UNIVERSIDADE DE UBERABA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO

ALINE TATIANE EVANGELISTA DE OLIVEIRA

ORGANIZAÇÃO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Uberaba – MG

2021

ALINE TATIANE EVANGELISTA DE OLIVEIRA

ORGANIZAÇÃO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Marilene Ribeiro Resende.

Linha de pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo Ensino-Aprendizagem.

Uberaba – MG

2021

Catalogação elaborada pelo Setor de Referência da Biblioteca Central Uniube.

Oliveira, Aline Tatiane Evangelista de.
O4o Organização de ensino-aprendizagem da função seno no ensino médio: um experimento didático formativo / Aline Tatiane Evangelista de Oliveira. – Uberaba, 2021.
272 f. : il. color.

Tese (Doutorado) – Universidade de Uberaba. Programa de Pós-graduação em Educação. Linha de pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem.
Orientadora: Profa. Dra. Marilene Ribeiro Resende.

1. Educação. 2. Ensino médio. 3. Funções (Matemática). 4. Aprendizagem. I. Resende, Marilene Ribeiro. II. Universidade de Uberaba. Programa de Pós-graduação em Educação. III. Título.

CDD 370

ALINE TATIANE EVANGELISTA DE OLIVEIRA

ORGANIZAÇÃO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito final para a obtenção do título de Doutor em Educação, sob a orientação da

Aprovada em 11/03/2021

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª Marilene Ribeiro Resende
(Orientadora)
UNIUBE – Universidade de Uberaba

Profª. Drª Maria do Carmo de Sousa
UFsCar – Universidade Federal de Uberaba

Profª. Drª Váldina Gonçalves da Costa
UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr Orlando Fernandes Aquino
UNIUBE – Universidade de Uberaba

Profª. Drª Adriana Rodrigues
UNIUBE – Universidade de Uberaba

DEDICATÓRIA

Há 30 anos, quando iniciei minha vida escolar na pequena Campos Altos/MG, tinha a convicção que seria por meio da educação que minha vida mudaria. Com toda a dificuldade que passamos pela vida, que não foram poucas, tentei dedicar-me ao máximo aos estudos, mesmo tendo que começar a trabalhar aos 13 anos, nunca deixei meu foco se desviar. Ainda no auge da adolescência, aos 16 anos, estava em frente ao temido vestibular. Meus professores do Ensino Médio e eu, sabíamos do meu potencial, mas como a vida também é feita de oportunidades, agarrei "com unhas e dentes" o que eu tinha no momento. Apesar de inúmeras críticas, prestei vestibular para o curso de Matemática e passei em primeiro lugar. Ainda conciliando estudo e trabalho, minha dedicação aumentava cada vez mais e ao final da graduação veio a aprovação em 3 concursos públicos, nota Máxima no ENADE (antigo PROVÃO) e o convite para integrar o quadro docente da instituição em que me formei, UNIARAXÁ. Como minha sede de estudar e crescer nunca foi saciada, continuei meus estudos e ingressei-me na pós-graduação. Algumas especializações contribuiram para minha formação profissional, bem como posteriormente o Mestrado, tão exigido e sonhado. Hoje, com muita alegria e com a sensação de dever cumprido, entrego meu Doutorado a grande responsável por essa caminhada de lutas e vitórias. Esse Doutorado não é meu e sim seu MÃE, que mesmo com toda simplicidade e pouco estudo fez com que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

A DEUS que me fortaleceu nesta luta.

Ao SÉRGIO, meu marido, amigo e incentivador em todos os momentos; aos meus filhos CAROLINE e LUÍS FILIPE, que souberam esperar com imenso carinho até que eu concluísse essa jornada, superando as ausências. Vocês são a razão de minha persistência.

À minha mãe LEONDALVA, que sempre acreditou em mim e ao meu saudoso pai JOÃO BATISTA, que infelizmente partiu durante essa caminhada.

À Profª. Dra. MARILENE, pela oportunidade de poder contar sempre com sua orientação segura e firme,por acreditar em nossa parceria, por compartilhar valiosos conhecimentos e experiências e, ainda, sem se esquivar da simpatia, do otimismo e da humanidade na relação com o outro. Reitero minha admiração, reconhecimento, carinho e amizade.

Ao CENTRO UNIVERSITÁRIO DO PLANALTO DE ARAXÁ, em nome do Magnífico Reitor JOSÉ OSCAR e do Diretor Financeiro da Fundação Cultural de Araxá, Sr. CÁSSIO MELO, pelo apoio financeiro e por acreditarem em meu trabalho, espero poder retribuir da melhor forma possível.

Ao amigo VENÂNCIO FERREIRA, meu professor na formação inicial que viu em mim uma professora que eu desconhecia.

Aos ALUNOS, participantes da pesquisa, que gentilmente aceitaram fazer parte deste estudo.

Ao primo JOSÉ EMÍLIO, à TIA LUZDALMA e à amiga DENÍSIA, por me acolherem carinhosamente nas viagens.

Às diretoras CARMEN e ALESSANDRA, que sempre me apoiaram na busca pela formação continuada.

A todos os PROFESSORES DO DOUTORADO, Vânia, Adriana, Ana Maria, José Carlos, Wenceslau, Gisele, Sueli, Gustavo, Cilson, Sálua, Marilene, Selva, pelos valiosos ensinamentos compartilhados durante o curso e principalmente ao Prof. Orlando, pelo apoio constante.

Aos professores ADRIANA, ORLANDO e MARIA DO CARMO, participantes das bancasde qualificação e defesa pelos caminhos apontados. E completo meus agradecimentos à professora VÁLDINA, que completou a banca de defesa. Ter a oportunidade de dialogar e aprender com vocês é uma honra.

Aos COLEGAS DO DOUTORADO: Ana Lúcia, Elisabeth, Henaldo, Ricardo, Elton, Maurício, Sandra, Orandes, Dulceana, Monalisa, Terezinha, Gilson, Conrado, Renata, Magali e Rosemar, companheiros de luta, nunca esquecerei os momentos vividos em sala de aula. Turma nota 1000!!!

A VOCÊS, O MEU MUITO OBRIGADA!!!

“É só do prazer que surge a disciplina e a vontade de aprender. É justamente quando o prazer está ausente que a ameaça se torna necessária”.

Rubem Alves

RESUMO

OLIVEIRA, Aline Tatiane Evangelista. **Organização de ensino-aprendizagem da função seno no ensino médio: um experimento didático formativo**. 2021. 274 f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade de Uberaba, Uberaba.

Este trabalho insere-se na linha de pesquisa “Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba” e no projeto de pesquisa intitulado “Conteúdos algébricos no ensino médio: discussões e propostas na perspectiva da teoria histórico cultural”, aprovado pela FAPEMIG, em 2017. É no cenário de falta de identidade do Ensino Médio, de mudanças constantes nas políticas públicas relacionadas a esse nível de ensino, de baixos resultados obtidos nas avaliações externas em matemática e da necessidade de propostas didáticas que promovam a aprendizagem conceitual e enfatizem a formação do pensamento teórico, e, consequentemente, a formação integral dos jovens, que se construiu o objeto desta pesquisa: “a organização do ensino-aprendizagem do conceito da função seno com aporte teórico da Teoria Histórico Cultural”. Assim, com base no Materialismo Histórico-Dialético, na Teoria Histórico Cultural, a qual assume que o saber é produzido historicamente pelo homem no processo de transformação da vida, em autores como Vigotski, Leontiev e Davidov, levanta-se o seguinte questionamento: Como organizar o ensino-aprendizagem da função seno no Ensino Médio, potencializando a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos? O objetivo geral é experimentar, na prática escolar do Ensino Médio, uma proposta de organização do processo de ensino-aprendizagem da função seno, com foco na aprendizagem conceitual e no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos. Para isso, desenvolveu-se um experimento didático-formativo com 12 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Araxá/MG, realizado em quatro etapas. Na primeira etapa, realizou-se a revisão de literatura e o diagnóstico da realidade, por meio de pesquisa bibliográfica e documental; na segunda, elaborou-se o experimento, a partir dos resultados obtidos na etapa anterior; na terceira desenvolveu-se o experimento com a realização de 10 encontros, de forma remota, pelo *Google Meet*, devido ao isolamento social imposto pela pandemia da COVID 19, em 2020; na quarta, realizou-se a análise dos dados, a partir das produções dos participantes e dos diálogos com a pesquisadora, que foi a condutora do experimento. A Análise considerou as seguintes unidades de análise: tomada de consciência da ação, movimento de abstração teórica e sínteses (generalizações teóricas). Indícios de apropriação do conceito da função seno no domínio dos ângulos planos e no domínio dos números reais foram encontrados, o que promoveu o desenvolvimento do pensamento teórico no movimento de abstração e generalização substantivas e de ascensão do abstrato ao concreto. Há, também, evidências de que a organização do ensino possibilitou a assimilação de nexos conceituais internos da função seno, como: fluência, interdependência, variável, periodicidade e semelhança. Nem todos os alunos atingiram o mesmo nível de síntese, porém a apropriação de um conceito ocorre por múltiplas aproximações. Contradições, desafios e limites se fizeram presentes tanto na elaboração como no desenvolvimento do experimento. Desse modo, esta pesquisa comprovou a tese de que de uma adequada organização do ensino da função seno no Ensino Médio, fundamentada na Teoria Histórico-Cultural e no movimento lógico-histórico do conceito, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, em contraposição à visão utilitarista e pragmática das propostas de ensino atuais.

Palavras-chave: Função seno. Atividade de estudo. Experimento didático-formativo. Teoria Histórico Cultural. Ensino Médio.

ABSTRACT

This work is part of the research line “Professional Development, Teaching Work and the Teaching-Learning Process of the Graduate Program in Education at the University of Uberaba” and in the research project entitled “Algebraic content in high school: discussions and proposals in the perspective of cultural historical theory ”, approved by FAPEMIG, in 2017. It is in the scenario of a lack of identity in secondary education, constant changes in public policies related to this level of education, low results obtained in external evaluations in mathematics and the need for didactic proposals that promote conceptual learning and emphasize the formation of theoretical thinking, and, consequently, the integral formation of young people, which was the object of this research: “the organization of teaching-learning of the concept of the sine function with theoretical support of Cultural Historical Theory ”. Thus, based on Historical-Dialectical Materialism, on Historical Cultural Theory, which assumes that knowledge is historically produced by man in the process of transforming life, in authors such as Vigotski, Leontiev and Davidov, the following question arises: How organize the teaching-learning of the sine function in high school, enhancing the learning and development of the students' theoretical thinking? The general objective is to experiment, in high school school practice, a proposal to organize the teaching-learning process of the sine function, focusing on conceptual learning and the development of the students' theoretical thinking. For this, a didactic-formative experiment was developed with 12 students from the 2nd year of high school in a public school in Araxá / MG, carried out in four stages. In the first stage, there was a literature review and a diagnosis of reality, through bibliographic and documentary research; in the second, the experiment was elaborated, based on the results obtained in the previous step; in the third, the experiment was conducted with 10 meetings, remotely, by Google Meet, due to the social isolation imposed by the pandemic of COVID 19, in 2020; in the fourth, data analysis was performed, based on the productions of the participants and the dialogues with the researcher, who was the conductor of the experiment. The Analysis considered the following units of analysis: awareness of action, movement of theoretical abstraction and syntheses (theoretical generalizations). Evidence of appropriation of the concept of the sine function in the domain of plane angles and in the domain of real numbers was found, which promoted the development of theoretical thinking in the movement of substantive abstraction and generalization and the rise of the abstract to the concrete. There is also evidence that the organization of teaching enabled the assimilation of internal conceptual nexuses of the sine function, such as: fluency, interdependence, variable, periodicity and similarity. Not all students have reached the same level of synthesis, but the appropriation of a concept occurs through multiple approaches. Contradictions, challenges and limits were present both in the elaboration and in the development of the experiment. Thus, this research proved the thesis that an adequate organization of the teaching of the sine function in High School, based on the Historical-Cultural Theory and the logical-historical movement of the concept, can contribute to the development of the students' theoretical thinking, in as opposed to the utilitarian and pragmatic view of current teaching proposals.

