essa expressão você pode identificar como um polinômio? Sim

GRUPO 2

c) Podemos escrever uma expressão matemática que simbolize as operações feitas no quadro 1, ou seja, que simbolize o cálculo realizado para se chegar ao valor a pagar à partir da quantidade de bolas de sorvetes? Essa expressão você pode identificar como um polinômio? Sim. Porque possui uma variável e um

GRUPO 4

c) Podemos escrever uma expressão matemática que simbolize as operações feitas no quadro 1, ou seja, que simbolize o cálculo realizado para se chegar ao valor a pagar à partir da quantidade de bolas de sorvetes? Essa expressão você pode identificar como um polinômio?

$Pn = 3n$

4.4.2 Análise das ações na Tarefa 2 da quarta atividade

Significados apropriados pelos alunos

Da mesma forma que na tarefa anterior, os alunos souberam completar a tabela apresentada a seguir, mas a generalização por meio de um polinômio não foi realizada por todos os grupos. Os Grupos 2 e 4 conseguiram. Ao que nos parece, o Grupo 4 já se apropriou do significado de polinômio teoricamente, por isso consegue fazer o movimento do geral para o particular e vice-versa. Então, podemos inferir que esses alunos desse Grupo assimilaram os nexos internos do conceito de polinômios, por meio das atividades mediadas e intencionalmente organizadas.

Retomamos Vigotski (2009, p. 181), quando afirma que “uma palavra adquire o seu sentido no contexto em que surge; em contextos diferentes, altera o seu sentido. O significado permanece estável ao longo de todas as alterações de sentido”. As atividades tinham o objetivo de partilhar os significados de polinômios, de modo a provocar a construção de sentidos pelos alunos.

Podemos perceber que os alunos passaram a pensar, a refletir sobre o significado produzido pelas palavras, no caso os símbolos, em um pensar algébrico, e, assim, a atividade produziu sentido para eles. Essa perspectiva de organização da atividade de ensino encontra respaldo no que afirmam Lins e Gimenez (2001, p. 166): “o fundamental é indicar que nossa proposta de trabalhar com base em significado, e não conteúdos [...]”.

A Tarefa 3 da quarta atividade permitiu verificar os mesmos resultados registrados na tarefa anterior: os Grupos 2 e 4 atingindo um nível de generalização teórica, enquanto o Grupo 1, ainda fica preso no pensamento aritmético, mais concreto.

De modo geral, os alunos, por meio desta atividade, conseguiram assimilar que as leis expressam e estabelecem a relação de dependência entre as grandezas que variam, identificando que as letras nesse momento adquirem o sentido de variável. Há indícios de que eles se apropriaram do significado de polinômio como forma de traduzir e expressar a relação entre duas variáveis. As fórmulas são as descrições do movimento e esse pensamento foi bem utilizado pelos alunos.

O pensamento, tanto no campo numérico quanto no geométrico, pode ser articulado para o desenvolvimento do pensamento algébrico. “Pensar algebricamente é pensar em um número sem numeral, ao mesmo tempo em que o número está, ele não está” (SOUSA, 2004, p. 245).

Condições objetivas

No laboratório de informática, os alunos se sentaram em grupos, pois não havia computadores suficientes para toda a turma; então, formaram grupos de dois ou três alunos para cada máquina.

Figura 31: Alunos no laboratório de informática.
Fonte: Acervo da autora (2015).

O *software* utilizado, *KmPlo*t, foi limitado para desenvolver a atividade, visto que a proposta inicial era que os alunos plotassem os pontos para verificar o que ocorria. Foi possível apenas que os alunos percebessem a variação do gráfico formado, quando atribuíram um valor à função dada, ou seja, a variação da reta.

Primeiramente, deixamos que eles conhecessem o ambiente livremente, clicando em vários comandos para entender e verificar a sua funcionalidade, depois iniciamos a tarefa. Apresentamos alguns comandos para ele identificarem, então, pedimos para plotar a primeira relação encontrada na primeira situação dada na folha, $f(x) = 3n$. Em seguida, a próxima relação encontrada, $f(x) = 100n$ e, por último, $f(x)= 4n$. Depois de construírem cada uma delas, pedimos que plotassem outras relações livremente.

Significados apropriados pelos alunos

Assim os alunos perceberam que as retas foram variando, entendendo que modificavam a inclinação do gráfico (da reta). Também mostramos que poderiam colorir os gráficos. Pudemos constatar o que afirma Valente (2005, p. 47):

> Na verdade, o conhecimento ou as "ideias" expressas podem ser "executadas" pelo computador à medida que o programa é executado pela máquina, produzindo um resultado. É justamente este resultado que, quando confrontado com a ideia original, possibilita ao aprendiz rever seus conceitos e com isto aprimorá-los ou construir novos conhecimentos.

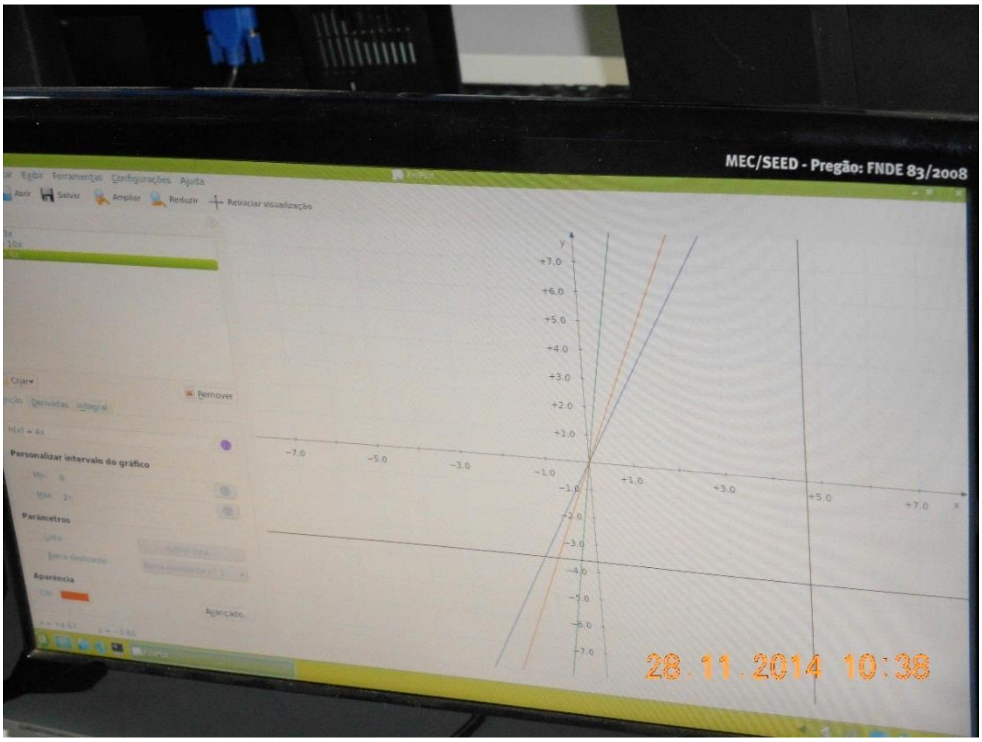


Figura 32: Atividade no *software KmPlot*.
Fonte: Acervo da autora (2015).

A pesquisadora, ao final da construção dos gráficos, foi elencando algumas perguntas para verificar o que os alunos entenderam.

Pesquisadora - Os gráficos plotados são todos iguais? Todos - Não. Pesquisadora - O que perceberam ao relacionar um gráfico com outro? Aluna A - As cores podem ser como a gente quer? Aluno M - As retas. Pesquisadora - Como assim, as retas? Aluno M - Todos os gráficos que fizemos 'é' uma reta. Pesquisadora - São retas, mais elas são iguais? Aluno P - Não, algumas estão mais tortas. Pesquisadora - Mas então por que elas ficam diferentes? Aluna B - Acho que é porque os números que colocamos são diferentes. Pesquisadora - Não entendi, pode me explicar? Aluna B: Quando escrevemos 3n ou 4n ficou diferente, é uma reta, mas não são iguais. Pesquisadora - Isso mesmo, é uma reta, mas o que modifica é a sua inclinação.
Análise: Movimento de atribuição de sentidos aos gráficos

Constatamos que o aluno reconheceu as variáveis presentes nas situações propostas e o papel exercido pelos coeficientes. O ambiente computacional favoreceu um ambiente de aprendizagem, possibilitando atitudes positivas dos alunos em relação à atividade e à ampliação dos significados de polinômios. Como se tratavam de funções polinomiais de primeiro grau, foi possível representá-las graficamente por meio de uma reta. Assim, como afirma Vigotski (2001, p. 121), "Das generalizações primitivas, o pensamento verbal vai-se elevando ao nível de conceitos mais abstratos. Não é apenas o conteúdo de uma palavra que se altera, mas a forma como a realidade é generalizada e refletida numa palavra", os alunos foram formando novos significados atribuídos ao polinômio.

4.5 Resultados e análises da quinta atividade: *O Significado de Polinômio na Perspectiva da Generalização de Padrões*

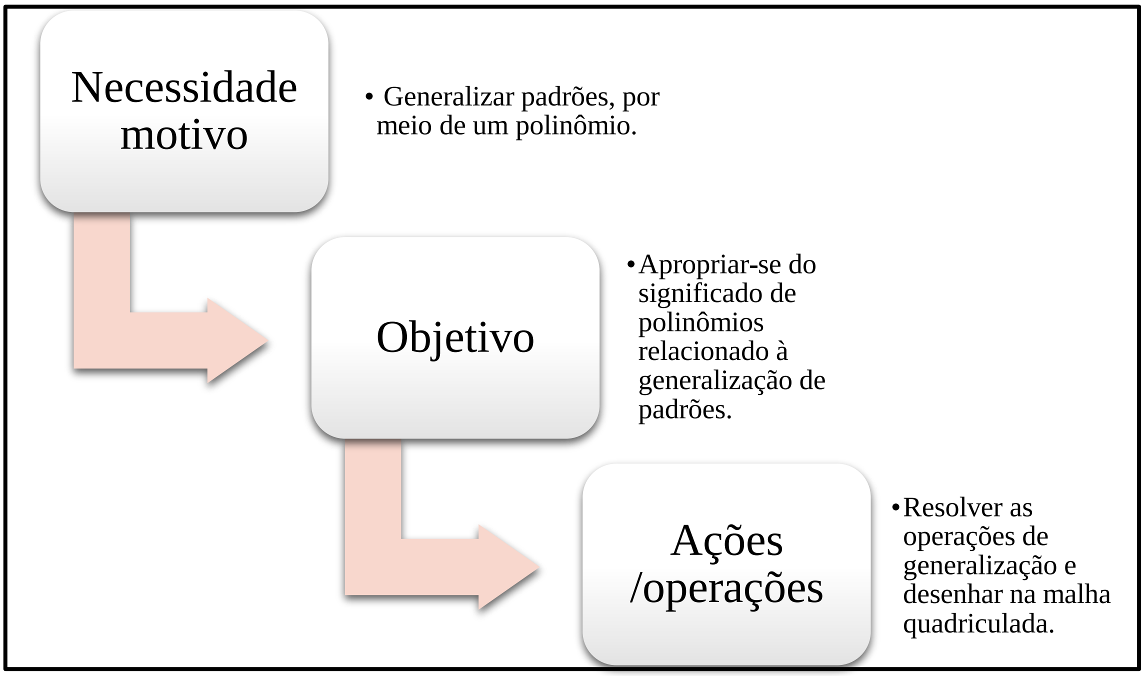


Figura 33: Esquema da atividade de generalização de padrões.
Fonte: Elaboração da autora (2015).

O processo de generalização é a consolidação do raciocínio algébrico, pois, na perspectiva de Vigotski (2010), generalização é sinônimo de significado, uma forma indiscutível de pensamento.

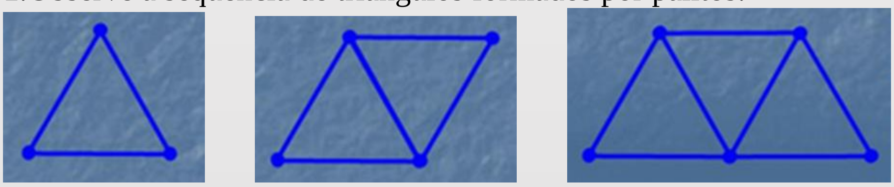
Nesta atividade, propusemos sequências de padrões geométricos que podem ser generalizadas por meio de um polinômio, a partir da observação das regularidades. Trata-se de uma atividade que busca aplicar o conceito geral de polinômio. Para desenvolver esta tarefa, era necessário que o aluno percebesse a regularidade das sequências encontradas, buscando um polinômio para expressá-la.

4.5.1 Análise das ações na Tarefa 1 da quinta atividade

Condições objetivas

Dentre as quatro tarefas desenvolvidas, todas envolviam a análise geométrica em busca da generalização algébrica, por isso foi selecionada somente uma para a análise.

1.Observe a sequência de triângulos formados por palitos:



a) No primeiro triângulo, precisamos de __ palitos para construí-lo.
b) Na segunda figura, onde há dois triângulos, precisamos de __ palitos para construí-los.
c) Na terceira figura, com três triângulos, precisamos de __ palitos para construí-los.
d) Se quero construir 4 triângulos, quantos palitos serão utilizados?
e) Se quero construir 5 triângulos, quantos palitos serão utilizados?
f) Se quero construir 8 triângulos, quantos palitos serão utilizados?
g) Se quero construir n triângulos, quantos palitos serão utilizados?
h) Essa expressão matemática encontrada é um polinômio? Explique sua resposta.

A generalização em álgebra é a ação de estabelecer e expressar as regularidades.

Como afirma Caraça (1984, p. 5), “O homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências”.

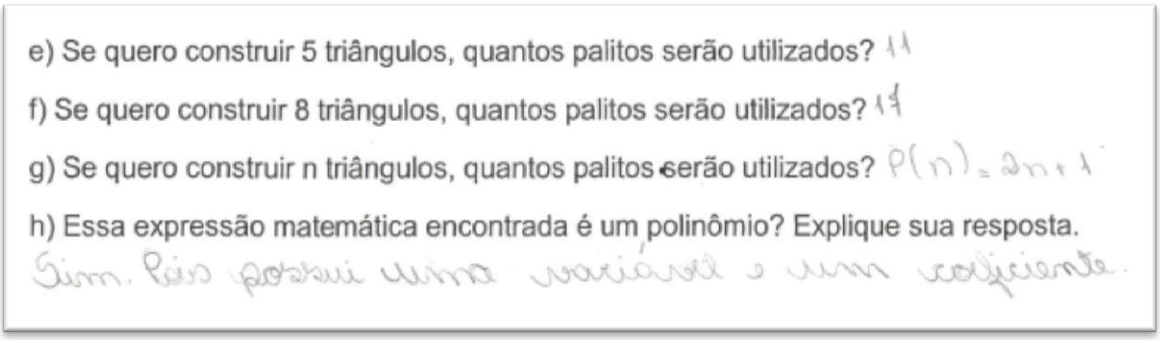
A quantidade de objetos dispostos nas figuras (como triângulos, quadrados, estrelas), iniciava com uma unidade de cada objeto. A sequência era alterada conforme um padrão de comportamento da situação. O padrão pode ser expresso aritmeticamente, e, em seguida, algebricamente. Esse processo parte da análise geométrica, envolve relações entre variáveis que podem ser expressas algebricamente.

Esse processo exige do aluno a percepção, como operação mental, das regularidades, das exclusões, das permanências e/ou constância, abstraindo uma propriedade que é geral a todos eles.

Significados apropriados pelos alunos

Quanto à realização da primeira tarefa, na qual deveriam completar a tabela, os grupos que ficaram presos à observação empírica responderam corretamente os primeiros itens que se limitavam à contagem, mas erraram os seguintes, porque não atingiram um nível de generalização para o padrão existente, como se pode constatar nos registros dos Grupos 3 e 4. O Grupo 3 escreveu o polinômio corretamente, mas não nos parece que tenha construído um significado para ele, pois manteve erradas as respostas anteriores. Há indícios de que os Grupos 1 e 2 se apropriaram do significado de polinômio associado à generalização do padrão existente na sequência.

GRUPO 1


e) Se quero construir 5 triângulos, quantos palitos serão utilizados? 11

f) Se quero construir 8 triângulos, quantos palitos serão utilizados? 17

g) Se quero construir n triângulos, quantos palitos serão utilizados? $P(n) = 2n + 1$

h) Essa expressão matemática encontrada é um polinômio? Explique sua resposta.

Sim. Pois possui uma variável e um coeficiente.

GRUPO 3

e) Se quero construir 5 triângulos, quantos palitos serão utilizados? 12

f) Se quero construir 8 triângulos, quantos palitos serão utilizados? 20

g) Se quero construir n triângulos, quantos palitos serão utilizados?

h) Essa expressão matemática encontrada é um polinômio? Explique sua resposta.

2n+1

GRUPO 4

e) Se quero construir 5 triângulos, quantos palitos serão utilizados? 11

f) Se quero construir 8 triângulos, quantos palitos serão utilizados? 15

g) Se quero construir n triângulos, quantos palitos serão utilizados? 22

n= 11

h) Essa expressão matemática encontrada é um polinômio? Explique sua resposta.

Sim

A apropriação do significado de polinômios associado à generalização de padrões é uma atividade que exige capacidades psíquicas superiores, como atenção, generalização e abstração, além do conceito de variáveis. Envolve as ideias de interdependência e de fluência, pois há movimento; portanto, o conceito de função.

Nas demais tarefas desta atividade, os grupos se comportaram da mesma forma, o que indica que a realização de atividades do mesmo tipo, sem a intervenção do professor na ZDP dos estudantes, não contribui para a apropriação de um conceito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pautados na Teoria Histórico-Cultural, neste estudo, partimos do pressuposto de que o homem se humaniza no seio da cultura criada por gerações anteriores no percurso da história. À medida que se apropria dos bens culturais historicamente acumulados, ele se desenvolve, transforma-se e transforma o mundo. Nesse processo de humanização, a educação, a escola e o processo ensino-aprendizagem têm papel fundamental. No espaço escolar, por meio de atividades de ensino devidamente organizadas, a criança, o jovem e o adulto têm a oportunidade de se apropriar dos conhecimentos teóricos das diversas áreas, dentre elas, a matemática.

Ao aprender, o homem se desenvolve e, à medida que se desenvolve, aprende. Esse princípio da Teoria Histórico-Cultural não separa desenvolvimento e aprendizagem, mas estabelece entre eles uma relação dialética. Segundo Vigotski (2003), todas as funções psíquicas, a atenção, a memória lógica e a formação de conceitos ocorrem sempre em dois níveis: primeiro entre as pessoas, nível interpessoal; e, depois, no interior da pessoa, nível intrapsíquico. Assim, o conhecimento não é um objeto "passado" de um para outro, mas é algo que se elabora por meio de operações e habilidades cognitivas, construídas na interação social.

Nesta pesquisa, tomamos como objeto "os polinômios", um conceito importante, no campo da álgebra, trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental nas escolas brasileiras. A álgebra, segundo o próprio Vigotski (2001), coloca-se num plano superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato. Insere-se no mesmo plano da linguagem escrita, portanto, uma simbolização de segunda ordem. Por esse motivo, o ensino da álgebra requer um cuidado especial com os significados, que constituem um fenômeno do pensamento e da linguagem, a unidade do pensamento e da palavra, para Vigotski (2001).

Com base no exposto, esta pesquisa foi orientada pela seguinte questão: como o aluno do 8º ano do Ensino Fundamental constrói significados para "polinômios" a partir de atividades de ensino, explorando diferentes concepções de álgebra?

Assim, o objetivo geral foi analisar os significados construídos pelos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental para o conceito de polinômio, explorando diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica, por meio de uma sequência de atividades de ensino. E os objetivos específicos foram: levantar as diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica na literatura em Educação Matemática; compreender como a Teoria Histórico-Cultural aborda a formação de conceitos científicos; investigar como os PCN, as matrizes curriculares do município de Uberaba-MG e o livro didático tratam a álgebra, de modo especial os polinômios; elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática de atividades, abordando o significado de polinômio, a partir de diferentes concepções de álgebra, buscando indícios da relação entre pensamento e linguagem algébrica.

A partir de pesquisa bibliográfica e documental, pudemos constatar que os PCN e os livros didáticos se baseiam principalmente na construção do conhecimento empírico, enfatizando a generalização empírica, indutiva. É recorrente a construção do conhecimento algébrico a partir de situações geométricas, envolvendo áreas e perímetro de figuras. Essa abordagem é limitada e pode mais dificultar do que facilitar o aprendizado do aluno, pois a medida tem um campo de variação limitado, somente assume valores positivos. Além disso, aquilo que é essencial, o geral, fica obscurecido, o que prejudica a apropriação dos conceitos científicos. Os polinômios são definidos com base em seus aspectos externos, como uma soma de monômios. O conceito de variável, fundamental para o conceito de polinômio e para toda a álgebra, não é explorado, assim como não o é o de função, embora presente nos exemplos apresentados.

A pesquisa de campo desenvolvida por meio de um experimento didático, realizado numa turma de alunos de 8º de uma escola municipal de Uberaba, nos permitiu fazer inferências quanto à apropriação de significados de polinômios ligados às várias concepções de álgebra, objetivo da pesquisa, como também com relação ao próprio experimento.

No que se refere à apropriação dos significados de polinômios, há indícios de que ocorreram saltos qualitativos, pois as atividades procuraram associar os polinômios às diferentes concepções de álgebra, o que possibilitou a ampliação da ideia restrita de polinômio como soma de monômios. O processo do desenvolvimento algébrico se caracteriza pelo compartilhamento de significados e pela criação de sentidos, no contexto de busca de uma relação dialética entre o pensamento e a linguagem algébricos.

Na realização das atividades propostas, podemos destacar, ainda, as ações coletivas dos sujeitos envolvidos, nas quais os alunos desenvolveram e compartilharam um objetivo comum. Houve interação e cooperação entre os membros dos grupos – os alunos refletiam, discutiam e argumentavam. Constatamos que houve diálogo e planejamento das ações, possibilitando solucionar a atividade. Cada aluno respeitou e permitiu que o outro falasse, dando a sua contribuição, agindo na ZDP dos colegas.

As atividades foram planejadas a partir de uma necessidade que pudesse despertar o interesse e a motivação dos alunos para a apropriação do significado de polinômios, por meio de várias concepções algébricas. Ao verificar o entusiasmo dos alunos em desenvolver e desvendar a resolução de algumas atividades, constatamos que houve a motivação da maioria deles, o que permitiu transformar as atividades de ensino em atividades de aprendizagem.

Durante algumas atividades, percebemos as ações dos alunos, ao transformar de uma linguagem algébrica para outra, uma experiência carregada de sentido e significado, desta forma sinalizando que a tarefa desenvolvida resultou em aprendizagem e perpassou o desenvolvimento de funções psíquicas superiores: a memória, a atenção voluntária, a generalização e a abstração. Diagnosticamos que houve indícios de que a linguagem oral é mais fácil, pois, ao transcreverem, muitas vezes o faziam incorretamente. Entretanto, algumas tarefas não contribuíram para a apropriação do significado de variável e nem de polinômio. As ações tiveram mais um caráter de operações, uma vez que alguns grupos não se apropriaram da atividade, não demonstraram perceber a essência articulada na atividade, como ocorreu na atividade do *Quebra-Poli*.