Key words: Sine function. Study activity. Didactic-formative experiment. Cultural Historical Theory. High School.

RESUMEN

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación “Desarrollo profesional, labor docente y el proceso de enseñanza-aprendizaje del Programa de Posgrado en Educación de la Universidad de Uberaba” y en el proyecto de investigación titulado “Contenidos algebraicos en el bachillerato: discusiones y propuestas en el perspectiva de la teoría histórica cultural ”, aprobada por FAPEMIG, en 2017. Se encuentra en el escenario de una falta de identidad en la educación secundaria, constantes cambios en las políticas públicas relacionadas con este nivel educativo, bajos resultados obtenidos en evaluaciones externas en matemáticas y la necesidad de propuestas didácticas que promuevan el aprendizaje conceptual y enfaticen la formación del pensamiento teórico y, en consecuencia, la formación integral de los jóvenes, que fue objeto de esta investigación: “la organización de la enseñanza-aprendizaje del concepto de función seno con soporte teórico de la Teoría Histórica Cultural ”. Así, a partir del Materialismo Histórico-Dialéctico, de la Teoría Histórica Cultural, que asume que el conocimiento es históricamente producido por el hombre en el proceso de transformación de la vida, en autores como Vigotski, Leontiev y Davidov, surge la siguiente pregunta: ¿Cómo organizar la enseñanza? Aprendizaje de la función sinusoidal en la escuela secundaria, mejorando el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes?
El objetivo general es para experimentar, en la práctica del bachillerato, una propuesta para organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función seno, enfocándose en el aprendizaje conceptual y el desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes. Para ello, se desarrolló un experimento didáctico-formativo con 12 alumnos de 2º año de bachillerato en un colegio público de Araxá / MG, realizado en cuatro etapas. En una primera etapa, se realizó una revisión de la literatura y un diagnóstico de la realidad, a través de una investigación bibliográfica y documental; en el segundo, se elaboró el experimento, en base a los resultados obtenidos en el paso anterior; en el tercero, el experimento se realizó con 10 reuniones, de forma remota, por parte de Google Meet, debido al aislamiento social que impuso la pandemia de COVID 19, en 2020; en el cuarto, se realizó el análisis de datos, a partir de las producciones de los participantes y los diálogos con el investigador, quien fue el conductor del experimento. El Análisis consideró las siguientes unidades de análisis: conciencia de acción, movimiento de abstracción teórica y síntesis (generalizaciones teóricas). Se encontró evidencia de apropiación del concepto de función seno en el dominio de los ángulos planos y en el dominio de los números reales, lo que promovió el desarrollo del pensamiento teórico en el movimiento de la abstracción y generalización sustantiva y el ascenso de lo abstracto a lo concreto. . También hay evidencia de que la organización de la docencia permitió la asimilación de nexos conceptuales internos de la función seno, tales como: fluidez, interdependencia, variable, periodicidad y semejanza. No todos los alumnos han alcanzado el mismo nivel de síntesis, pero la apropiación de un concepto se da a través de múltiples enfoques. Contradicciones, desafíos y límites estuvieron presentes tanto en la elaboración como en el desarrollo del experimento. Así, esta investigación demostró la tesis de que una adecuada organización de la enseñanza de la función seno en el Bachillerato, basada en la Teoría Histórico-Cultural y el movimiento lógico-histórico del concepto, puede contribuir al desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes. , en contraposición a la visión utilitaria y pragmática de las propuestas docentes actuales.

Palabras clave: Función seno. Actividad de estudio. Experimento didáctico-formativo. Teoría Histórica Cultural. Escuela secundaria.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A pesquisa que deu origem a esta tese foi realizada no período de 2017 a 2021, no Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Uberaba, integra a linha de pesquisa "Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo Ensino-Aprendizagem".

Faz parte de um projeto "guarda-chuva", aprovado pela FAPEMIG, em 2017, cujo título é "Conteúdos algébricos no Ensino Médio: discussões e propostas na perspectiva da Teoria Histórico Cultural" sob a coordenação da Profa. Dra. Marilene Ribeiro Resende, o qual tem como objetivo geral analisar conceitos essenciais de álgebra, buscando resgatar o seu movimento histórico-lógico, para justificar a sua presença no ensino médio e para indicar caminhos para a organização do ensino.

Nesse projeto "guarda-chuva", inclui-se, também, a tese de Júlio Henrique da Cunha Neto, defendida em 2020, cujo tema é "Organização do ensino-aprendizagem de sistema de equações lineares no Ensino Médio: um experimento didático-formativo". Em suas considerações finais, ao que tange à formação do conceito de Sistemas de Equações Lineares, verifica-se a importância de os alunos se apropriarem das representações algébricas – juízos e conceitos, nas suas formas mais gerais – incógnitas, variáveis, coeficientes, dentre outros. Segundo o autor, há evidências de que o domínio desses conhecimentos científicos contribuiu para a formação do pensamento teórico sobre Sistemas de Equações Lineares – no contexto de uma rede conceitual.

Outro trabalho desenvolvido no âmbito desse projeto é a tese de Djalma Gonçalves Pereira, também defendida em 2020, cujo tema é "A organização do ensino-aprendizagem dos logaritmos na perspectiva de Leonid V. Zankov". O autor afirma que, ao longo do desenvolvimento do experimento, compreendeu que muitas das limitações da aprendizagem conceitual e do desenvolvimento psíquico dos sujeitos decorrem da falta de organização adequada do ensino, pois, para tal, é necessário o entendimento do processo de apropriação de novos conhecimentos por parte dos sujeitos envolvidos e além de investimentos na questão afetiva envolvendo aluno, professor e conteúdo, fato esse que justifica a busca permanente por uma adequada organização do ensino independente do conteúdo desenvolvido. Foi possível constatar que o sistema didático organiza o ensino, estabelece diretrizes e pressupostos, porém é preciso considerar as condições objetivas de sua realização, que facilitam ou impõe limitações.

O contexto teórico no qual se insere essa investigação está fundamentado na epistemologia dialético-materialista de Karl Marx (1983,1998,2002,2007, 2011,2013), como um método de análise da realidade na busca de sua transformação, na Teoria Histórico-cultural de L.S. Vigotski (1991,1993,1996,1998, 2001), na qual se preocupou em estudar a psicologia do homem, o desenvolvimento intelectual humano ligado às interações sociais e às condições de vida do indivíduo e na teoria da atividade de estudo de Davidov (1982,1988,1999), defensor de que a aprendizagem escolar conduz ao desenvolvimento a partir da construção dos conhecimentos científicos por meio da atividade de estudo.

Em relação à História da Matemática e ao ensino de Álgebra, apoiamo-nos em autores como Caraça (1951) e Sousa *et al*. (2014), cujos estudos enfatizam os nexos internos dos conceitos, como o movimento/fluência, a interdependência, em Boyer (1974), que apresenta as ideias matemáticas desenvolvidas pelo homem ao longo da história. Já autores como Lima e*t al.*(2001) e Iezzi (2001, 2016) completam as referências por focarem os nexos externos dos conceitos, ou seja, os elementos perceptíveis, como as fórmulas e as representações, também presentes no ensino de matemática.

A pesquisa foi desenvolvida numa escola pública estadual da cidade de Araxá-MG, no Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB -Lei Nº 9.394/1996. A parte relativa ao Ensino Médio nesse documento sofreu inúmeras alterações, após a sua promulgação, em busca de atender às demandas diversas para esse nível de ensino. Dentre outras, está a Lei n° 13.415/2017, com vistas à "reforma" ou "reformulação" do Ensino Médio, que, historicamente, padece de uma falta de identidade, que é apontada por vários pesquisadores (ZAMBON; TERRAZZAN, 2017; CIAVATTA, 2015, MOEHLECKE, 2012).A esse respeito cabe perguntar: Seria uma reformulação no sentido de buscar a sua real identidade ou para atender a outros interesses? Autores como Ciavatta (2015) e Duarte (2016) foram nosso aporte para essa discussão.

Ciavatta (2015, p. 30) afirma que a escola tradicional sempre pretendeu preparar as classes populares para o trabalho, "separando os futuros dirigentes, dos produtores; os que estavam destinados ao conhecimento da natureza e da produção, daqueles a quem eram entregues as tarefas de execução". De um lado, apoiadores dessa perspectiva acreditam que deve ser uma preparação para o mercado de trabalho, com foco nos cursos técnicos e na formação de uma mão de obra rápida e barata para as empresas. Por outro lado, alguns grupos apoiam um ensino preparatório para o ingresso do aluno no ensino superior, essa posição defendida, na maioria das vezes, pelas escolas particulares, sendo, em grande parte, um treinamento cansativo e repetitivo de conteúdos e questões cobradas nos vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). (CIAVATTA, 2015)

Há também os que defendem o Ensino Médio, como, de fato, uma etapa da educação básica, contribuindo para o desenvolvimento integral do jovem. Ao recorremos à LDB (BRASIL,1996), constatamos que ela estabelece no artigo 35 as finalidades do Ensino Médio, que são: a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, a preparação básica para o trabalho e a cidadania e a formação do aluno como pessoa humana, incluindo a formação ética,o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

Organizar o ensino de matemática neste contexto tem sido um desafio, especialmente quando se propõe a fazê-lo fundamentado em pressupostos teóricos que postulam o desenvolvimento do homem, com vistas à sua transformação e a do meio onde se insere, com foco na aprendizagem conceitual, pois a matemática, ainda, é considerada por muitos uma disciplina de difícil aprendizagem.

Ao buscarmos os resultados das Avaliações externas como o ENCCEJA (Exame Nacional para Certificação de Jovens e Adultos), o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e o PROEB[1] (Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica), verificamos que ainda é baixa a proficiência dos alunos nessa disciplina.

Em análise dos últimos resultados (2019) do PROEB disponíveis no Portal SIMAVE[2], os quais são classificados com os padrões de desempenho[3] “baixo”, “intermediário”, “recomendado” e “avançado”, considerados numa escala de 0 a 500 pontos, na Superintendência Regional de Ensino de Uberaba, 57,5% estão no nível “baixo” e 35,3%, no “intermediário”. Em Araxá, mesmo considerando a escola que possui melhor desempenho

[1]PROEB[1] (Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica) é a avaliação que tem como objetivo diagnosticar a educação pública de Minas Gerais com avaliações para os alunos ao final de cada etapa (5º ano, 9º ano e 3º ano do Ensino Médio), nas disciplinas português e matemática, com vistas a fornecer subsídios ao governo estadual e prefeituras para a tomada de decisões relativa às políticas públicas e, à escolas para a reflexão quanto ao direcionamento de suas práticas pedagógicas.

[2]Sistema Mineiro de Avaliação da educação Básica, disponível em: http://simave.educacao.mg.gov.br/#!/resultados.

[3]Baixo (0 a 275 pontos) - Este padrão reúne estudantes com carência de aprendizagem para o desenvolvimento das habilidades e competências mínimas requeridas para a conclusão da etapa de escolaridade em que se encontram. São estudantes que necessitam de ações pedagógicas de recuperação.

Intermediário (275 a 350 pontos) - Este padrão agrupa estudantes que ainda não demonstram ter desenvolvido adequadamente as habilidades e competências essenciais para a sua etapa de escolaridade. Demandam atividades de reforço na aprendizagem.

Recomendado (350 a 375 pontos) - Este padrão reúne estudantes que consolidaram o desenvolvimento das habilidades e competências previstas para a etapa de escolaridade. Entretanto, ainda requerem ações para aprofundar a aprendizagem.

Avançado (375 a 500 pontos) - Este padrão agrupa estudantes com desenvolvimento além do esperado para a sua etapa de escolaridade, os quais precisam de estímulos para continuar avançando no processo de aprendizagem.

nessas avaliações, quase 90% dos alunos estão dentro da faixa (baixo e intermediário) em Matemática.

Em relação aos resultados do ENEM, em 2019, a proficiência média em Matemática e suas Tecnologias foi de 523,1 (em 1000), sabendo-se que o ENEM inclui estudantes de todas as redes de ensino. Os resultados do ENCCEJA ainda não estão disponíveis para acesso nos bancos de dados oficiais do governo, por isso não foi possível trazer essas informações.

Dentro do processo ensino-aprendizagem de Matemática, destacamos o ensino da álgebra, campo no qual se insere esta pesquisa. Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014),é um dos maiores "empecilhos" para que os alunos passem pela escola sem dificuldades e reprovações, pois continua a persistir, na prática pedagógica dos professores, bem como nos conteúdos apresentados nas apostilas e livros didáticos, a simples manipulação de letras e símbolos. No campo da álgebra, interessou-nos investigar a organização do ensino da função seno, pela importância que a trigonometria tem na matemática e em outras áreas, e por ser a função seno a base para o estudo das demais funções trigonométricas, considerando o seu movimento lógico-histórico.

Entendemos que trabalhar o movimento lógico-histórico faz com que tanto os professores quanto os alunos, estabeleçam diferentes relações entre os conceitos e compreendam seu processo de formação historicamente. Esse tipo de abordagem oportuniza ao professor elaborar atividades de ensino que promovam a aprendizagem conceitual e não somente a simples aplicação do conteúdo. "A decisão sobre o que ensinar às novas gerações por meio da educação escolar envolve relações entre o presente, o passado e o futuro da sociedade e da vida humana". (DUARTE, 2016, p. 1)

No processo de construção do objeto de pesquisa, procuramos conhecer o que já foi produzido sobre o ensino de trigonometria no Ensino Médio. Para isso, buscamos mapear e analisar os trabalhos já desenvolvidos sobre o tema nas últimas três décadas, desde a LDB e a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, em teses e dissertações disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES o qual será detalhado ao longo desse estudo.

De uma seleção preliminar de 204 trabalhos de 1998 a 2016, chegamos a 24 produções, que, já no título, anunciavam trigonometria no Ensino Médio, considerando tanto as investigações com relação ao conteúdo específico e às suas aplicações, quanto em relação às diferentes práticas pedagógicas que podem ser adotadas no processo ensino-aprendizagem. Destas, apenas uma é tese de doutorado defendida em 1998, as demais são dissertações de mestrado.

Esse levantamento permitiu verificar que investigações sobre a temática fundamentada na Teoria Histórico Cultural se fazem necessárias, sobretudo investigações que visem à aprendizagem conceitual a partir da organização adequada do ensino, pois partimos do pressuposto de que a identidade do Ensino Médio é garantida pela própria LDB, ser uma etapa da Educação Básica, e, como tal, propiciar ao jovem uma formação geral que promova o seu desenvolvimento como ser humano, como jovem situado no seu tempo.

É nesse cenário de falta de identidade[4] do Ensino Médio, de mudanças nas políticas públicas relacionadas a esse nível de ensino, de necessidade de propostas didáticas que promovam a aprendizagem e enfatizem a formação do pensamento teórico, a formação integral dos jovens, que construímos e situamos o objeto de pesquisa: "a organização do ensino-aprendizagem do conceito da função seno com aporte teórico da Teoria Histórico Cultural"

Definimos como questão norteadora: **Como organizar o ensino-aprendizagem da função seno no Ensino Médio, potencializando a aprendizagem conceitual e o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos?**

Assim, o **objetivo geral é experimentar na prática escolar do ensino médio, uma proposta de organização do processo de ensino-aprendizagem da função seno, com foco na aprendizagem conceitual e no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos**.

A partir do problema de pesquisa, outras questões surgiram, as quais guiaram a investigação: O que trazem os documentos e leis que regulamentam o Ensino Médio brasileiro? Como são apresentados os conteúdos de matemática (álgebra, trigonometria, função seno) nesses documentos? Como os livros didáticos, adotados pela escola campo de estudo, apresentam a função seno? Qual o movimento lógico-histórico do conceito da função seno?

Assim, definimos os seguintes **objetivos específicos**:

- Compreender a constituição do ensino médio, na atualidade, a partir dos aspectos da Legislação, dos avanços científicos e das proposições didáticas.
- Investigar o movimento lógico-histórico do conceito da função seno;
- Desenvolver o experimento didático-formativo como uma proposta didática de organização do ensino da função seno.

Buscaremos responder tais questões com vistas a defender a tese de que uma adequada organização do ensino da função seno no Ensino Médio, fundamentada na Teoria Histórico-

[4] Seria uma formação para o mercado de trabalho, para a entrada no ensino superior ou uma formação uma etapa da educação básica, contribuindo para o desenvolvimento integral do jovem?

Cultural e no movimento lógico-histórico do conceito, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, em contraposição à visão utilitarista e pragmática das propostas de ensino atuais**.**

Para isso, elaboramos e desenvolvemos um experimento didático-formativo, que buscou tornar o ensino da função seno mais humanizador, contribuindo para o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores do aluno, pelo exercício do pensamento teórico, em contraposição ao discurso de que devemos ensinar apenas o que é aplicável de imediato na vida aluno.

A relevância social desse estudo está diretamente relacionada ao fato de que o desenvolvimento, aplicação e sugestão de uma proposta didática para o processo ensino-aprendizagem da função seno no Ensino Médio, fundamentada teoricamente de forma consistente, pode contribuir para o aprendizado e o desenvolvimento humano de professores e alunos envolvidos e para aqueles que queiram desenvolver tal proposta, posteriormente.

A relevância científica está no fato de que a temática tem sido pouco pesquisada em nível de pós-graduação acadêmica e se contrapõe a um discurso que enfatiza o desenvolvimento de competências (saber-fazer) em detrimento do desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores, para o qual o ensino de matemática tem muito a contribuir.

Ao discutirmos especificamente o processo ensino-aprendizagem de matemática, entendemos que seja necessária uma reconfiguração do “ensinar matemática”, uma revisão não só das metodologias, mas, também, da importância histórica dos conteúdos para que sejam compreendidos de forma integral pelo aluno, indo além da “decoreba” e do manuseio de fórmulas e regras. A aprendizagem conceitual da álgebra considera os nexos externos, como a representação, a linguagem, mas preocupa-se com os nexos internos, construídos historicamente, como no caso do conceito de função, o movimento (fluência), a interdependência, a variável, o campo de variação (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

Uma possibilidade para essa “reconfiguração” envolve investimentos na formação inicial e continuada do professor, para que possa organizar o ensino de álgebra, considerando o movimento lógico e histórico dos conceitos e, ainda, a reestruturação dos programas e planejamentos de ensino existentes no sentido de terem esse movimento como centro do processo ensino-aprendizagem. Sabemos da importância da formação do professor nesse processo, no entanto não entramos nessa discussão, porque foge ao escopo deste trabalho.

Com base nos pressupostos do Materialismo Histórico Dialético (MHD), na Teoria Histórico-Cultural, nas contribuições de Davidov, desenvolvemos o experimento didático-formativo, no intuito de que uma melhor organização do ensino contribua para a aprendizagem e para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores do aluno, indo ao encontro das ideias de Vigotski (1993). Foi uma oportunidade de propor e experimentar uma nova organização do ensino-aprendizagem desse conteúdo escolar. Importante destacar que o experimento didático-formativo, segundo Aquino (2017), é tanto uma metodologia de ensino, quanto uma metodologia de pesquisa, por buscar potencializar a aprendizagem discente. Para o seu planejamento e desenvolvimento, adotamos os seguintes procedimentos: pesquisa bibliográfica, estudo documental e pesquisa de campo.

Em relação à pesquisa bibliográfica, iniciamos, como citado, anteriormente, pelo mapeamento das produções (teses e dissertações) publicadas no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes nos últimos 30 anos. Além disso, buscamos os fundamentos teóricos em autores nacionais e internacionais ligados à THC, ao ensino de álgebra, à discussão do ensino médio e ao desenvolvimento lógico-histórico da função seno.

Sobre o estudo documental, analisamos os vários documentos que regem a educação brasileira como: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB/1996, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Currículo Básico Comum de Minas Gerais (CBC), Base Nacional Curricular (BNCC), a Lei n° 13.415/2017 (Reformulação do Ensino Médio) e os livros didáticos adotados pela escola na qual realizamos a pesquisa de campo, no período de 2006 a 2020. Por meio desse estudo documental, buscamos compreender, historicamente, o contexto do Ensino Médio, do ensino de matemática, de álgebra, da trigonometria, das funções trigonométricas e, especificamente, da função seno. O estudo bibliográfico e o documental constituem a primeira etapa do experimento didático-formativo.

A pesquisa de campo, incluiu uma fase de observação e de diagnóstico, que complementou a primeira etapa do experimento e a fase de desenvolvimento propriamente dita do experimento didático-formativo, envolvendo o processo ensino-aprendizagem da função seno no Ensino Médio, na Escola Estadual Loren Rios Feres, em Araxá, escola essa em que trabalhamos há 18 anos como professora de Matemática do Ensino Fundamental (9° ano) e Ensino Médio (3° ano). Optamos em realizar a pesquisa na escola em que lecionamos por já conhecer a realidade e principalmente por buscar contribuir com o contexto escolar.

Para a realização desse estudo, seguimos todo o processo formal, submetendo-o ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da instituição proponente, atendendo às devidas orientações e pressupostos legais, tendo sido aprovado sob o CAAE 96378018.0.0000.5145, em reunião do dia 04 de setembro de 2018.

A proposta inicial era realizarmos o experimento extra turno, presencialmente, com dias e horários preestabelecidos, pois não pretendíamos alterar o planejamento das aulas do professor, bem como o desenvolvimento das atividades escolares dos alunos. No entanto, o período programado para iniciar a realização do experimento coincidiu com o do isolamento social, devido à pandemia de COVID-19[5], o que exigiu a alteração do planejamento metodológico para a aplicação do experimento.

Assim, o experimento foi desenvolvido de forma *on-line*, por meio de atividades de estudo, cujas tarefas foram elaboradas após as observações realizadas em sala de aula (antes da pandemia), e, após o professor ter trabalhado o conteúdo com os alunos.

A análise desse experimento considerou indícios[6] da apropriação dos conceitos e do desenvolvimento do pensamento teórico, a partir das ações e operações realizadas pelo aluno no desenvolvimento das tarefas de estudo propostas. Foi realizada a partir de "unidades de análise", conforme proposto por Vigotski (1991a), definidas com base no referencial teórico e nos objetivos propostos: a **tomada de consciência da ação**; o **movimento de abstração teórica** e as **sínteses (generalizações teóricas)** elaboradas pelos alunos. As unidades de análise permitem, segundo Martins (1994, p.289) "a integração dos elementos contraditórios" e que conserva todas as propriedades do todo; a análise, portanto, "deve ser holística[7], uma vez que os elementos vão adquirindo novos significados, quando, no processo histórico, são colocados em relação com o todo em que estão integrados" (idem, p. 290). Nesse sentido, a abordagem adotada foi a da pesquisa qualitativa.

Importante destacar que quando afirmamos que buscamos indícios da apropriação dos conceitos e do desenvolvimento do pensamento teórico do aluno nos referimos às relações e assimilação de conceitos presentes nas reações, nos diálogos, nos questionamentos, na escrita, no entanto eles podem vir explícitos nas afirmações dos alunos ou podem ser interpretados pela pesquisadora na medida em que relaciona os excertos dos diálogos com a teoria estudada.