Com relação ao experimento didático, especificamente ao planejamento das atividades, pelo fato de os alunos já terem estudado o assunto polinômios, acreditávamos que as atividades teriam o objetivo de permitir ampliar o significado construído – polinômio como soma de monômios -, que não evidencia aquilo que é geral, uma função que tem uma característica própria. Para esse conceito científico, as ideias de variável, de campo de variação, de interdependência são fundamentais. Como esses conceitos não são adequadamente desenvolvidos, os alunos não haviam se apropriado deles, o que trouxe dificuldades para a realização de várias tarefas, como indicamos nas análises. O experimento deveria ter incluído atividades relacionadas ao conceito de variável. Esse fato corrobora o que afirmam os teóricos da perspectiva histórico-cultural: os conceitos se relacionam, constituem uma rede, ou ainda, um sistema, quando atingem o nível intrapsíquico.

Concordamos que um tratamento formal, que não gera significados para o aluno, não é recomendado de fato. Porém, o conceito de função pode ser tratado como um conceito científico, naquilo que ele tem de essencial e de genérico, nesse nível de ensino, de modo a extrapolar o nível empírico com que é abordado. Essa abordagem que não explora o conceito de função, enfocando os seus nexos internos, gera problemas para a abordagem dos polinômios, que acabam aparecendo como soma de monômios. E, monômios, por sua vez, como expressão algébrica constituída de letras e números.

Outro aspecto relacionado ao planejamento das atividades que gostaríamos de apontar é a dificuldade que temos de pensar atividades que focam o geral, o lógico-histórico dos conceitos, os nexos internos. Apesar de discutirmos teoricamente a proposta de outra lógica, ainda nos mantemos presos a uma lógica tradicional, que valoriza o conhecimento empírico.

Mais pesquisas precisam ser realizadas, buscando romper com essa lógica, pois foi possível perceber que a generalização empírica não conduz à generalização teórica. Certamente, se fôssemos realizar a pesquisa hoje, haveria uma vigilância maior e uma busca de atividades que ultrapassassem a lógica indutiva. A pesquisa é também momento de desenvolvimento profissional e de aprendizagens.

Outras dificuldades surgem na execução do experimento. Uma delas é o fato de a pesquisadora ter que desenvolver o experimento, orientando e instigando os alunos e, ao mesmo tempo, acompanhar e registrar as observações relacionadas aos objetivos da pesquisa. Outra dificuldade é conciliar os tempos, da escola, dos alunos, da professora e da pesquisadora. O experimento não pode extrapolar um espaço temporal concedido pela escola, mesmo que haja necessidade. No caso específico deste estudo, não foi possível fazer uma avaliação geral ao final, pois o semestre já estava se encerrando e outras atividades, acontecendo.

Concluindo, fica a sensação de que a pesquisa não terminou, pois as considerações indicam necessidades e caminhos para novas empreitadas na busca de um ensino de álgebra que permita vislumbrar a sua importância no desenvolvimento da matemática e das ciências de modo geral.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ARAÚJO, E. S. Rubinstein: Um grande psicólogo, uma grande personalidade. In: LONGAREZI, A. M.; PUENTES, R. V. (Orgs). **Ensino Desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

BERNARDES, M. E. M. **Mediações simbólicas na atividade pedagógica:** contribuição da teoría histórico cultural para o ensino e aprendizagem. 1. ed. Curitiba. PR: CRV, 2012.

BOCK, A. M. B. **A perspectiva sócio-histórica de Leontiev e a crítica à naturalização da formação do ser humano**: a adolescência em questão. Cad. CEDES [online]. 2004, vol.24, n.62.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo, Atual Editora, 1995.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/ConstituicaoCompilado.htm>. Acesso em: 15 abr. 2015.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: MATEMÁTICA. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

DAMAZIO, A. **O Desenvolvimento de Conceitos Matemáticos no Contexto do Processo Extrativo de Carvão**. Tese (Doutorado) – UFSC, Florianópolis, 2000.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus, 1986.

DAVIDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscou: Progreso, 1988.

______. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. (Org.). **La Psicologia evolutiva y pedagógica em la URSS**: antologia. Moscou: Progreso, 1987.

______. O que é a atividade de estudo. **Revista Escola inicial** nº 7, ano 1999. Tradução do Russo de Ermelinda Prestes.

______. Problemas do ensino desenvolvimental - A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. **Revista Soviet Education**, August/VOL XXX, N° 8, 1986.

______. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Habana: Editorial Pueblo y Educación. 1982.

______; MÁRKOVA, A. La concepción de la actividad de estudio de los escolares. In: **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**. (Antología). Biblioteca de Psicología Soviética. Moscú: Progreso, 1987.

DOMÍNGUEZ, G. Laura. Cuestiones Psicológicas del Desarrollo de la Personalidad. Editora Universitaria. Universidad de La Habana, Cuba, 1990. Primera parte. Capítulo titulado Caracterización de diferentes etapas de desarrollo de la personalidad. Epígrafes: La Adolescencia y La Edad Juvenil (de la página 112 a la página 136 y de la página 137 a la página 150, respectivamente e el libro original). In: **SELECCIÓN DE LECTURAS**. Psicología del Desarrollo: Adolescencia y Juventud. Universidad de La Habana Facultad de Psicología.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino Domingues 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FACCI, M. G. D. Periodização do desenvolvimento psicológico individual na perspectiva de Leontiev, Elkonin e Vigostski. **Cad. CEDES** [online]. 2004, vol.24, n.62.

FIGUEIREDO, A. de C. **Saberes e concepções de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática**. 2007. 288 f. Tese (doutorado). PUC-SP. São Paulo: 2007.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO. 2005, Portugal. Disponível em: <http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte>. Acesso em: 21 abr. 2015.

______.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pró-Posições**, v.4, n.1[10], p.78-91, mar. 1993.

FREITAS, R. A. M. M.. **O experimento didático-formativo**. Texto digitado. 2007.

FROMM, E. **Conceito marxista do homem**. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1983.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equação. volume 1, 5a. edição. São Paulo: Atual, 2001.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2005.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **O currículo tradicional e o problema**: um descompasso. SBEM – Educação Matemática em Revista, 1994. v. 2, n. 2.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os participantes em álgebra. In: COXFORD, A. & SHULTE, A. (Org) **As ideias de álgebra**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995.

KOPNIN, P. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento.** Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEE, Lesley. Early – but wich algebra? **The future of the teaching and learning of algebra**. In: ICMI STUDY CONFERENCE, 12, 2001, Melbourne (Austrália). Proceedings. Melbourne: ICMI, 2001.

LEONTIEV, A. N. **Actividad, Conciencia, Personalidad**. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo Y Educación, 1983.

______. **O desenvolvimento do psiquismo**. (Fragmento). Lisboa: Horizonte, 1978.

______. Os princípios do desenvolvimento mental e o problema do atraso mental. In: LURIA, A. R. et al. **Psicologia e Pedagogia:** bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento. Tradução de Rubens Eduardo Frias. São Paulo: Moraes, 1991.

LIBÂNEO, J.C. **Organização e gestão da escola**: teoria e prática, 5. ed. Goiânia, Alternativa, 2004

________. Experimento didático como procedimento de investigação em sala de aula (texto de uso didático). 2009. Digitado.

______. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação** (digitado), 2004.

______; FREITAS R. A. M. M. Disciplina “**Teorias da educação e processos pedagógicos”**. Mestrado e doutorado em educação, UCG, 16 de março de 2009. Impresso digitado.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P.C.; MORGADO A.; WAGNER E. **A matemática no Ensino Médio**. Volume 2. SBM, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2001.

LURIA, Alexander R. **A construção da mente**. Tradução de Marcelo Brandão Cipolla. São Paulo: Ícone, 1987.

MARX, K.; ENGELS, F. **A Ideologia Alemã.** Introdução de Jacob Gorender. Tradução: Luís Claudio de Castro e Costa, 2001. São Paulo: Boitempo, 2007.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da trigonometria. In: MIGUEL, A.; BRITO, A. de J.; CARVALHO, D. L de; MENDES, I. A. **História da matemática em atividades didáticas.** 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MOISÉS, R. P. **A resolução de problemas na perspectiva histórico/lógica: o problema em movimento.** 1999. 156f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

MOURA, M. et al. A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, M. (org.) **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília, DF: Liber Livro, 2010.

MOURA, Manoel O. **A construção do signo numérico em uma situação de ensino**. 1992. 151 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

______. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formativa. In: BARBOSA, R. L. **Trajetórias e perspectivas na formação de educadores**. Marília: Editora da Unesp, 2004.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev, Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

OLIVEIRA, D. C. de. **Indícios de apropriação dos nexos conceituais da álgebra simbólica por estudantes do Clube de Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

PANOSSIAN, M. L. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PEIXOTO, J. Tecnologias e práticas pedagógicas: as TIC como instrumentos de mediação. In: LIBÂNEO, José Carlos; SUANNO, Marilza Vanessa Rosa (Orgs.). **Didática e escola em uma sociedade complexa**. Goiânia: CEPED, 2011.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. S.; MORETTI, V. D. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. (Org.) **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010.

ROSA, J. E.; MORAES, S. P.; CEDRO, W. L. As particularidades do pensamento empírico e do pensamento teórico na organização do ensino. In: MOURA, M. O. (org.) **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010.

RUBTSOV, V. A atividade de aprendizagem e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I. (Orgs.). **Após Vygotsky e Piaget:** perspectiva social e construtivista: escola russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SANTOS, L. G. dos. **Introdução do pensamento algébrico**: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.

SFORNI, M. S de F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino**: contribuições da teoria da atividade. 1. ed. Araraquara: JM Editora, 2004.

______. Interação entre Didática e Teoria Histórico-Cultural. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 375-397, abr./jun. 2015.

_______. Aprendizagem e desenvolvimento: o papel da mediação. In: CAPELLINI, V. L. F.; MANZONI, R. (Orgs.). **Políticas públicas, práticas pedagógicas e ensino-aprendizagem**: diferentes olhares sobre o processo educacional. 1ª ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008. Disponível em: <http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/ibaiti/ arquivos/File/Sforni.pdf>. Acesso: 17 fev. 2015.

SISTEMA DE ENSINO CNEC. **Ensino Fundamental.** Matemática. 8º ano. Uberaba: Editora e Gráfica Cenecista Dr. José Ferreira, 2013.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatadas de professores do ensino fundamental. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2004.

______; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2014.

SOUZA, J. R. de; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática, 8º ano**. 2º ed. São Paulo: FTD, 2012.

UBERABA, Secretaria Municipal de Educação e Cultura. **Matrizes Curriculares Municipais:** Ensino Fundamental. Ensino Fundamental / 6° ao 9° ano / Matemática. 1° ed. / Secretaria Municipal de Educação e Cultura. Uberaba: PMU, 2014.

USISKIN, Z. O que é álgebra da escola média? In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VALENTE, J. A. **Espiral da espiral de aprendizagem**: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. Tese de Livre Docência - UNICAMP, Campinas, 2005.

VAZ, D. A. F. **A Influência da Matemática nas Regras para Direção do Espírito e o Discurso do Método**. Tese (Doutorado) - Unesp, Rio Claro, 2007.

______. O Método Cartesiano Aplicado à Geometria. Goiânia, 2011.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Tradução Paulo Bezerra. 2. Ed. São Paulo: Editora WMF Martins Fontes, 2009.

______. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 5.ed. São Paulo, Martins Fontes, 2003.

______. **A transformação socialista do homem**. URSS: Varnitso, 1930. In: Marxist Internet Archive. Trad. Nilson Dória. MIA: 2004. Disponível em: <https://www.marxists.org/portugues/vygotsky/1930/mes/transformacao.htm>. Acesso em: 15 ago. 2014.