A tese está organizada em seis seções, sendo uma delas essa Introdução.

Na seção "A aprendizagem conceitual e o desenvolvimento do pensamento teórico na perspectiva da THC", abordamos os fundamentos teóricos, em relação à Teoria Histórico

[5] Segundo Barreto (2020), "o primeiro caso da pandemia pelo **novo coronavírus,** SARS-CoV2, foi identificado em Wuhan, na China, no dia 31 de dezembro do último ano. Desde então, os casos começaram a se espalhar rapidamente pelo mundo: primeiro pelo continente asiático, e depois por outros países. Em fevereiro, a transmissão da **Covid-19**, nome dado à doença causada pelo SARS-CoV2, no Irã e na Itália chamaram a atenção pelo crescimento rápido de novos casos e mortes, fazendo com que o Ministério da Saúde alterasse a definição de caso suspeito para incluir pacientes que estiveram em outros países. No mesmo dia, o primeiro caso do Brasil foi identificado, em São Paulo. Em março, a Organização Mundial da Saúde (OMS) definiu o surto da doença como pandemia. Poucos dias depois, foi confirmada a primeira morte no Brasil, em São Paulo".

[6] Empregamos o termo "indícios" nesse trabalho nos referindo aos estudos de Vigotski que o cita no capítulo 13 da "Crise da Psicologia", sendo sinônimo de evidências na perspectiva da Teoria Histórico-cultural.

[7] Adjetivo usado com intuito de procurar compreender os fenômenos na sua totalidade e globalidade.

Cultural, incluindo os conceitos de mediação, de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), de Idades psicológicas, a formação de conceitos e o desenvolvimento do pensamento teórico. Também foram tratados aspectos da Teoria da Atividade e Teoria da Atividade de Estudos.

A seção "Contextualização do estudo: o estado do conhecimento e os aspectos legais e curriculares" teve como objetivo caracterizar o contexto no qual essa pesquisa se insere: o Ensino Médio, em seus aspectos normativos e curriculares, as propostas para o ensino de matemática neste nível de ensino e as pesquisas realizadas sobre a temática.

A apresentação dos principais aspectos histórico-lógicos da função seno, passando pela trigonometria, pela álgebra, pelas funções e pelas funções trigonométricas, com foco nos nexos conceituais da função seno no campo dos ângulos planos e no conjunto dos números reais, encontra-se na seção "O movimento lógico-histórico da função seno"

Na seção "Do Materialismo Histórico-dialético ao experimento didático formativo: fundamentos epistemológicos e metodológicos", apresentamos o método da pesquisa,o Materialismo Histórico- dialético e o Experimento didático-formativo e o detalhamento de suas etapas, apresentando o resultado da observação e do diagnóstico.

Os resultados da fase experimental e as análises realizadas são apresentados na seção "O experimento: apresentação e análise dos resultados", a partir das Tarefas de Estudo desenvolvidas, de acordo com os objetivos propostos.

Nas Considerações Finais, sintetizamos os principais resultados da pesquisa, os achados e os limites, assim como recomendações para próximas investigações.

Por ser esta uma pesquisa que possui como método geral, o Materialismo Histórico Dialético, entendemos que estará em processo contínuo de construção e reconstrução. Nada está totalmente pronto e acabado, nada é fixo, tudo está em constante movimento. E, nesse movimento, verificamos que o experimento didático-formativo é um aprendizado tanto para os alunos, quanto para nós, pesquisadores.É um momento formativo e experimental, por isso nem tudo funcionou como esperado e planejado. Muitos foram as conquistas, mas também encontramos muitos limites, é o movimento contraditório da vida e do processo de ensino-aprendizagem, a própria execução do experimento se mostrou contraditória, por isso outros estudos devem ser realizados para explorar os aspectos que não puderam ser explorados.

2 A APRENDIZAGEM CONCEITUAL E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO TEÓRICO NA PERSPECTIVA DA THC

O desenvolvimento de uma tese de doutorado, desde a elaboração do projeto, está marcado por dificuldades e incertezas. Entendemos que uma das principais está ligada à contextualização e conhecimento dos fundamentos teóricos que são etapas fundamentais para a construção de um trabalho científico. Segundo Gomide (2014, p. 1), “toda pesquisa enquanto criação científica exige uma rigorosa fundamentação epistemológica, uma explicitação clara do posicionamento teórico do pesquisador”.

Assim, o objetivo dessa seção é desenvolver com base nas contribuições de L. S. Vigotski, A.Leontiev, V.V. Davidov e D. B. Elkonin, no âmbito da Teoria Histórico-Cultural e das teorias dela derivadas – Teoria da Atividade e Teoria da Atividade de Estudo, conceitos fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa, como os de mediação, Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP, idades psicológicas, formação de conceitos, conceitos empíricos e conceitos científicos, pensamento teórico. Contamos, também, com a contribuição de pesquisadores nacionais no campo da Educação matemática, como Sousa, Panossian e Cedro, que defendem o movimento lógico e histórico na organização do ensino.

2.1 A Teoria Histórico Cultural (THC)

Na Rússia, pós revolução de 1917, Lenin defendia as ideias de Marx e Engels (marxismo) e o Materialismo Histórico Dialético (MHD), o qual será mais bem detalhado em outro capítulo, como um método de análise da realidade na busca de sua transformação. Foi nesse cenário que o psicólogo L. S. Vigotski[8] desenvolveu seus estudos. A influência do materialismo histórico dialético nas pesquisas de Vigotski está diretamente relacionada ao movimento histórico dos fenômenos em todas as suas fases, analisava-os como processo, e, não, como fatos isolados da realidade histórica.

> Estudar algo historicamente significa estudá-lo em movimento. Este é o requisito fundamental do método dialético. Quando uma pesquisa cobre o processo de desenvolvimento de algum fenômeno todas as suas fases e mudanças, desde que surge até desaparecer, implica revelar sua natureza, conhecer sua essência, apenas o movimento demonstra o corpo que existe. (VYGOTSKI, 1996, p. 67-68).

[8]Lev SemenovitchVigotski(1896 – 1934) Psicólogo bielo-russo que realizou diversas pesquisas na área do desenvolvimento da aprendizagem e do papel preponderante das relações sociais nesse processo. Existem diferentes maneiras de escrever seu nome como: Vygotski, Vigotsky, Vygotsky. Aqui adotaremos Vigotski, exceto nas citações em que prevalecerá a escrita original da obra.

Amparado no Materialismo Histórico Dialético, Vigotski preocupou-se em estudar a psicologia do homem, o desenvolvimento intelectual humano ligado às interações sociais e às condições de vida do indivíduo. Segundo ele, o homem não pode ser estudado desligado de suas condições históricas e sociais, pois o que o distingue de outras espécies é exatamente sua vida em sociedade, o trabalho. Nesse sentido, Vigotski afirma, “o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que as cercam” (VIGOTSKI, 2007, p.100).

Nos seus estudos, Vigotski foca no desenvolvimento social das funções psíquicas superiores, atenção voluntária, memória, lógica, formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. Estabelece que esse desenvolvimento ocorre em dois planos: primeiro no plano externo,o interpsicológico, para depois ocorrer no plano interno, o intrapsicológico, no qual os procedimentos se convertem em processos internos (mentais), num processo de internalização. Em sua lei genética geral do desenvolvimento cultural, explica:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, memória, lógica, formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (VIGOTSKI, 1993, p.163).

Para ele, a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento, o ensino antecede o desenvolvimento para promovê-lo, tratando-se de uma dialética entre o interno e o externo, entre o biológico e o social. Assim, a educação é, para Vigotski, elemento essencial no desenvolvimento da personalidade[9] integral do aluno,

> [...] a aprendizagem e o desenvolvimento não coincidem imediatamente e são dois processos que estão em complexas inter-relações. A aprendizagem só é boa quando está à frente do desenvolvimento. [...] A disciplina formal de cada matéria escolar é o campo em que se realiza essa influência da aprendizagem sobre o desenvolvimento. O ensino seria totalmente desnecessário se pudesse utilizar apenas o que já está maduro no desenvolvimento, se ele mesmo não fosse fonte de desenvolvimento e surgimento do novo. (VIGOTSKI, 2001, p. 334).

[9] A personalidade é processo resultante da síntese de aspectos objetivos e subjetivos, produto da atividade individual condicionada pela totalidade social, constituindo-se como autoconstrução da individualidade graças à atividade e consciência historicamente construídas. (MARTINS, 2007, p. 91 - 92)

É importante destacarmos que Vigotski não nega a influência do desenvolvimento biológico, mas entende que o social apresenta uma maior contribuição para o desenvolvimento humano, isto significa compreender que questões históricas, culturais e sociais, como categorias marxistas, determinam a formação psicológica do ser humano. Nessa linha de raciocínio ele afirma,

> O comportamento do homem moderno, cultural, não é só produto da evolução biológica, ou resultado do desenvolvimento infantil, mas também produto do desenvolvimento histórico. No processo do desenvolvimento histórico da humanidade, ocorreram mudança e desenvolvimento não só nas relações externas entre pessoas e no relacionamento do homem com a natureza; o próprio homem, sua natureza mesma, mudou e se desenvolveu. (VIGOTSKI; LURIA, 1996, p.95).

Na defesa do social como fator fundamental para o desenvolvimento do indivíduo, Vigotski, apoiado pelos seus seguidores Lúria[10] e por Leontiev[11], trio conhecido como "Troika", desenvolveu a Teoria Histórico Cultural (THC), tendo como base a Psicologia Histórico Cultural (PHC)[12]. O contexto histórico, pós-revolução da União Soviética, em que viviam com sérios problemas sociais, principalmente no campo da educação, levou-os a refletir e buscar contribuir, apoiados em uma psicologia marxista, sobre tal situação.

A THC criada por eles tem até hoje grande impacto nos diferentes níveis de estudo, da Educação Básica ao Ensino Superior.Ela busca explicar o desenvolvimento humano pela apropriação da experiência acumulada (cultura), que se origina das relações sociais, influenciado pelo meio/vivência do indivíduo por meio da linguagem e da mediação.

Luria (2001) mostra a importância do meio na construção das funções psíquicas superiores[13] ao dizer,

> A consciência nunca foi um 'estado interior' primário da matéria viva; os processos psicológicos surgem não no 'interior' da célula viva, mas em suas relações com o meio circundante, na fronteira entre o organismo e o mundo

[10] Alexander Romanovich Luria (1902 – 1977), seus estudos foram voltados para a psicologia. Juntamente com Vigotski e Leontiev juntou-se ao corpo de jovens cientistas do Instituto de Psicologia de Moscou e estudaram as bases materiais do desenvolvimento psicológico humano

[11] Alexei NikolaievichLeontiev (1903-1979) foi um dos importantes psicólogos russos. Seu maior interesse foi com a pesquisa das relações entre o desenvolvimento do psiquismo humano e a cultura.

[12]Segundo Mattos (2002) a Psicologia Histórico cultural situa-se "no âmbito da Psicologia Social e é uma das correntes significativas desta disciplina. Inspira-se nos trabalhos de autores como Vygotsky, Leontiev, Luria e Politzer, que procuraram transportar a filosofia materialista histórica e dialética (articulada sobretudo por Marx e Engels) para a Psicologia".

[13] Funções psicológicas superiores ou processos mentais superiores são os mecanismos psicológicos complexos, próprios dos seres humanos, como a atenção voluntária, a memória lógica, as ações conscientes, o comportamento intencional e o pensamento abstrato. (ANTÔNIO, 2008, p. 2)

> exterior, e ela assume as formas de um reflexo ativo do mundo exterior, que caracteriza toda atividade vital do organismo (LURIA, 2001, p. 97).

Reforça, assim, que, para esses estudiosos russos, as condições de vida do indivíduo exercem maior influência no seu desenvolvimento, sobrepondo às condições biológicas.

Nas teorias de Vigotski e de seus seguidores, há alguns conceitos que são fundamentais quando pensamos trabalhar o ensino nesta perspectiva. Dentre eles, o conceito de mediação e o de Zona de Desenvolvimento Proximal.

2.1.1 Mediação

A mediação, como parte das relações sociais do indivíduo, é um processo de intervenção que pode ser tanto de uma pessoa (colega, professor, tutor etc), quanto de um objeto em uma relação de construção do conhecimento, tornando-se fundamental para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Como o objeto desta pesquisa é a organização do ensino-aprendizagem do conceito da função seno com aporte teórico da Teoria Histórico Cultural, a mediação é um conceito fundamental, pois a organização do ensino tem em si uma função mediadora, assim como o tem os conteúdos escolares, as metodologias de ensino e os recursos utilizados.

Para Vigotski (2001, p.163), "as relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores". Para ele, a relação do indivíduo com o mundo é uma relação mediada por instrumentos físicos e por signos. Os instrumentos físicos começaram a ser usados na idade da pedra, quando o homem na busca de uma relação direta com a natureza usava pedras e paus. Os signos são aqueles relacionados à linguagem, à memória e são internos ao homem. Esse contato do indivíduo com o outro, por meio dos instrumentos físicos e/ou signos é, para Vigotski, o que possibilita a apropriação da cultura e o desenvolvimento da criança. Aos poucos, ela aprende e se desenvolve, isso é o que difere o homem de outros animais.

> [...] O uso de meios artificiais – a transição para a atividade mediada – muda, fundamentalmente, todas as operações psicológicas, assim como o uso de instrumentos amplia de forma ilimitada a gama de atividades em cujo interior as novas funções psicológicas podem operar. Nesse contexto, podemos usar o termo função psicológica superior, ou comportamento superior com referência à combinação entre o instrumento e o signo na atividade psicológica. (VIGOTSKI, 1998, p. 73)

Assim, entendemos que a apropriação da cultura acumulada, produzida pelas gerações anteriores, depende de objetos, de pessoas, que nos apresentem sua utilização na vida social – é o outro mais experimente responsável por essa transição. Nesse momento ganha destaque o papel do professor como tendo a função de propiciar elementos de mediação no processo ensino-aprendizagem nas escolas, contribuindo diretamente para o desenvolvimento do aluno na busca da formação de conceitos.

Assim, ao falarmos em mediação no espaço escolar, entra um outro conceito importante apresentado por Vigotski (1991), que é o de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

2.1.2 A Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)

A organização do ensino em qualquer nível precisa considerar o nível de desenvolvimento do aluno. Os estudos de Vigotski criticam o diagnóstico do desenvolvimento apenas por meio da análise da idade cronológica do indivíduo. Segundo ele, pessoas com a mesma idade cronológica podem apresentar níveis de desenvolvimento diferentes. Mediante tais críticas, ele define dois níveis de desenvolvimento, “desenvolvimento real” e o “desenvolvimento potencial” e indica, entre eles, a “zona de desenvolvimento proximal (ZDP)”, também conhecida como “zona de desenvolvimento imediata”.

O desenvolvimento real é o nível em que o indivíduo consegue desenvolver alguma atividade sozinho, sem ajuda, algo já consolidado, aprendido e que impulsionou seu desenvolvimento. É um nível de desenvolvimento já completo. O desenvolvimento potencial é o nível em que o indivíduo só consegue desenvolver alguma atividade com a ajuda de alguém ou de um objeto, por meio da mediação. Seria um nível futuro de desenvolvimento que o indivíduo precisa alcançar.A distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial é chamada por Vigotski de ZDP (Zona de Desenvolvimento proximal).

Vigotski (1991, p. 97) explica a ZDP como sendo,

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

Nesse sentido, Vigotski defende a ZDP como sendo o nível fundamental em que a mediação atua para o desenvolvimento do indivíduo e destaca novamente o papel do professor como sendo esse “outro” indivíduo capaz de contribuir para viabilizar os processos que estão em fase de amadurecimento. O professor, nesse cenário, tem a função de criar motivos, enquanto etapa necessária da atividade, na busca de desenvolver o pensamento do aluno, buscando atingir estágios mais elevados.

> O que hoje a criança faz com auxílio do adulto fará amanhã por conta própria. A zona de desenvolvimento imediato pode determinar para nós o amanhã da criança, o estado dinâmico do seu desenvolvimento que leva em conta não só o já atingido, mas também o que se encontra em processo de amadurecimento e desenvolvimento. [...] O estado de desenvolvimento mental da criança pode ser determinado pelo menos através da elucidação de dois níveis: do nível de desenvolvimento atual e da zona de desenvolvimento imediato (VYGOTSKI, 2001, p. 480).

Entendemos então que uma adequada intervenção do professor na ZDP no estudo dos conceitos, de forma organizada, pode promover a apropriação dos conceitos e o desenvolvimento cognitivo discente, pois somente inserir o aluno no contexto escolar não é suficiente, devemos proporcionar-lhe condições e instrumentos para que o desenvolvimento ocorra.

D. B. Elkonin corrobora a importância da influência do adulto na relação ensino—aprendizagem-desenvolvimento, quando afirma:

> O desenvolvimento psíquico das crianças tem lugar no processo de educação e ensino realizado pelos adultos, que organizam a vida da criança, criam condições determinadas para seu desenvolvimento e lhe transmitem a experiência social acumulada pela humanidade no período precedente de sua história. Os adultos são os portadores dessa experiência social. Graças aos adultos a criança assimila um amplo círculo de conhecimentos adquiridos pelas gerações precedentes, aprende as habilidades socialmente elaboradas e as formas de conduta criadas na sociedade. À medida que assimilam a experiência social se formam nas crianças distintas capacidades. (ELKONIN, 1960, p. 498)

A zona de desenvolvimento potencial é o nível em que aquela nova atividade foi consolidada e aprendida e provocou um novo desenvolvimento, ela é o “ponto de chegada do indivíduo”, ou seja, o nível em que o desenvolvimento potencial passa a ser, uma vez atingido, o desenvolvimento real, em que ele consegue realizar novamente sozinho essa nova atividade. Observamos que esses níveis propostos por Vigotski constituem pontos de um movimento em espiral, pois estamos o tempo todo na vida aprendendo algo. É a expressão do movimento dialético, do vir a ser, em suas contradições, no desenvolvimento humano

Como comentamos anteriormente, a THC foi criada não só por Vigotski, mas Lúria e Leontiev, assim como outros psicólogos e didatas soviéticos, deram continuidade aos vários estudos de Vigotski após a sua morte prematura, com 37 anos. Interessa-nos neste estudo, como aporte teórico, aspectos: da Teoria Geral da Atividade, desenvolvida por Leontiev, do conceito de atividade-guia e a sua relação com as idades psicológicas, para o qual muito contribuiu Elkonin, e elementos da Teoria da Atividade de Estudo, com base em Davidov.

2.2 A Atividade e a consciência como categorias centrais na THC

Amparado nos estudos de Vigotski, Leontiev apresentou uma teoria sobre a Atividade, relacionando-a com a consciência e com o desenvolvimento das funções psíquicas superiores. Na teoria vigotskiana, a chamada *Tomada de Consciência* seria o estado supremo do homem que passa a ter consciência da consciência que possui, os seus atos deixam de ser mecânicos e passam a envolver a sua psique, dando origem ao desenvolvimento das funções superiores. Ele compreendeu a necessidade de estudar a consciência no sistema da perspectiva histórica e social marxista como uma forma especificamente humana.

> A própria consciência ou a tomada de consciência dos nossos atos e estados deve ser interpretada como sistema de transmissores de uns reflexos a outros que funcionam corretamente em cada momento consciente. Quanto maior seja o ajuste com que qualquer reflexo interno provoque uma nova série em outros sistemas, mais capazes seremos de prestar-nos contas de nossas sensações, comunicá-las aos demais e vivê-las (senti-las, fixá-las nas palavras etc.) (VYGOTSKI, 1991, p. 3).

Nessa linha de pensamento, Davidov afirma que a consciência é o guia das ações do homem, que busca entender as suas próprias ações cognitivas.

> Somente a consciência e o pensamento dialéticos é que são capazes de solucionar as contradições. Por isso o que se costuma chamar de pensamento teórico é que é o pensamento dialético. A consciência teórica dirige a atenção do homem para o entendimento de suas próprias ações cognitivas, para a análise do próprio conhecimento. Na linguagem filosófica isto é chamado de reflexão. (DAVIDOV, 1999, p. 5).

E no desenvolvimento dessas funções psíquicas superiores de forma consciente, a atividade é fundamental. Para Vigotski (1998), a atividade é a ligação prática ou o elo do indivíduo com o mundo, é forma com que o sujeito interage com o mundo, sendo que ela norteia as principais mudanças psíquicas no desenvolvimento humano.

Para Leontiev, é necessário que o indivíduo realize atividades próprias que conduzam o seu desenvolvimento e vai, além, ao explicar a atividade como,

> [...] uma unidade molecular... é a unidade da vida mediada pelo reflexo psicológico, cuja função real consiste em orientar o sujeito no mundo objetivo. Em outras palavras, atividade não é uma reação nem um conjunto de reações, senão um sistema que tem estrutura, suas transições e transformações internas, seu desenvolvimento". (LEONTIEV, 1978, p. 66)

Davidov (1988), em seus estudos, salientava a importância da atividade na relação do sujeito com o meio externo ao dizer,

> A essência do conceito filosófico-psicológico materialista dialético da atividade está em que ele reflete a relação entre o sujeito humano como ser social e a realidade externa - uma relação *mediatizada* pelo *processo de transformação e modificação* desta realidade externa. A forma inicial e universal desta relação são as transformações e mudanças instrumentais dirigidas a uma finalidade, realizadas pelo sujeito social, sobre a realidade sensorial e corporal ou sobre a prática humana material produtiva. (DAVIDOV, 1988, p. 6, grifo nosso)

Apoiado em Marx, ele destaca a atividade laboral (trabalho), material ou espiritual, como sendo a transformação dos objetos pelo homem para a sua satisfação, acarretando transformações no próprio homem,

> Ela constitui a atividade laboral criativa realizada pelos seres humanos que, através da história da sociedade, tem propiciado a base sobre a qual surgem e se desenvolvem as diferentes formas da atividade espiritual humana (cognitiva, artística, religiosa etc). Entretanto, todas estas formas derivadas da atividade estão invariavelmente ligadas com a transformação, pelo sujeito, de um ou outro objeto que tem forma ideal (sob a forma ideal). (DAVIDOV, 1988, p. 6)

Libâneo e Freitas (2006) relacionam a Teoria da Atividade à concepção marxista da natureza histórico-social do ser humano e apresentam as seguintes premissas,

> 1) A atividade representa a ação humana que mediatiza a relação entre o homem, sujeito da atividade, e os objetos da realidade, dando a configuração da natureza humana; 2) O desenvolvimento da atividade psíquica, isto é, dos processos psicológicos superiores, tem sua origem nas relações sociais do indivíduo em seu contexto social e cultural. (LIBÂNEO; FREITAS, 2006, p. 2),

Dentro dessa concepção marxista que defende o desenvolvimento do indivíduo relacionado às suas relações sociais, Leontiev apresenta alguns elementos estruturais que são fatores que contribuem e influenciam o desenvolvimento da atividade. Alguns ligados à orientação e outros ligados à execução. Os elementos de orientação são a *necessidade,* os *motivos* e as *tarefas*, e os de execução, são *as ações* e *as operações.*

Para Leontiev (1983, p. 62), a estrutura geral da atividade apresenta o objeto como elemento principal e o motivo real da ação.