VYGOTSKI, L. S. **Obras Escogidas II** (Pensamiento Y Lenguaje). Traducción: José Maria Bravo. 2 ed. Madrid: A. Machado Libros, S. A., 2001.

______. **Obras Escogidas III** (Problemas del desarollo de la psique). Traducción: Lydia Kuper. 2 ed. Madrid: Machado Grupo de Distribución, S. L., 2012.

______. O significado Histórico da Crise da Psicologia. Uma investigação metodológica. In: **Teoria e método em psicologia**. São Paulo, Martins Fontes, 1996.

______, L. S; LURIA, A. R; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Trad. Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 1988.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Uberaba, ... de .... de 2014.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome do sujeito da pesquisa
Identificação (RG) do sujeito:
Título do projeto: **A formação do conceito de polinômio no Ensino Fundamental: um estudo na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural**.
Instituição onde será realizado: Universidade de Uberaba.
Pesquisador Responsável: Marilene Ribeiro Resende.
Identificação: marilene.resende@uniube.br – (34) 3319 8811.
CEP-UNIUBE: Av. Nenê Sabino, 1801 – Bairro: Universitário – CEP: 38055-500 - Uberaba/MG, tel: 34-3319-8959 / E-mail: cep@uniube.br

Você, ____

_____________________________________ *(colocar o nome)* está sendo convidado para participar do projeto "A formação do conceito de polinômio no Ensino Fundamental: um estudo na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural," de responsabilidade da Profª. Marilene Ribeiro Resende e com a participação da Pesquisadora Assistente, Soraia Abud Ibrahim; desenvolvido na Universidade de Uberaba**.**

Este projeto tem como objetivo investigar a formação do conceito de polinômio, no contexto da aprendizagem da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, com foco nos processos de generalização, visando ao desenvolvimento do aluno.

Este projeto se justifica devido às dificuldades apresentadas pelos alunos nesse conteúdo. Pode trazer como benefício a possibilidade de melhor compreensão desse conceito.

Se aceitar participar deste projeto, as suas aulas serão observadas pelas pesquisadoras durante certo período; posteriormente, após sua análise, será realizado por você um conjunto de atividades de ensino. Sua participação se estende à análise dos dados e à apreciação dos resultados obtidos, por meio de diálogos com as pesquisadoras.

Toda pesquisa envolve algum tipo de risco, como a perda do anonimato, entretanto, medidas protetoras serão tomadas pelas pesquisadoras. Os seus dados e os dos participantes serão mantidos em sigilo e serão utilizados apenas com fins científicos, tais como apresentações em congressos e publicação de artigos científicos. Seu nome ou qualquer identificação, como sua voz, foto, etc., jamais aparecerá.

Pela sua participação no estudo, você não receberá qualquer pagamento, e também não terá nenhum custo. Você pode deixar de participar a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo para você. Sinta-se à vontade para solicitar, a qualquer momento, os esclarecimentos que você julgar necessários. Caso decida-se pela não participação, ou por não ser submetido a algum procedimento que lhe for solicitado, nenhuma penalidade lhe será imposta.

Você receberá uma cópia deste termo, assinada pela equipe, onde constam a identificação (nome e número de registro – se houver) e os telefones da equipe de pesquisadores, caso você queira entrar em contato com eles.

____

Nome do sujeito e assinatura

____

Marilene Ribeiro Resende – (34) 3319 8811

Pesquisadora Responsável

____

Soraia Abud Ibrahim – (34) 3319 8847

Pesquisadora Assistente

APÊNDICE B

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE POLINÔMIO NO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL. Neste projeto, pretendemos desenvolver atividades de estudo para verificar a formação de um importante conceito matemático, o conceito de polinômio, estudado no 8º ano. Para o desenvolvimento deste projeto, será realizado um experimento de ensino, que inclui atividades a serem realizadas durante as aulas de matemática. Essas atividades serão registradas por meio de relatórios, fotografias e gravações em áudio e vídeo.

A sua participação depende também da autorização de seu responsável. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar. A sua recusa não lhe trará qualquer penalidade. Os riscos que podem ocorrer são mínimos, como por exemplo, a divulgação não intencional de seu nome, sua voz e sua imagem. No entanto, serão tomadas todas as providências para que isso não ocorra. Sua participação poderá lhe trazer benefícios, pois as atividades a serem realizadas têm o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos. Os resultados estarão à sua disposição, quando finalizada a pesquisa. Este termo encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável e a outra será fornecida a você.

Eu, ____, aluno(a) do 8º ano ____ da Escola Municipal Uberaba, tomei conhecimento das atividades de pesquisa que serão realizadas na escola e, por minha livre e espontânea vontade, decidi que:

☐ **Aceito participar das atividades de pesquisa.**

☐ **Não aceito participar das atividades de pesquisa**.

Uberaba, de de 2014.

______________________________________ ______________________________________

Assinatura do aluno (menor) Assinatura do Professor Pesquisador

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADORA ASSISTENTE: Soraia Abud Ibrahim

Telefone e e-mail: 3319 8847 - soraiabud@gmail.com

PESQUISADORA RESPONSÁVEL: Profª. Drª. MARILENE RIBEIRO RESENDE
Telefone e e-mail: 3319 8831 – marilene.resende@uniube.br

O responsável por você deve assinar um termo para consentir a sua participação.

APÊNDICE C

Uberaba, ... de .... de 2014.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome do sujeito da pesquisa
Nome do responsável:
Identificação (RG) do responsável:
Título do projeto: **A formação do conceito de polinômio no Ensino Fundamental: um estudo na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural**.
Instituição onde será realizado: Universidade de Uberaba.
Pesquisador Responsável: Marilene Ribeiro Resende.
Identificação: marilene.resende@uniube.br – (34) 3319 8811.
CEP-UNIUBE: Av. Nenê Sabino, 1801 – Bairro: Universitário – CEP: 38055-500- Uberaba/MG, tel: 34-3319-8959 / E-mail: cep@uniube.br

Seu/Sua
____ (colocar o nome e grau de parentesco do sujeito, no caso de menores) está sendo convidado(a) para participar do projeto "A formação do conceito de polinômio no Ensino Fundamental: um estudo na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural," de responsabilidade da Profª. Marilene Ribeiro Resende, e com a participação da Pesquisadora Assistente, Soraia Abud Ibrahim; desenvolvido na Universidade de Uberaba**.**

Este projeto tem como objetivo trabalhar um importante conceito de matemática, o conceito de polinômio, visando à aprendizagem e ao desenvolvimento do aluno.

Este projeto se justifica devido às dificuldades apresentadas pelos alunos nesse conteúdo. Pode trazer como benefício a possibilidade de melhor compreensão desse conceito.

Se aceitar participar deste projeto, o aluno será submetido a um conjunto de atividades de ensino, elaboradas pelas pesquisadoras, as quais serão desenvolvidas em sala de aula, com a participação da professora da turma, sem comprometimento do programa da disciplina, pois esse assunto deve ser desenvolvido no 8º ano. Toda pesquisa envolve algum tipo de risco, como a perda do anonimato, entretanto, medidas protetoras serão tomadas pelas pesquisadoras.

Os dados dos participantes serão mantidos em sigilo e serão utilizados apenas com fins científicos, tais como apresentações em congressos e publicação de artigos científicos. Seu nome ou qualquer identificação, como sua voz, foto, etc., jamais aparecerá.

Pela sua participação no estudo, o aluno e o responsável não receberão qualquer pagamento, e também não terão nenhum custo. O aluno pode deixar de participar a qualquer momento, sem nenhum tipo de prejuízo para ele. Sinta-se à vontade para solicitar, a qualquer momento, os esclarecimentos que você julgar necessários. Caso decida-se pela não participação, ou por não ser submetido a algum procedimento que lhe for solicitado, nenhuma penalidade será imposta.

Você receberá uma cópia deste termo, assinada pela equipe, onde constam a identificação (nome e número de registro – se houver) e os telefones da equipe de pesquisadores, caso você queira entrar em contato com eles.

____

Nome do responsável e assinatura

____

Marilene Ribeiro Resende – (34) 3319 8811

Pesquisadora Responsável

____

Soraia Abud Ibrahim – (34) 3319 8847

Pesquisadora Assistente

APÊNDICE D

UNIUBE Educação e Responsabilidade Social Escola Municipal Uberaba	**MESTRADO EM EDUCAÇÃO** **Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende** **Profª. Soraia Abud Ibrahim**

Aluno:____ 8º ano.

Sua idade______________.

1.Você gosta de matemática?
(   ) Sim   (   ) Não
2. Você tem facilidade para aprender matemática?
(   ) Sim   (   ) Não
3. Você já estudou álgebra?
(   ) Sim   (   ) Não
4. Para você, o que é álgebra?

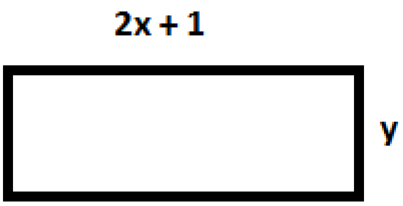
5. Quais os conteúdos de álgebra que você já estudou?

6. Você já estudou equações?

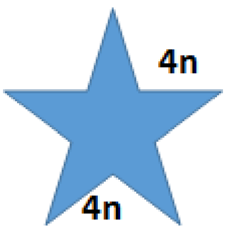
(   ) Sim   (   ) Não

7. Para você, o que são equações?

8. Calcule o perímetro do polígono a seguir, sabendo que o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados



9. Calcule o perímetro, sabendo que os seus lados medem 4n.



10. Seja a expressão: $\mathbf{5m^2 + 3m - 4}$. Qual é o valor numérico dessa expressão, quando atribuímos a **m** o valor **(-2)**?

11. Se **16 + b = c**, quanto vale **c - 8**?

12. Se $x + 3b = y - 4b$.

a) Quanto vale **x**?

b) Quanto vale **y**?

c) Quanto vale **x – y**?