> No entanto, a coisa mais importante que distingue uma atividade de outra é o objeto da atividade. É o objeto da atividade o que lhe confere uma determinada direção. Pela terminologia proposta por mim, o objeto da atividade é seu motivo real. Claro, isso pode ser tanto externo como ideal, tanto dado perceptivamente como existindo apenas na imaginação, na ideia. O importante é que além do objeto da atividade sempre há a necessidade, que ele sempre atenda a uma ou a outra necessidade (tradução nossa).

As necessidades estimulam a atividade e a dirigem. Porém, elas devem se dirigir a um objeto, que, ao se colocar frente ao sujeito, transforma-se no motivo da atividade. A tarefa é a unidade entre o objetivo e as condições para alcançá-lo. A atividade humana não existe sem as ações. As ações respondem a uma tarefa, por meio da qual se transformam as coisas e o próprio sujeito. Isso ocorre, com a atividade de estudo, na qual as tarefas possibilitam a assimilação de novos conhecimentos, que, por sua vez, provocam mudanças no próprio sujeito, no seu desenvolvimento (MONTEALEGRE, 2005).

As ações, como componente de execução, ligam-se com as finalidades, e as operações, com as condições, os meios para realizar a atividade. Segundo Leontiev (1983, p. 63, tradução nossa), "a determinação dos objetivos e a formação das ações a eles subordinadas, produz-se como um desmembramento das funções que antes estavam consolidadas no motivo"[14]. Esses elementos estão ligados entre si e não há atividade sem eles.

Parte-se do princípio de que toda atividade deve ter um objeto que interaja com o indivíduo por meio da ação. Por exemplo, a criança quando inicia sua interação com o mundo, os objetos manipuláveis são fundamentais, aos poucos e, com a mediação do outro, ela começa a entender a função social de cada objeto, coloca na boca, morde, age sobre o objeto.

Em resumo, entendemos que, nesse processo de transformação das funções psíquicas na apropriação de algum conhecimento, é fundamental que o indivíduo entre em atividade,

[14]La determinación de los objetivos y laformación de lasacciones a ellos subordinados, produce como undesmembramiento de las funciones que anteriormente estaban refundidas enel motivo. (Leontiev (1983, p. 63)

pois só assim ocorrerá a aprendizagem/transformação, e, para entrar em atividade, é preciso compreender a necessidade de aprender, caso contrário a aprendizagem não acontecerá.

> Se ignorarmos as necessidades das crianças, aquilo que efetivamente as incentiva a agir, nunca seremos capazes de compreender seus avanços de um estágio evolutivo para o próximo, pois cada avanço está conectado com uma mudança significativa dos motivos, interesse e incentivos. (VIGOTSKY, 1985, p.76).

Ao comungar das ideias de Vigotski, Leontiev afirma que atividade pode ser designada como sendo, "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo como um todo se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo". (LEONTIEV, 1988, p. 68).

No entanto, para entendermos o desenvolvimento psíquico do homem é fundamental compreendermos a importância de cada atividade nas diferentes etapas do seu desenvolvimento. Para Davidov (2019, p. 172),

> Os tipos de atividade em determinada ordem são fundamentais para os períodos correspondentes do desenvolvimento psíquico do homem (assim, de acordo com D.B. Elkonin, para a criança de um a três anos de idade, a atividade de manipulação objetal é a principal, enquanto para a criança de três a sete anos é dominante a atividade da brincadeira).

Neste sentido, discutiremos a atividade-guia ou dominante nas chamadas idades psicológicas e focaremos a adolescência, por ser o período em que se encontram os participantes desta pesquisa.

2.3 A atividade-guia ou dominante e as idades psicológicas

Para Vigotski, o desenvolvimento do indivíduo é apresentado em etapas (fases), com suas características, sintomas e estrutura psicológica. Cada mudança (crises) ocorre em períodos de aproximadamente três anos (não fixos) e por estar diretamente ligada às relações do indivíduo com o meio, cada criança apresenta um desenvolvimento diferente que pode variar em relação a esse período de três anos. As fases apresentadas por Vigotski (1998) são: crise pós-natal; primeiro ano (dois meses - um ano); primeira infância (um ano – três anos); idade pré-escolar (três anos – sete anos); idade escolar (oito anos-doze anos), a puberdade (quatorze anos-dezoito anos) e, entre eles, os períodos de crise.

Em cada fase do desenvolvimento, segundo o referido autor, existe uma atividade principal (atividade guia), que é a relação dialética do homem com a realidade e por meio dessa relação o homem vai se constituindo homem.

Para Abrantes e Eidt (2019, p. 3), com base em Leontiev,

> Atividade dominante/guia é um conceito central para a compreensão do desenvolvimento psíquico na perspectiva teórica da psicologia histórico-cultural, indicando uma atividade social – entre outras atividades de que a pessoa participa – que impulsiona o seu processo de transformação, determinando novas possibilidades de vínculo da pessoa com a realidade a partir de demandas sociais, produzindo, pela vida interpessoal, formações psicológicas inéditas para o indivíduo.

Assim, no primeiro ano de vida, a atividade-guia é a *comunicação emocional direta com o adulto;* na primeira infância, é a *atividade objetal*; na idade “pré-escolar”, a atividade principal é a brincadeira, o jogo de papeis; na idade “escolar”,a *atividade de estudo*; na “adolescência”, que é o campo deste trabalho, a comunicação ganha destaque, sendo a atividade-guia, *a comunicação íntima pessoal* e a *atividade profissional de estudo* com vistas ao trabalho, ainda permanece. Davidov (2019, p. 171-172) explica que “na adolescência se converte em principal a *atividade socialmente útil,* no conjunto de suas formas básicas (sócio organizativa, artística, desportiva, escolar e de trabalho)”.

Vale salientar que a atividade principal não deixa de existir de uma fase para outra, apenas perde o foco para uma nova atividade, ou seja, o que determina a transição de um período para outro é a mudança da atividade-guia que a criança tem com a realidade. Vigotski explica a importância da atividade-guia ao afirmar,

> A atividade em si mesma não irá desenvolver a criança, mas para realizar a atividade-guia a criança se engaja em ações que servem para desenvolver as funções psicológicas necessárias àquela atividade. A nova formação é um produto - não um pré-requisito - de um dado período etário. (VIGOTSKY, 1998, p.198).

De acordo com as exigências da atividade-guia, o indivíduo engaja-se em ações por ela requerida, as quais levam ao desenvolvimento de determinadas funções psicológicas.

2.3.1 A adolescência

A adolescência é considerada por muitos um período de conflitos, angústias e mudanças bruscas de comportamento, além das inúmeras mudanças físicas que acontecem, mudanças sociais estão se desenvolvendo, tanto no meio escolar, com a proximidade do vestibular e a escolha de uma profissão, quanto nas interações e descobertas do sexo, das paixões. São concepções parciais, biologicistas e patologizantes ou idealistas que, segundo Anjos (2017, p.121), caracterizam a adolescência como "uma etapa marcada por um intenso trabalho psíquico caracterizado pela irrupção de sensações, desejos e fantasias incontroláveis".

Nesse sentido, Pereira (2019) afirma que a adolescência é vista como a transição da infância para a vida adulta, repleta de transformações,

> Adolescência, uma fase de mudanças, conflitos, rebeldia, com constante flutuação de humor e mudança de opinião. Estas percepções cotidianas encontram ressonâncias em algumas teorias psicológicas que entendem a adolescência como uma etapa de transição da infância para a idade adulta (PEREIRA, 2019, p. 3)

A Psicologia Histórico-Cultural, ao buscar a superação dessas concepções sobre essa etapa do desenvolvimento, considera-a como uma fase do desenvolvimento humano em que surgem determinadas características decorrentes do encontro entre aquilo que é desenvolvido e internalizado pelo sujeito na sua história de vida e as demandas sociais que são postas pela sociedade para ele, em cada período de seu desenvolvimento. Essa é uma perspectiva relacionada à *situação social do desenvolvimento*. (PEREIRA, 2019).

Para Elkonin (1987), a adolescência tem dois períodos, assim como as outras fases que a antecedem: adolescência inicial (próximo aos 10 anos[15]) e adolescência (dos 14 aos 17 anos), marcadas pela mudança da atividade principal. No primeiro período, segundo ele, ocorre a transição da atividade-guia, *atividade de estudo,* para a atividade de *comunicação íntima pessoal*, que constitui a forma de comunicação usada entre os adolescentes para o entendimento do mundo adulto. Há o predomínio das necessidades emocionais, a assimilação de objetivos, motivos e normas das relações humanas e o desejo de estar com os pares e de se sentir valorizado por eles. Há, entre eles, o que Elkonin (1987) chamou de um código de companheirismo, que, de certa forma, reproduz normas das inter-relações do mundo adulto. Já, no segundo período, há o desenvolvimento de capacidades operacionais e técnicas, modos socialmente desenvolvidos de ação. A atividade-guia passa a ser a *atividade profissional de estudo*, a partir da qual se esperaria que os estudantes estabelecessem, segundo se lê em

[15]Elkonin não estabelece marcos etários precisos, quem o faz é Davidov (1988), considerando-os aproximados. (PEREIRA, 2019)

Pereira (2019, p. 12) “vínculos entre os conhecimentos teóricos e a produção e a prática, possibilitando aos jovens o despertar da afeição e do respeito pelo trabalho criativo.”

Na adolescência, o desenvolvimento cerebral também está acontecendo em larga escala, retomando Anjos (2017, p. 122), “pesquisas recentes produzidas pela neurociência têm provado que as grandes mudanças ocorridas na etapa da adolescência não decorrem da produção de hormônios, mas sim, devido à maturação cerebral”, fato esse que contribui para o desenvolvimento do pensamento por conceitos, do pensamento abstrato, na busca da sua essência, mas para que isso ocorra é importante uma organização do ensino por parte da escola e de seus professores,

> Por meio do pensamento por conceitos, do pensamento abstrato, o adolescente pode conhecer a realidade para além da sua aparência, indo a sua essência. Mas, essa nova forma de pensamento, o pensamento por conceitos, não é uma dádiva da natureza, trata-se, portanto, do produto da internalização da produção cultural que, ao mesmo tempo, tornar-se-á condição para tal internalização. (ANJOS, 2017, p.135).

O desenvolvimento psicológico está ligado às condições objetivas de organização social, compreendendo rupturas, crises e saltos qualitativos que provocam mudança na qualidade da relação do indivíduo com o mundo. Daí a importância do estudo da categoria atividade, aqui entendida como mediações conscientes entre motivos e fins, ou seja, é o meio pelo qual o indivíduo se relaciona com a realidade objetivando a produção e reprodução das condições necessárias à sua existência física e psíquica.

E qual o papel da escola nesse período?

Para Anjos (2017, p. 132), “cabe à escola produzir, de forma direta e intencional, em cada indivíduo singular, a humanidade produzida histórica e coletivamente por gerações passadas. Daí afirmarmos o papel da educação escolar no processo de humanização dos adolescentes”.

Entretanto, concordamos com Pereira (2019, p. 12), quando afirma que o desenvolvimento humano, para os autores soviéticos, é “dependente das condições sociais em que se vive e educa a juventude”. Lembra-nos a autora que, no Brasil, particularmente, há uma grande diversidade social, marcada por profundas desigualdades, que estabelecem condições de desenvolvimento diferenciadas para os jovens dependendo da classe social, da raça e do gênero. Isso nos instiga a pensar em como as atividades-guia se efetivam na sociedade brasileira do século XXI.

Entendemos que seja fundamental o professor conhecer e compreender cada fase de desenvolvimento psicológico da criança, suas atividades principais, seus motivos, bem como as condições sociais do desenvolvimento. Esses conhecimentos lhe possibilitarão planejar e organizar atividades dentro da zona de desenvolvimento proximal do educando, na busca de criar condições para o discente alcançar a zona de desenvolvimento potencial dos conhecimentos científicos, ou seja, para Anjos (2017, p. 141),“a necessidade de um trabalho pedagógico que, de forma direta e intencional, transmita os conhecimentos clássicos aos adolescentes e exija destes, iniciativa e responsabilidade em suas atividades”.

Para a organização do ensino na perspectiva da THC, as contribuições de Davidov, ao tratar a atividade de estudo, são importantes, pois focam o desenvolvimento do pensamento teórico, objetivo da organização proposta nesta pesquisa.

2.4 A Atividade de Estudo, teoria central do “Sistema didático Elkonin/Davidov”

Segundo Puentes (2019), no interior do “Sistema didático Elkonin/Davidov”, no período de 1960-1990, várias teorias psicológicas e didáticas foram criadas, sendo a Atividade de Estudo, a teoria central. Essas teorias defendem que a aprendizagem escolar conduz o desenvolvimento na construção dos conhecimentos científicos por meio da atividade de estudo. Para ele,

> A atividade de estudo é a teoria central desse sistema e em volta dela foram sendo concebidas outras auxiliares que lhe davam sustentação (teoria da generalização substantiva, do experimento didático-formativo, da modelagem, do movimento de ascensão do abstrato ao concreto, da transição de um nível escolar para o outro, do diagnóstico, da formação de professores, do pensamento teórico, da colaboração, etc.). (PUENTES, 2019, p.125).

Importante destacar que Puentes considera a Atividade de Estudo como sendo tanto o trabalho didático do professor no desenvolvimento de determinado conteúdo, como a autotransformação do aluno, resultante de décadas de pesquisas experimentais, cujas propostas eram a organização do ensino que levasse ao desenvolvimento e à aprendizagem.

> A Atividade de Estudo é uma teoria que se ergueu como resultado de décadas de elaborações conceituais a partir de pesquisas experimentais, na forma de um conjunto de princípios fundamentais das ciências psicológico-pedagógica e didática em relação com as condições adequadas de organização dos processos de ensino-aprendizagem, tendo por base as leis

> que condicionam o desenvolvimento e a aprendizagem humanos. (PUENTES, 2019, p. 126).

Davídov e Márkova (1981, p. 318) explicam as fontes teóricas da atividade de estudo: a dialética materialista, a teoria da atividade e a teoria da formação por etapas das ações mentais:

> A concepção da atividade de estudo é um dos enfoques existentes na psicologia soviética, do processo de estudo, enfoque que realiza a tese marxista sobre a condicionalidade histórico-social do desenvolvimento psíquico da criança (L. Vigotski). Essa concepção se formou sobre a base de um dos princípios dialético-materialistas fundamentais da psicologia soviética, o princípio da unidade da psique e da atividade (S. Rubinstein, A. Leontiev), no contexto da teoria psicológica da atividade (A. Leontiev) e em estreita vinculação com a teoria da formação por etapas das ações mentais e tipos de aprendizagem (P. Galperin, N. Talízina e outros). (tradução nossa).[16]

Davidov (2019, p. 194) identifica a essência do conceito de Atividade de Estudo como sendo "uma análise de novas formações, mudanças qualitativas na psique da criança, seu desenvolvimento intelectual e moral".

As neoformações psíquicas já existentes no indivíduo se desenvolvem na escola e a tarefa de estudo se distingue de outras tarefas que são realizadas, pois ela busca a mudança do sujeito que a realiza. Nesse sentido Aquino e Cunha (2015, p. 6) afirmam, "o estudo é a transformação qualitativa da personalidade do aluno, a reestruturação e o desenvolvimento cognitivo-afetivo, intelectual e evolutivo de sua personalidade", mas para que isso realmente aconteça, as atividades e tarefas devem ser bem organizadas pelo professor, de modo a proporcionar essa transformação.

Para Davidov (1999), a atividade de estudo do aluno na escola deve seguir três componentes,

> Em primeiro lugar, ela contém todos os componentes enumerados do conceito geral de atividade. Em segundo lugar, estes componentes têm um conteúdo de objeto específico, que os distingue de qualquer outra atividade (por exemplo, da atividade de jogo ou de trabalho). Em terceiro, na atividade de estudo é obrigatório que haja o princípio criativo ou transformador. (DAVIDOV, 1999, p. 01)

---

[16] La concepción de laactividad de estudio es uno de los enfoques, existente em lapsicología soviética, del processo de estúdio, enfoque que realiza latesis marxista sobre la condicionalidade histórico-social deldesarrrollo psíquico de niño (L. Vigotski). Esta concepción se formó sobre la base de uno de los princípios dialéctico-materialistas fundamentais de lapsicología soviética, elprincipio de launidad de lapsiquis y de laactividad (S. Rubinstein, A. Leontiev), em el contexto de la teoria psicológica de laactividad (A. Leontiev) y em estrechavinculación com lateoría de laformación por etapas de lasaccionesmentales y tipos de aprendizaje (P. Galperin, N. Talízina y otros). (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1981, p. 318)

Se faltar um dos elementos citados, pode-se entender que a atividade de estudo não está sendo concretizada de forma eficaz e completa. O que vemos acontecer em muitas escolas atualmente são falhas relacionadas principalmente a esse princípio criativo e transformador. No processo de ensino-aprendizagem de matemática isso se intensifica, pois, a repetição de exercícios apenas mudando valores, sem a devida consciência, ainda percorre todo o ensino, apesar de entendermos que muitas escolas estão fazendo mudanças interessantes no ensino de matemática.

No ensino, dito, tradicional, existe um trabalho escolar, porém desprovido de efetiva transformação. Para Davidov (1999), a atividade de estudo está ligada, antes de tudo, com a transformação e o ensino tradicional não desenvolve o pensamento das crianças, apenas forma as bases do pensamento empírico[17].

Mas, para haver ação, deve existir uma necessidade pessoal. É preciso que se tenha um motivo para aprender algo, sendo esse motivo o "motor" das ações e operações do indivíduo, uma condição para a sua existência. Davidov (1999, p. 3) afirma que "é verdade que sem tal necessidade ele pode estudar e aprender diferentes conhecimentos (e até aprendê-los bem), mas ele não poderá realizar a transformação criativa do material de estudo".

A necessidade e o motivo inerentes a uma Atividade de Estudo se revelam com base na relação entre teoria, prática e mediação, pode ser um problema que desafie o aluno. Considera-se que uma atividade não pode existir sem um motivo, em outras palavras, seria a vontade e o interesse do aluno em aprender.

Promover o desenvolvimento de uma Atividade de Estudo com o aluno, "significa colocá-lo em uma situação que requer uma orientação para um modo generalizado de ação, desde o ponto de vista do conteúdo de sua solução em todas as variantes particulares e concretas possíveis das condições" (DAVIDOV, 2019, p.172).

As atividades de estudo são compostas por tarefas de estudo que estabelecem a relação entre o objetivo da ação e as condições para alcançá-lo. Conforme afirma Davidov (1988, p. 171), elas precisam exigir dos alunos:

> 1) a análise do material factual a fim de descobrir nele alguma relação geral que apresente uma vinculação governada por uma Lei com as diversas manifestações deste material, ou seja, a construção da generalização e da abstração substantivas; 2) a dedução, baseada na abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em algum

---

[17]O pensamento empírico permite ao homem orientar-se bem nos eventos da vida cotidiana. Este pensamento corresponde ao «bom senso». O pensamento empírico desenvolve-se na pessoa *fora* de qualquer instrução escolar — o ensino apenas dá forma, utiliza este pensamento e o cultiva. (DAVIDOV, 1999, p.6)

> objeto integral, ou seja, a construção de seu “núcleo” e do objeto mental concreto; e 3) o domínio, neste processo de análise e síntese, do procedimento geral (“modo geral”) de construção do objeto estudado.

Esses três elementos apontados, a nosso ver, constituem unidades de análise para um estudo experimental, como é o caso desta pesquisa, que busca desenvolver uma atividade de estudo relacionada à assimilação de um conceito, o conceito da função seno.

As tarefas de estudo devem ir além da proposta de fixar o nível de desenvolvimento cognitivo em que o aluno se encontra, elas precisam propiciar conceitos e ações mentais que impulsionam o avanço de seu desenvolvimento na busca da formação do pensamento teórico. É nisso que elas diferem dos simples exercícios e problemas que são usados por muitos professores nas aulas de matemática. Elas devem conduzir à apropriação ou à assimilação do objeto.

Davídov e Márkova (1981, p. 321) explicitam a relação entre os conceitos de assimilação (apropriação), desenvolvimento e ensino. Para eles a assimilação é “o processo de reprodução pelo indivíduo dos procedimentos historicamente formados de transformação dos objetos da realidade circundante, dos tipos de relações até eles e o processo de conversão destes padrões socialmente elaborados, em formas de ‘subjetividade’ individual” (tradução nossa)[18]. Assim, assimilação não tem o sentido de reprodução, mas o de “tornar próprio”, de “apoderar-se”, de “assenhorar-se”. Chamam a atenção para o fato de que a assimilação não implica necessariamente em desenvolvimento. Esse ocorre, quando conduz ao domínio das formas gerais da atividade psíquica, que, por sua vez, contribuirão para novas assimilações. Ela não se realiza apenas na atividade de estudo, porém,no ensino, a assimilação é um objetivo específico.

A apropriação do conhecimento teórico, segundo Davidov (1988), ocorre, quando o aluno identifica a essência do objeto. Para isso, as tarefas são fundamentais, quando oferecem autonomia ao aluno, para que ele consiga desenvolver o sistema de ações particulares na busca da formação do conceito, sendo necessária a realização das seguintes ações:

- **Transformação do objeto:** com a finalidade de expor a relação universal do objeto.
- **Criação de modelos: modelação** da relação universal em forma objetal, gráfica ou com letras.

[18]Asimilación es el processo de reprodución, por el individuo de los procedimentos historicamente formados de transformación de los objetos de la realidade circundante, de los tipos de relaciónhaciaellos y el processo de conversión de estospatrones, socialmente elaborados, em formas de la ‘subjetividad’ individual. (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1981, p. 321)

- **Transformação de modelos:** estudar as propriedades da relação universal que foi identificada no objeto.
- **Criação de problemas concretos e práticos**: Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
- **Controle de ações**: Controle da realização das ações anteriores;
- **Avaliação:** Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada.

Mas para realização de uma atividade de estudo completa, para Davidov (1999), é necessário que a execução das ações e operações materiais, verbais e mentais sejam realizadas de maneira correta pelos alunos por meio da mediação.

Tendo como base a Teoria da Atividade de Estudo para o desenvolvimento do pensamento teórico[19], Davidov elabora a "Teoria do Ensino Desenvolvimental", que é uma teoria que busca criar oportunidades para o aluno pensar. Assim, a escola tem a função de proporcionar um ensino que impulsione o desenvolvimento com base na relação teoria-prática. Para isso, destaca a importância de as tarefas conduzirem à essência do conhecimento. Nessa perspectiva, Davidov (1988, p. 3) explica o ensino desenvolvimental,

> Os pedagogos começam a compreender que a tarefa da escola contemporânea não consiste em dar às crianças uma soma de fatos conhecidos, mas em ensiná-las a orientar-se independentemente na informação científica e em qualquer outra. Isto significa que a escola deve ensinar os alunos a pensar, quer dizer, desenvolver ativamente neles os fundamentos do pensamento contemporâneo para o qual é necessário organizar um ensino que impulsione o desenvolvimento. Chamemos esse ensino de "desenvolvimental" (DAVÍDOV, 1988, p.3).