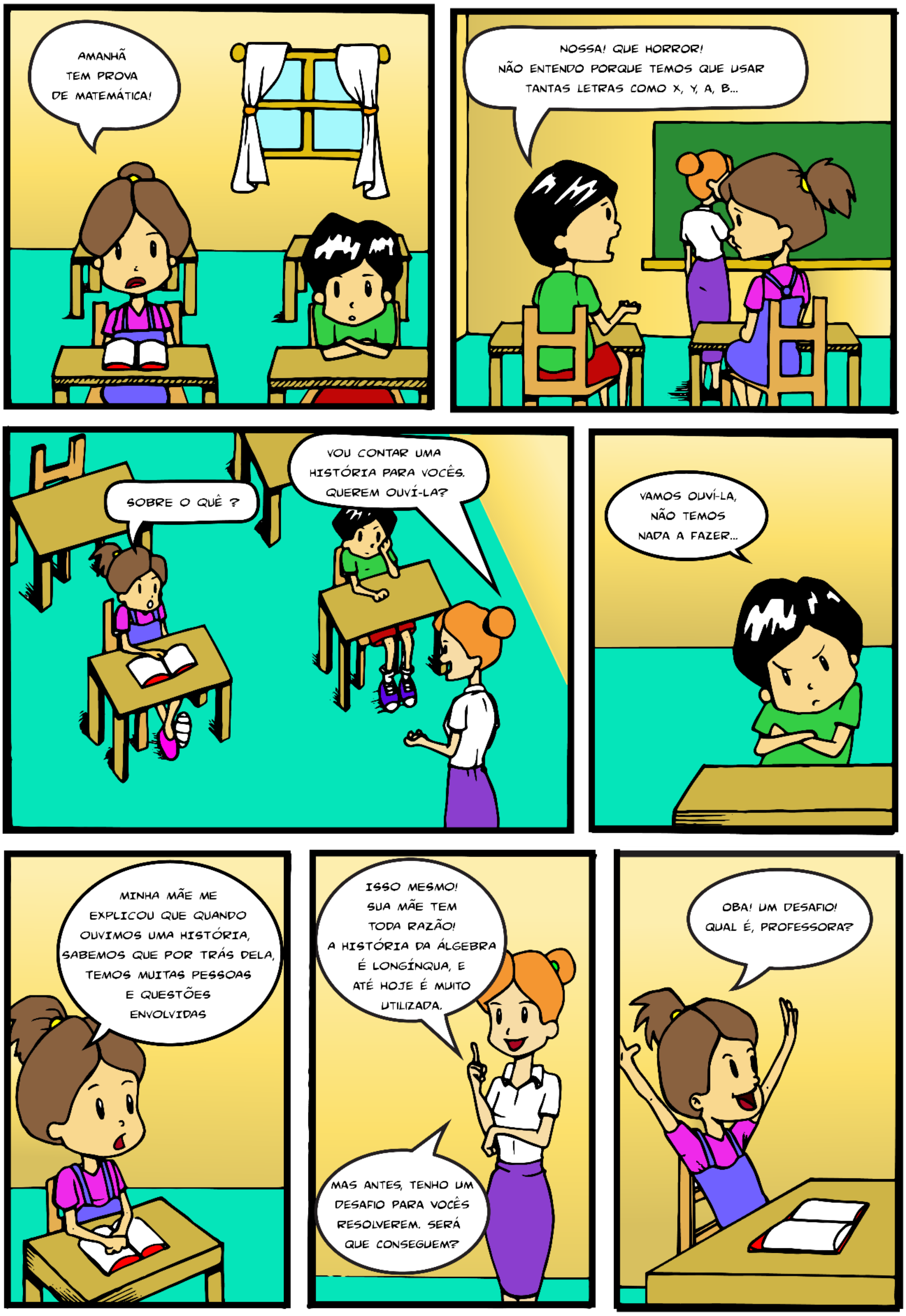
Obrigada pela sua participação!

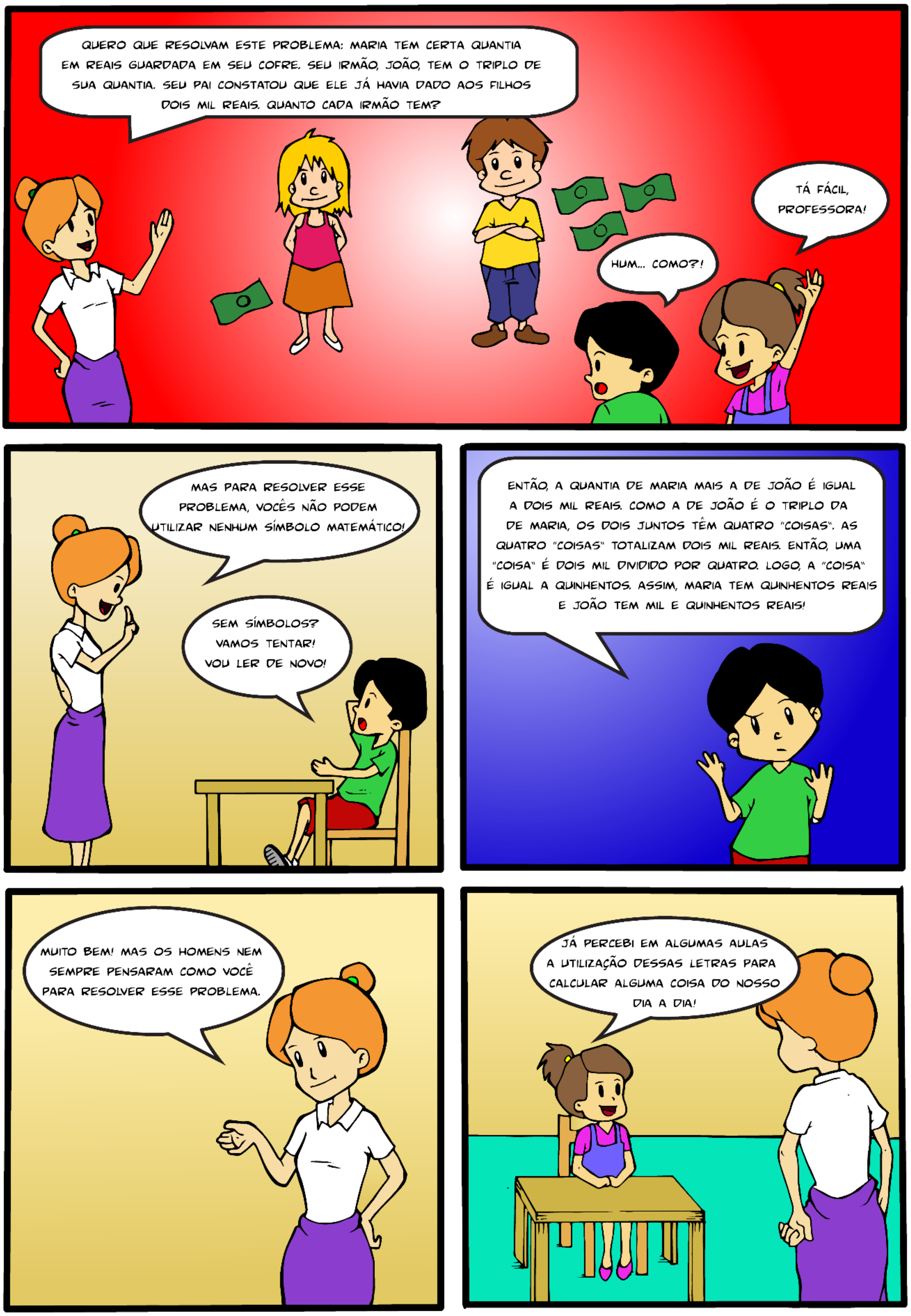
Prof[a]. Soraia

APÊNDICE E

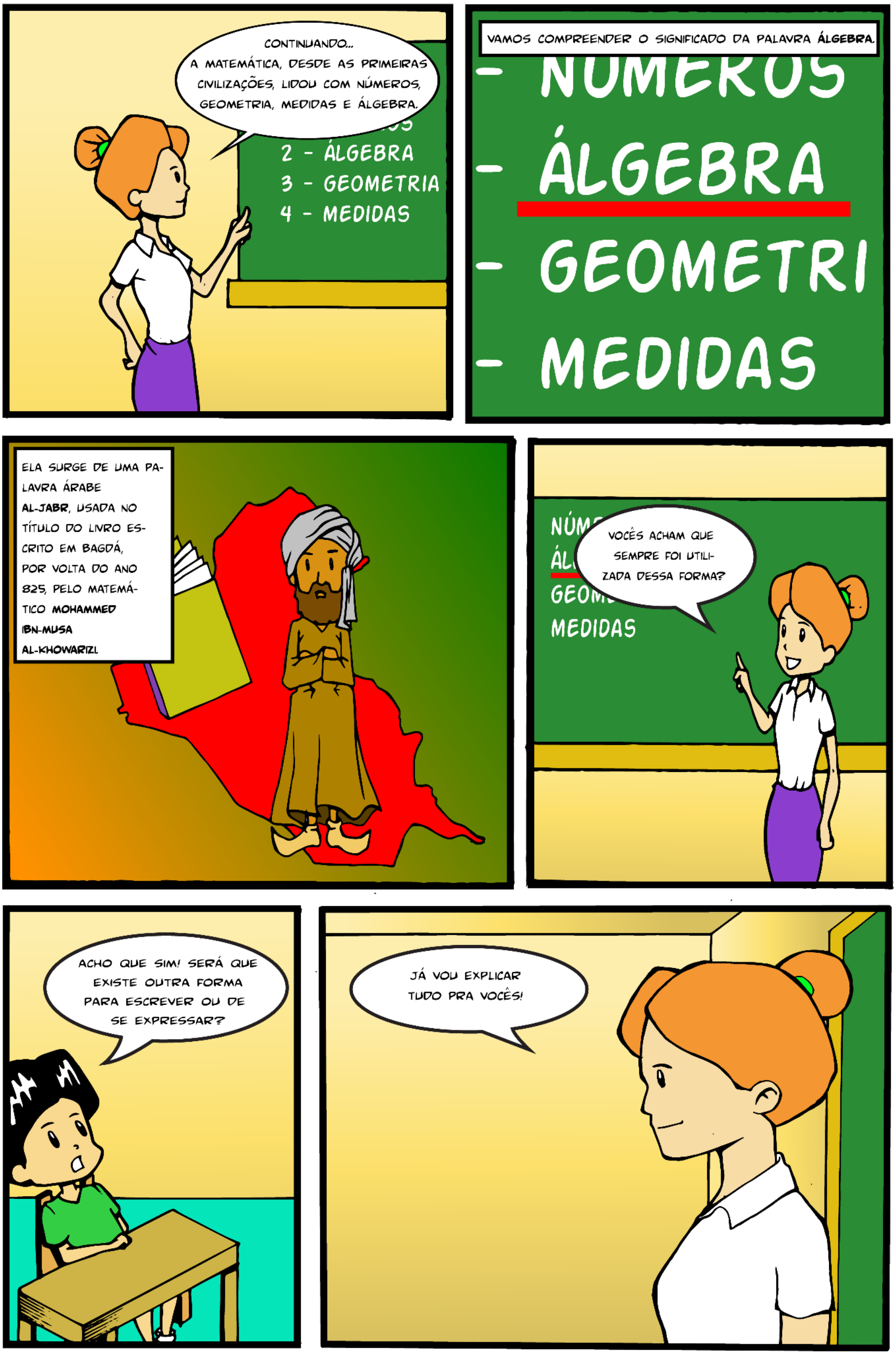

A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA
Δ=b²-4×a×c
ax² + bx + c = 0
= 4
2x
x
ax+b=0
12
π
+
3,1415...
ROTEIRO
MARILENE RIBEIRO
SORAIA IBRAHIM
ILUSTRAÇÕES
CARLOS LACERDA

HISTÓRIA DA LINGUAGEM ALGÉBRICA



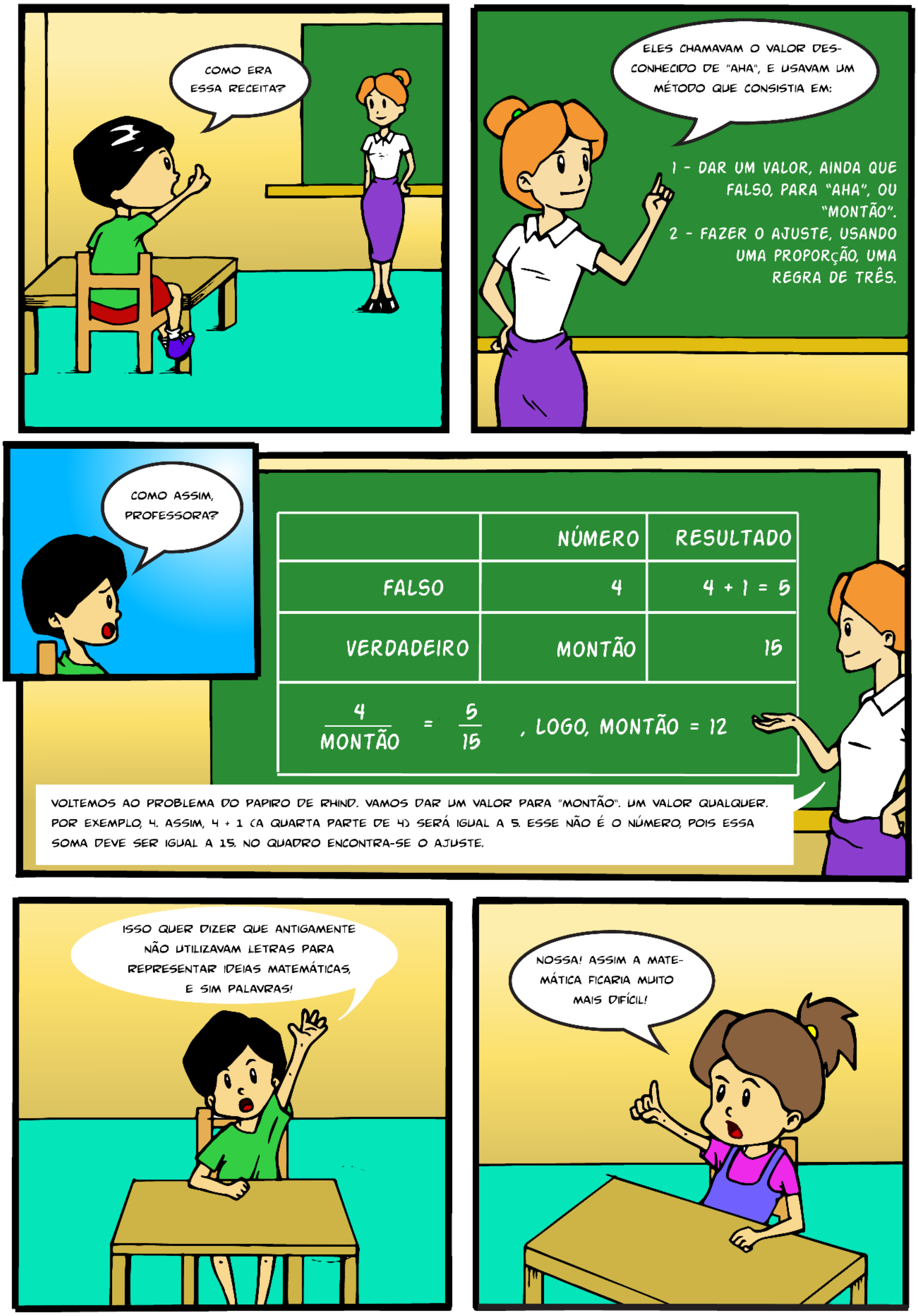

QUERO QUE RESOLVAM ESTE PROBLEMA: MARIA TEM CERTA QUANTIA EM REAIS GUARDADA EM SEU COFRE. SEU IRMÃO, JOÃO, TEM O TRIPLO DE SUA QUANTIA. SEU PAI CONSTATOU QUE ELE JÁ HAVIA DADO AOS FILHOS DOIS MIL REAIS. QUANTO CADA IRMÃO TEM?
TÁ FÁCIL, PROFESSORA!
HUM... COMO?!
MAS PARA RESOLVER ESSE PROBLEMA, VOCÊS NÃO PODEM UTILIZAR NENHUM SÍMBOLO MATEMÁTICO!
SEM SÍMBOLOS? VAMOS TENTAR! VOU LER DE NOVO!
ENTÃO, A QUANTIA DE MARIA MAIS A DE JOÃO É IGUAL A DOIS MIL REAIS. COMO A DE JOÃO É O TRIPLO DA DE MARIA, OS DOIS JUNTOS TÊM QUATRO "COISAS". AS QUATRO "COISAS" TOTALIZAM DOIS MIL REAIS. ENTÃO, UMA "COISA" É DOIS MIL DIVIDIDO POR QUATRO. LOGO, A "COISA" É IGUAL A QUINHENTOS. ASSIM, MARIA TEM QUINHENTOS REAIS E JOÃO TEM MIL E QUINHENTOS REAIS!
MUITO BEM! MAS OS HOMENS NEM SEMPRE PENSARAM COMO VOCÊ PARA RESOLVER ESSE PROBLEMA.
JÁ PERCEBI EM ALGUMAS AULAS A UTILIZAÇÃO DESSAS LETRAS PARA CALCULAR ALGUMA COISA DO NOSSO DIA A DIA!

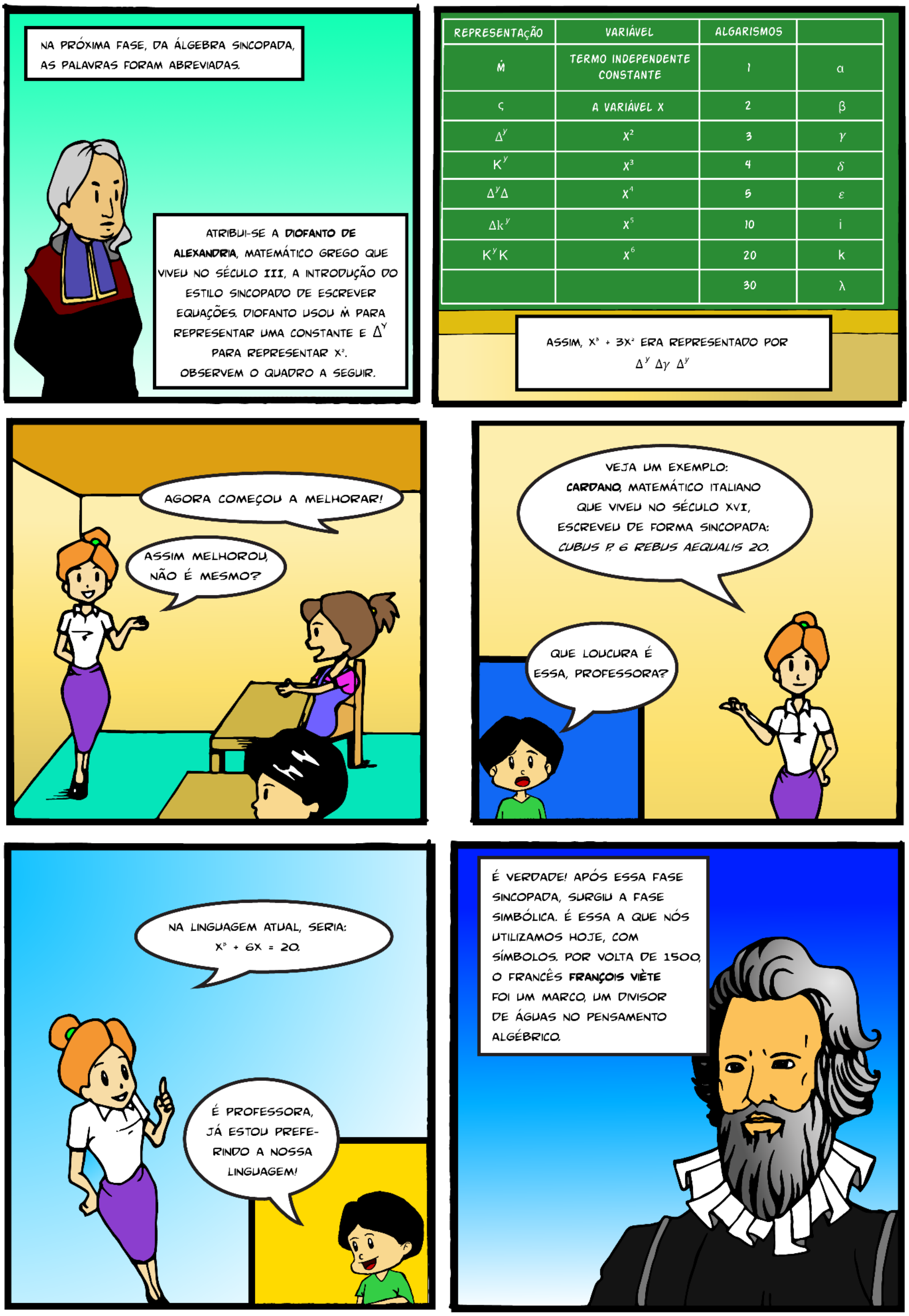

O QUE É INTERESSANTE É PERCEBER QUE AS LETRAS PODEM SER UTILIZADAS PARA...
...DESIGNAR OS NÚMEROS, MAS TAMBÉM PARA FACILITAR OS PROCEDIMENTOS DE...
...CÁLCULO, QUE VARIAM COM A CULTURA E COM O TEMPO.
A MATEMÁTICA É O RESULTADO DA HISTÓRIA COLETIVA DOS HOMENS
QUE LEGAL! NUNCA ASSOCIEI A HISTÓRIA COM A MATEMÁTICA!
SEMPRE ACHEI QUE ISSO ERA NOVO, MAS PARECE QUE NÃO, NÃO É ISSO PROFESSORA?
ISSO MESMO! VEJA ESSE EXEMPLO: OS HOMENS UTILIZARAM SEUS CORPOS COMO INSTRUMENTO...
... DE CÁLCULO E DE MEDIDA. ENTÃO PODEMOS DIZER QUE A MÃO FOI A PRIMEIRA MÁQUINA DE CONTAGEM E ISSO ACONTECEU NOS ANTIGAS...
... CIVILIZAÇÕES, HÁ MUITOS E MUITOS ANOS. VOCÊS SABIAM QUE OS PASTORES UTILIZAVAM PEDRAS PARA FAZER CONTAS? DAÍ A ORIGEM DA PALAVRA CALCULAR, QUE É TANTO UTILIZADA NA MATEMÁTICA, E QUE SIGNIFICA CONTAR COM PEDRAS!
= 2
= 5
= 3

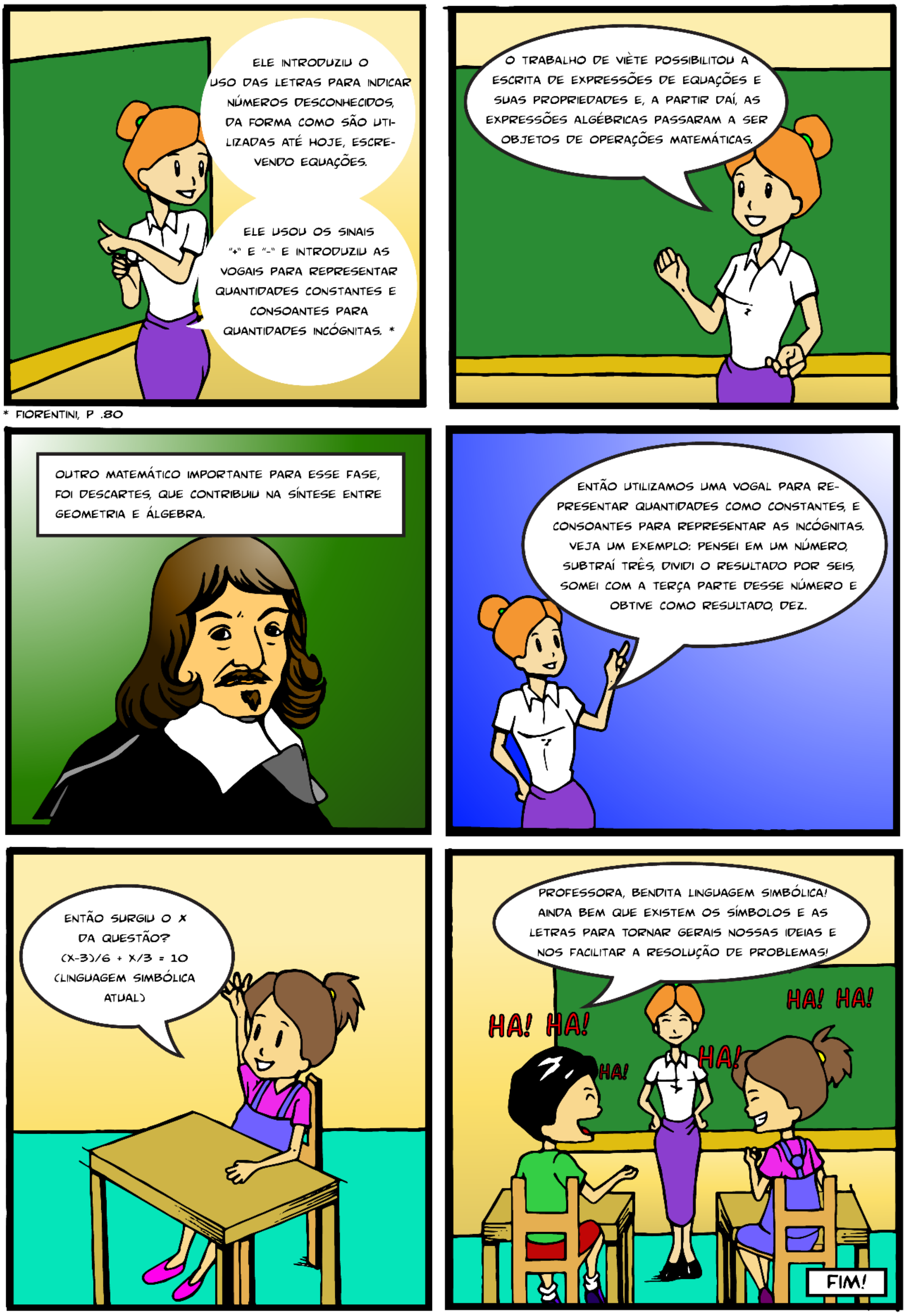

CONTINUANDO...
A MATEMÁTICA, DESDE AS PRIMEIRAS CIVILIZAÇÕES, LIDOU COM NÚMEROS, GEOMETRIA, MEDIDAS E ÁLGEBRA.
2 - ÁLGEBRA
3 - GEOMETRIA
4 - MEDIDAS
VAMOS COMPREENDER O SIGNIFICADO DA PALAVRA ÁLGEBRA.
- NÚMEROS
- ÁLGEBRA
- GEOMETRI
- MEDIDAS
ELA SURGE DE UMA PALAVRA ÁRABE AL-JABR, USADA NO TÍTULO DO LIVRO ESCRITO EM BAGDÁ, POR VOLTA DO ANO 825, PELO MATEMÁTICO MOHAMMED IBN-MUSA AL-KHOWARIZI
MEDIDAS
VOCÊS ACHAM QUE SEMPRE FOI UTILIZADA DESSA FORMA?
ACHO QUE SIM! SERÁ QUE EXISTE OUTRA FORMA PARA ESCREVER OU DE SE EXPRESSAR?
JÁ VOU EXPLICAR TUDO PRA VOCÊS!

* EVES, 1997, P. 206


PROFESSORA, MAS COMO FOI DESCOBERTO? COMO VOCÊ SABE?
UMA DAS FONTES DE INFORMAÇÃO VEIO DA CIVILIZAÇÃO BABILÔNICA, DOS TEXTOS GRAVADOS COM INSCRIÇÕES CUNEIFORMES EM TABLETES DE ARGILA. O TEXTO ERA ESCRITO QUANDO O BARRO AINDA ESTAVA MOLHADO.
UM TEXTO MATEMÁTICO FAMOSO DA CIVILIZAÇÃO EGÍPICIA É O PAPIRO DE RHIND, DE 1650 A.C, NO QUAL HÁ PROBLEMAS MATEMÁTICOS PRÁTICOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUE ERAM RESOLVIDAS POR UM MÉTODO SEMELHANTE A UM PROCESSO DE TENTATIVAS
EXPLICA MELHOR, PROFESSORA!
VOU DAR UM EXEMPLO DE UM PROBLEMA DO PAPIRO DE RHIND. "UMA QUANTIDADE E O SEU QUARTO ADICIONADO TORNA-SE 15. QUAL É ESTA QUANTIDADE?
ESSE PROBLEMA ERA RESOLVIDO ARITMETICAMENTE COMO UMA "RECEITA".


COMO ERA ESSA RECEITA?
ELES CHAMAVAM O VALOR DES-CONHECIDO DE "AHA", E USAVAM UM MÉTODO QUE CONSISTIA EM:
1 - DAR UM VALOR, AINDA QUE FALSO, PARA "AHA", OU "MONTÃO".
2 - FAZER O AJUSTE, USANDO UMA PROPORÇÃO, UMA REGRA DE TRÊS.
COMO ASSIM, PROFESSORA?
NÚMERO
RESULTADO
FALSO
4
4 + 1 = 5
VERDADEIRO
MONTÃO
15
4 / MONTÃO = 5 / 15 , LOGO, MONTÃO = 12
VOLTEMOS AO PROBLEMA DO PAPIRO DE RHIND. VAMOS DAR UM VALOR PARA "MONTÃO". UM VALOR QUALQUER. POR EXEMPLO, 4. ASSIM, 4 + 1 (A QUARTA PARTE DE 4) SERÁ IGUAL A 5. ESSE NÃO É O NÚMERO, POIS ESSA SOMA DEVE SER IGUAL A 15. NO QUADRO ENCONTRA-SE O AJUSTE.
ISSO QUER DIZER QUE ANTIGAMENTE NÃO UTILIZAVAM LETRAS PARA REPRESENTAR IDEIAS MATEMÁTICAS, E SIM PALAVRAS!
NOSSA! ASSIM A MATE-MÁTICA FICARIA MUITO MAIS DIFÍCIL!


NA PRÓXIMA FASE, DA ÁLGEBRA SINCOPADA, AS PALAVRAS FORAM ABREVIADAS.
ATRIBUI-SE A **DIOFANTO DE ALEXANDRIA**, MATEMÁTICO GREGO QUE VIVEU NO SÉCULO III, A INTRODUÇÃO DO ESTILO SINCOPADO DE ESCREVER EQUAÇÕES. DIOFANTO USOU $\dot{M}$ PARA REPRESENTAR UMA CONSTANTE E Δ^{Y} PARA REPRESENTAR X^2. OBSERVEM O QUADRO A SEGUIR.
REPRESENTAÇÃO | VARIÁVEL | ALGARISMOS
$\dot{M}$ | TERMO INDEPENDENTE CONSTANTE | 1 | α
ς | A VARIÁVEL X | 2 | β
Δ^{y} | X^2 | 3 | γ
K^{y} | X^3 | 4 | δ
$\Delta^{y}\Delta$ | X^4 | 5 | ε
Δk^{y} | X^5 | 10 | i
$K^{y}K$ | X^6 | 20 | k
30 | λ
ASSIM, $X^3 + 3X^2$ ERA REPRESENTADO POR $\Delta^{y}\ \Delta\gamma\ \Delta^{y}$
AGORA COMEÇOU A MELHORAR!
ASSIM MELHOROU, NÃO É MESMO?
VEJA UM EXEMPLO: **CARDANO**, MATEMÁTICO ITALIANO QUE VIVEU NO SÉCULO XVI, ESCREVEU DE FORMA SINCOPADA: *CUBUS P. 6 REBUS AEQUALIS 20.*
QUE LOUCURA É ESSA, PROFESSORA?
NA LINGUAGEM ATUAL, SERIA: $X^3 + 6X = 20$.
É PROFESSORA, JÁ ESTOU PREFE-RINDO A NOSSA LINGUAGEM!
É VERDADE! APÓS ESSA FASE SINCOPADA, SURGIU A FASE SIMBÓLICA. É ESSA A QUE NÓS UTILIZAMOS HOJE, COM SÍMBOLOS. POR VOLTA DE 1500, O FRANCÊS **FRANÇOIS VIÈTE** FOI UM MARCO, UM DIVISOR DE ÁGUAS NO PENSAMENTO ALGÉBRICO.


ELE INTRODUZIU O USO DAS LETRAS PARA INDICAR NÚMEROS DESCONHECIDOS, DA FORMA COMO SÃO UTILIZADAS ATÉ HOJE, ESCREVENDO EQUAÇÕES.
ELE USOU OS SINAIS "+" E "-" E INTRODUZIU AS VOGAIS PARA REPRESENTAR QUANTIDADES CONSTANTES E CONSOANTES PARA QUANTIDADES INCÓGNITAS. *
O TRABALHO DE VIÈTE POSSIBILITOU A ESCRITA DE EXPRESSÕES DE EQUAÇÕES E SUAS PROPRIEDADES E, A PARTIR DAÍ, AS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS PASSARAM A SER OBJETOS DE OPERAÇÕES MATEMÁTICAS.
* FIORENTINI, P .80
OUTRO MATEMÁTICO IMPORTANTE PARA ESSE FASE, FOI DESCARTES, QUE CONTRIBUIU NA SÍNTESE ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA.
ENTÃO UTILIZAMOS UMA VOGAL PARA REPRESENTAR QUANTIDADES COMO CONSTANTES, E CONSOANTES PARA REPRESENTAR AS INCÓGNITAS. VEJA UM EXEMPLO: PENSEI EM UM NÚMERO, SUBTRAÍ TRÊS, DIVIDI O RESULTADO POR SEIS, SOMEI COM A TERÇA PARTE DESSE NÚMERO E OBTIVE COMO RESULTADO, DEZ.
ENTÃO SURGIU O X DA QUESTÃO? (X-3)/6 + X/3 = 10 (LINGUAGEM SIMBÓLICA ATUAL)
PROFESSORA, BENDITA LINGUAGEM SIMBÓLICA! AINDA BEM QUE EXISTEM OS SÍMBOLOS E AS LETRAS PARA TORNAR GERAIS NOSSAS IDEIAS E NOS FACILITAR A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS!
HA! HA!
HA!
HA!
HA! HA!
FIM!

APÊNDICE F

UNIUBE Educação e Responsabilidade Social Escola Municipal Uberaba	MESTRADO EM EDUCAÇÃO **Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende** **Profª. Soraia Abud Ibrahim**

GRUPO:

Um exemplo da fase sincopada:

> O { } é um cara muito ≠, a maioria das pessoas diz que ele é meio ■ . Ele rezou 1/3 para arrumar 1/2 e resolver a lógica da sua vida.

1 Após a leitura da história da linguagem algébrica, vamos resolver as seguintes situações:

1.1 No último Campeonato Brasileiro o Corinthians marcou vários gols e o São Paulo, também. Quantos gols os dois times marcaram?

Esse exemplo está na linguagem__________________________.

a) Represente esse exemplo na linguagem sincopada.

b) Represente esse exemplo na linguagem simbólica.

1.2 Seja *x* o número que, somado com 6, seja = ao seu dobro. Esse exemplo está na linguagem__________________________.

a) Represente esse exemplo na linguagem retórica:

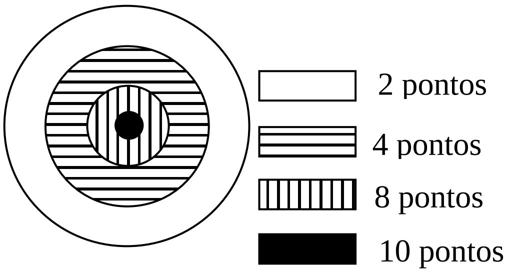
b) Represente esse exemplo na linguagem simbólica:

1.3 2x + ½ = x esse exemplo está na linguagem__________________________.

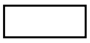
a) Represente esse exemplo na linguagem retórica:

b) Represente esse exemplo na linguagem sincopada:

1.4 Analise e responda à seguinte situação:

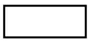
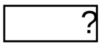


Este é o alvo de um jogo de dardos.

a) Pedro acertou 3 vezes no  e 6 vezes no .

Quantos pontos ele fez?

b) Quantos pontos fez uma pessoa que acertou:

- 3 vezes no  e **y** vezes no ?
- **f** vezes no  e **p** vezes no ?
- **a** vezes no , 5 vezes no  e **y** vezes no ?

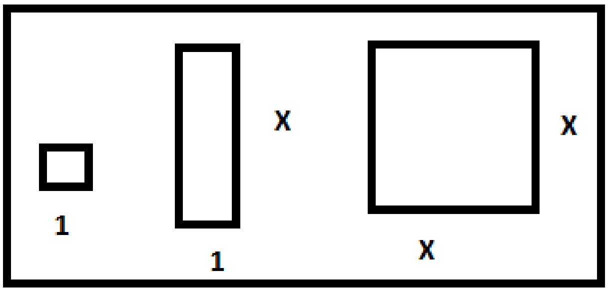
Obrigada pela participação!!!
Soraia

APÊNDICE G

UNIUBE Educação e Responsabilidade Social Escola Municipal Uberaba	MESTRADO EM EDUCAÇÃO Prof[a]. Dr[a]. Marilene Ribeiro Resende Prof[a]. Soraia Abud Ibrahim

1. Agora, você está recebendo o quebra-cabeça Quebra-Poli. Monte o quebra-cabeça e depois responda:

a) Analise as seguintes peças:



Encontre a área dessas peças: A(x)=
Atribuindo mais peças, então   B(x)=
C(x)=

O resultado encontrado dessa operação algébrica representa um polinômio. E esse polinômio é de uma só variável. E o grau desse polinômio é igual a 2.

Atribua um valor a x a um polinômio. Qual o resultado encontrado?..........

b) Agora você deverá inicialmente calcular a área e o perímetro de cada peça e escrever na tabela:

Figura	Perímetro	Área
A		
B		
C		
D		
E		
F		

c) Atribua valores a x e obtenha o resultado:

Figura	Valor numérico	Área	Resultado
A			
B			
C			

D			
E			
F			

d) Agora, vamos juntar duas as peças. Como ficaram o seu perímetro e a sua área da figura formada?

Figura	Perímetro	Área

e) Agora, vamos juntar todas as peças. Como ficou a figura? Qual é o seu perímetro? E a sua área?

Figura	Perímetro	Área

f) Vamos calcular o volume de algumas peças.

Peças	Volume

g) Atribua um valor para x, então o resultado encontrado é......................

h) Faça a planta baixa da sua casa ou escola. Utilizando as peças (a planta baixa consiste no desenho da casa e suas divisões internas vistas de cima).

Obrigada pela participação!
Soraia

APÊNDICE H

1. A Construtora Uber está construindo um condomínio fechado, empreendimento diferenciado, projetado para oferecer espaço, valorizar paisagens e preservar ao máximo a fauna e a flora da região. Uma completa infraestrutura em pleno funcionamento permite que você usufrua de todo conforto e qualidade de um empreendimento de alto padrão. Ela pretende construir dois edifícios: Villagio de Roma e Villagio de Paris. O Villagio de Roma terá 10 andares. O Villagio de Paris terá 2 andares a menos que o Villagio de Roma e 4 apartamentos a mais por andar. Se Villagio de Roma tiver n apartamentos por andar, quantos apartamentos serão construídos? Descubra respondendo as seguintes questões:

a) Qual é a expressão algébrica que representa os números de apartamentos do Villagio de Roma? Essa expressão é um polinômio? O que a letra **n** representa?

b) Qual é a expressão algébrica que representa o número de apartamentos do Villagio de Paris? Essa expressão é um polinômio? O que a letra **n** representa?

c) Qual é a expressão algébrica que representa o número de total de apartamentos dos dois edifícios?

d) Se a construtora quiser construir 122 apartamentos, quantos apartamentos serão construídos por andar? Quantos apartamentos no Villagio de Roma? Quantos no Villagio de Paris?

e) Proponham vocês o total de apartamentos e descubram os números de apartamentos por andar.

2. Em um estacionamento são cobradas as seguintes tarifas:

Pela 1ª hora (ou fração): RS 3,00
Pela 2ª hora (ou fração): RS 2,00

O proprietário quer criar um modelo matemático para facilitar o cálculo. Pensou em chamar de **x** o número de horas (inteiras ou fração) que o carro permaneceu no estacionamento.

Responda:

a) Escreva o modelo adequado para essa situação:

b) Teste o seu modelo, considerando que o carro lá permaneceu por 5 horas:

c) Uma pessoa pagou R$ 27,00. Quantas horas ficou estacionada?

d) O funcionário cobrou de uma pessoa R$30,00. A pessoa não concordou e não quis pagar esse valor. Quem está com a razão?

3. Vamos descobrir quantos anos viveu Diofante?
Sugestão: Escreva uma equação matemática.

Fonte: <http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=29119>. Acesso em: 13 set. 2014.

Obrigada pela sua participação !!
Soraia

APÊNDICE I

UNIUBE Educação e Responsabilidade Social Escola Municipal Uberaba	**MESTRADO EM EDUCAÇÃO** **Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende** **Profª. Soraia Abud Ibrahim**

1. Ao ir a uma sorveteria percebi uma relação matemática no valor do preço em relação a quantidades de bolas. Se comprar um sorvete com uma bola, pagarei R$ 3,00. Então, complete a tabela a seguir:

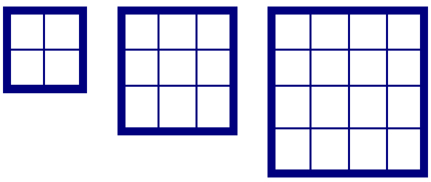
Quantidade de bolas de sorvete	Preço a pagar (R$)
1 bola	R$ 3,00
2 bolas	R$ 6,00
3 bolas	
4 bolas	
....	
6 bolas	
_____ bolas	R$ 24,00
10 bolas	
N bolas	

Você observa que a cada valor atribuído a quantidade de bolas corresponde um valor a ser pago.
a) O preço a pagar depende da quantidade de bolas de sorvete? Por quê?
b) Registre em forma de produto a operação matemática que você fez para chegar aos resultados.
c) Você pode escrever uma expressão matemática que simbolize as operações acima, ou seja, que simbolize o cálculo.

Vamos observar essa resolução gráfica no computador!

Com o auxílio do *software KmPlot*, desenvolva as atividades abaixo.
a) Marque os pontos da tabela, no gráfico.
b) O que você percebe a respeito da distribuição desses pontos?
c) Você acha que é possível fazer uma previsão do comportamento destes pontos, ou seja, aqueles pontos que não estão marcados seguem também uma regra de distribuição?

2. Calcule o perímetro de cada uma das figuras seguintes (em cm).



a) O perímetro depende do tamanho do lado? Por quê?
b) É possível calcular o perímetro de qualquer quadrado, como os que você calculou? Como?
c) De acordo com seu raciocínio anterior, calcule o perímetro dos quadrados seguintes cujos lados (em cm) estão indicados na tabela abaixo.

Lado	Perímetro
1	
2	
3	
4	
5	
6	

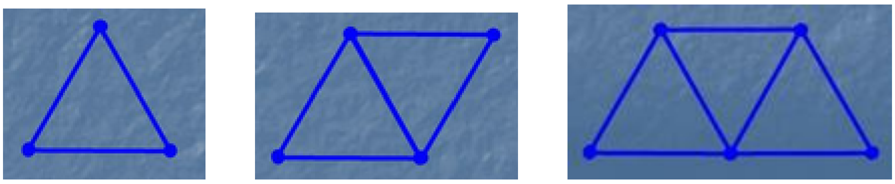
d) Registre em forma de produto a operação matemática que você fez para chegar aos resultados.
e) Você pode escrever uma expressão matemática que simbolize as operações acima, ou seja, que simbolize o cálculo do perímetro de qualquer quadrado?
f) Como nós damos o nome a essa expressão?

Obrigada pela participação!
Soraia

APÊNDICE J

UNIUBE Educação e Responsabilidade Social Escola Municipal Uberaba	**MESTRADO EM EDUCAÇÃO** **Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende** **Profª. Soraia Abud Ibrahim**

1.Observe a sequência de triângulos formados por palitos:

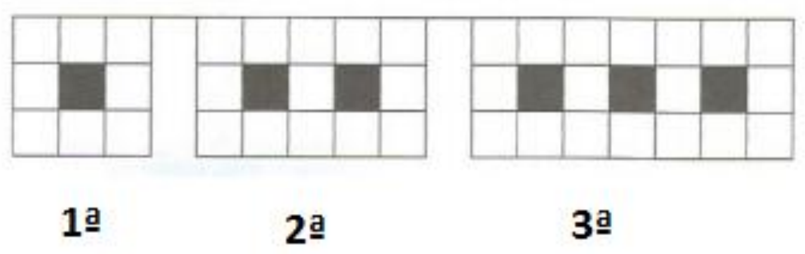


a) No primeiro triângulo, precisamos de __ palitos para construí-lo.
b) Na segunda figura, onde há dois triângulos, precisamos de __ palitos para construí-los.
c) Na terceira figura, com três triângulos, precisamos de __ palitos para construí-los.
d) Se quero construir 4 triângulos, quantos palitos serão utilizados?
e) Se quero construir 5 triângulos, quantos palitos serão utilizados?
f) Se quero construir 8 triângulos, quantos palitos serão utilizados?
g) Se quero construir n triângulos, quantos palitos serão utilizados?
h) Essa expressão matemática encontrada é um polinômio? Explique sua resposta.

2. Observe a sequência de retângulos formados por palitos:

a) Para construir um quadrado, utilizamos ____ palitos.
b) Para construir dois quadrados, utilizamos ____ palitos.
c) Para construir três quadrados, utilizamos ____ palitos.
d) Para construir quatro quadrados, utilizamos ____ palitos
e) Para construir cinco quadrados, utilizamos ____ palitos.
f) Para construir oito quadrados, utilizamos ____ palitos.
g) Para construir n quadrados, utilizamos ____ palitos.
h) Se utilizei 31 palitos para construir n quadrados, quantos quadrados possuía?
i) Essa expressão matemática encontrada é um polinômio? Explique sua resposta.

3. Observe a sequência de figuras abaixo e reproduza esse desenho na malha quadriculada que você recebeu:



a) Agora, desenhe na malha a sequência com a quarta figura:

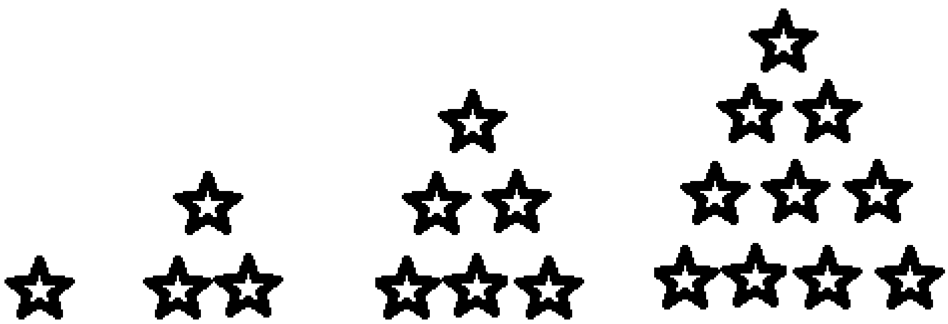
b) Agora, desenhe na malha a sequência com a quinta figura:

c) Em seguida, complete a tabela referente à sequência dada:

N° DE	N° DE	Nº DE	TOTAL DE
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
8ª			
N			

d) O resultado encontrado de n figuras é um polinômio? Se sim, explique o porquê.

4. Observe a sequência de figuras a seguir:



a) Na primeira figura tenho uma estrela, na segunda figura tenho 3 estrelas, na quarta tenho 10 estrelas, então na próxima figura da sequência teremos_____ estrelas.

b) E na sexta figura teremos ______ estrelas.

c) Qual será a posição com uma figura que possua 55 estrelas?

d) Descubra a expressão matemática para n posições:

e) Essa expressão matemática representa um polinômio? Se sim, explique o porquê.

Obrigada pela sua participação!!

Profa. Soraia