O termo "desenvolvimental" remete ao ensino que proporciona o desenvolvimento da mente e da personalidade por meio da teorização, ou seja, do conhecimento científico dos conteúdos. A repetição e a "decoreba" tão presentes ainda hoje nas escolas, principalmente no processo ensino-aprendizagem de matemática, para Davidov, não contribuem nessa construção "desenvolvimental" do indivíduo. Para ele, a memorização é importante na medida em que favoreça o desenvolvimento mental e afirma,

---

[19]O pensamento teórico não surge e nem se desenvolve na vida cotidiana das pessoas, ele se desenvolve somente em uma tal instrução, cujos programas se baseiam na compreensão dialética do pensamento.(DAVIDOV, 1999, p.7)

> Nós, de nenhuma maneira, menosprezamos o papel da memória. Mas é indispensável empregar métodos que favoreçam o desenvolvimento mental. A prática de lembrar sem compreender influencia negativamente na formação de entendimentos independentes, dificulta o desenvolvimento do pensamento crítico e racional. (DAVIDOV, 1988, p. 163).

Nesse contexto, Libâneo e Freitas (2006, p. 5 e 6) apresentam as contribuições da teorização de Davidov:

> 1) Integração entre os conteúdos científicos e o desenvolvimento dos processos de pensamento; 2) Necessária correspondência entre a análise de conteúdo e os motivos dos alunos no processo de ensino e de aprendizagem"; 3) Fundamentação teórica dos professores no conteúdo da disciplina e também na sua didática.

Ao analisarmos essa citação, destacamos dois pontos: de um lado, para que de fato o aluno consiga desenvolver uma aprendizagem que leve ao desenvolvimento, tendo como base o conhecimento teórico-científico, objeto principal na atividade de estudo, o papel do professor como organizador do ensino é fundamental. No entanto, sua formação, na maioria das vezes, não lhe possibilita compreender essa organização que leve ao desenvolvimento. Por outro lado, para haver a integração entre conteúdos científicos e desenvolvimento dos processos de pensamento, é fundamental compreender o processo de formação dos conceitos.

2.5 Aprendizagem conceitual: uma abordagem na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural

Amparados nos estudos de Vigotski e de Davidov, como principais aportes teóricos para discutirmos a aprendizagem de conceitos, entendemos que o desenvolvimento do indivíduo está ligado diretamente à sua relação consciente com a natureza e sofre influência da sua vivência, ou seja, do seu meio social, de suas relações, além da herança biológica própria de cada um.

Essas influências acontecem por meio da mediação do outro, do mais experiente para o menos experiente, que, inserido em determinada cultura, transmite para a criança informações (conceitos/conhecimentos). A criança por sua vez, apropria-se de objetos e conceitos e adquire habilidades essencialmente humanas, o que contribui com o seu desenvolvimento psíquico.

Para Vigotski, os conceitos são encontrados nos objetos e são instrumentos culturais complexos do pensamento, "o conceito não é simplesmente um conjunto de conexões associativas que se assimila com a ajuda da memória, não é um hábito mental automático, mas um autêntico e completo ato do pensamento" (VIGOTSKI, 1993, p. 184). Para ele, o conceito não é algo mecânico e alheio à realidade, é dinâmico e criativo, cujo desenvolvimento pressupõe muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar e deve contribuir na interação e na resolução de problemas em uma relação direta com a realidade.

A formação de novos conceitos surge no processo de execução de uma tarefa,quando os alunos são desafiados, instigados, saem da sua zona de conforto, das situações cotidianas corriqueiras e são mergulhados em diferentes áreas do conhecimento do currículo escolar com variadas estruturas conceituais.

> O processo de formação conceitual é irredutível às associações, ao pensamento, à representação, ao juízo, às tendências determinantes, embora todas essas funções sejam participantes obrigatórias da síntese complexa que, em realidade, é o processo de formação dos conceitos. Como mostra a investigação, a questão central desse processo é o emprego funcional do signo e da palavra como meio através do qual o adolescente subordina ao seu poder as suas próprias operações psicológicas, através do qual ele domina o fluxo dos próprios processos psicológicos e lhes orienta a atividade no sentido de resolver os problemas que tem pela frente. (VIGOTSKI, 2001, p. 169).

O processo de formação de conceitos teóricos, que ocorre na educação escolar, especialmente na educação dos adolescentes, envolve a abstração, a generalização e sínteses complexas, no movimento do abstrato ao concreto pensado.

2.5.1 Conceitos espontâneos e a formação do pensamento empírico, conceitos científicos e a formação do pensamento teórico

O processo de formação de conceitos acontece inicialmente em casa, na convivência com os familiares e com o ambiente em que se vive, foram chamados por Vigotski de *conceitos espontâneos* (cotidianos). São conceitos apreendidos e caracterizados pela ausência de uma percepção consciente de suas relações.

Na escola, com a mediação do professor, ocorre a potencialização na formação dos conceitos científicos (teóricos), que são sistemáticos, intencionais, produzidos pelo homem ao longo da história. Para Vigotski (1987, p.100), os conceitos espontâneos são "um produto do aprendizado pré-escolar, da mesma forma que os conceitos científicos são produto do aprendizado escolar". Em outras palavras, afirma que "um conceito espontâneo se origina de situações concretas, por sua vez, o conceito científico envolve uma atitude mediada em relação ao objeto”. (VIGOTSKI, 2005, p. 135).

Os conceitos científicos adquiridos na escola são fundamentais para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores do indivíduo, porém demandam um processo de apropriação mais complexo. Duarte (2016, p.5) afirma que

> Os conhecimentos que devem constituir os currículos escolares são complexos sistemas de instrumentos psicológicos e, pode-se afirmar, com segurança, que o domínio, pelo aluno, da riqueza de atividade humana contida nesses conhecimentos resultará em efetivo desenvolvimento psíquico desse indivíduo”.

Desenvolver o pensamento teórico, de acordo com Libâneo e Freitas (2015, p. 344), é criar situações para “desenvolver processos mentais pelos quais se chega aos conceitos, transformando-os em ferramentas para fazer generalizações conceituais e aplicá-las a problemas específicos”.

O desenvolvimento dos conceitos espontâneos ou empíricos favorece a formação do pensamento empírico, enquanto a assimilação dos conhecimentos científicos favorece o desenvolvimento do pensamento teórico, que, segundo Davidov (1988), é um dos objetivos da educação escolar.

Essas duas formas de pensamento têm pontos de partida, finalidades, conteúdos, formas de elaboração e produtos distintos, como afirma Resende (2019), com base nos escritos de Davidov. O pensamento empírico parte da atividade objetivo-sensorial dos homens; é elaborado no processo de comparação dos objetos e das suas representações; tem como finalidade a catalogação, a classificação dos objetos e dos fenômenos; o seu conteúdo diz respeito a representações e a propriedades externas dos objetos; movimenta-se na esfera da aparência; elaborados por abstração e generalização empíricas; são representados por palavras-termo. O pensamento teórico, por sua vez, tem como ponto de partida a análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral; tem como finalidade a busca da essência; o seu conteúdo expressa a relação objetiva do universal e do particular, dentro do todo; é elaborado pela abstração e pela generalização substantivas; o seu produto são os conceitos e expressa-se por diferentes meios simbólicos e semióticos; busca a criação de leis. (RESENDE, 2019, p. 307-308)

Para compreendermos os processos lógicos de formação do pensamento, tanto o empírico como o teórico, faz necessário considerar: a abstração, a generalização e a formação de conceitos.

A abstração empírica parte do concreto, como objeto sensorialmente percebido, sendo o abstrato constituído de propriedades comuns percebidas, a partir de comparações, chegando, por um processo de análise, à generalização formal das propriedades. Ela volta-se para o que é dado, por isso está sujeita a conclusões enganosas. A abstração empírica conduz aos nexos externos do conceito, ligados aos aspectos externos, à linguagem, às diferentes representações.

A abstração substantiva, busca obter um novo objeto por um processo de elucidação da caracterização da dependência e da interdependência de fatores que caracterizam a existência do objeto. Busca reproduzir e revelar as propriedades dos objetos por meio de suas mútuas relações e conexões.

A abstração substantiva é contraditória, pois ela é “o começo não desenvolvido do todo desenvolvido” (DAVYDOV, 1982, p. 145), pois permite a ascensão do abstrato ao concreto pensado, que é a essência do objeto. A ascensão do abstrato ao concreto pensado é o processo reitor do pensamento teórico, segundo Davydov (2012).

A essência é a definição do geral e revela-se no processo de desenvolvimento do objeto, portanto não é dada por observação direta. Nesse sentido, o pensamento teórico considera o movimento lógico-histórico do objeto, os seus nexos internos ou nexos conceituais, os quais “contém a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento”. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 96).

Nessa relação dos conceitos espontâneos/científicos e da abstração/generalização, Vigotski afirma que os conceitos espontâneos partem do concreto para o abstrato, um processo indutivo, ou seja, a criança, quando começa a ter contato com os objetos, primeiro os manipula, mas ainda não tem consciência do seu significado.

> Quando uma palavra nova é aprendida pela criança, o seu desenvolvimento mal começou: a palavra é primeiramente uma generalização do tipo mais primitivo; à medida que o intelecto da criança se desenvolve, é substituída por generalizações de um tipo cada vez mais elevado – processo este que acaba por levar à formação dos verdadeiros conceitos (VIGOTSKI, 1998, p. 104).

Já os conceitos científicos, para Vigotski, partem do abstrato para o concreto, chamado de dedução. Para melhor entender, primeiro apreende-se o conceito de modo abstrato, e, em seguida, esse conceito se concretiza num concreto pensado. Em outras palavras, os conceitos científicos são definições abstratas as quais são contextualizadas mediante a resolução de um problema. Assim, Vigotski entende que o desenvolvimento dos conceitos científicos ocorre do geral para o específico, um exemplo dado foi o da flor e da rosa. Primeiro a criança aprende o que é flor, e conhece os vários tipos de flor, depois ela aprende que a rosa é uma flor, partiu do geral para o específico.

Segundo ele,

> A criança adquire consciência dos seus conceitos espontâneos relativamente tarde; a capacidade de defini-los por meio de palavras, de operar com eles à vontade, aparece muito tempo depois de ter adquirido os conceitos. Ela possui o conceito (...), mas não está consciente do seu próprio ato de pensamento. O desenvolvimento de um conceito científico, por outro lado, geralmente começa com sua definição verbal e com sua aplicação em operações não-espontâneas (...). Poder-se-ia dizer que o desenvolvimento dos conceitos espontâneos da criança é ascendente, (indutivo) enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente (dedutivo). (VIGOTSKI, 1991, p.93).

Nessa mesma linha de raciocínio, Sousa, Panossian e Cedro (2014) defendem que a formação dos conceitos científicos, no movimento do abstrato para concreto, contribui no desenvolvimento do pensamento teórico do aluno.

> Esse movimento de ascensão do abstrato para o concreto realizado na atividade de aprendizagem permite não somente a apropriação dos conhecimentos teóricos, mas também o desenvolvimento da consciência, do pensamento teórico e de ações psíquicas vinculadas a este processo como a reflexão, a análise e o planejamento". (SOUSA, PANOSSIAN, CEDRO, 2014, p. 82)

Todavia, percebemos que tanto nas escolas, quanto nos institutos de pesquisa na área da educação e nas políticas públicas voltadas para o ensino, questiona-se a real função da escola no desenvolvimento e na vida do aluno com vistas a essa formação dos conceitos científicos. Os alunos questionam aos professores em sala de aula o porquê de aprenderem determinados conteúdos, que, no entendimento deles, não servem para a sua vida fora dos muros da escola, "estudam" apenas para passar de ano, não compreendem a importância de desenvolverem o pensamento teórico.

Ao voltarmos para o processo ensino-aprendizagem de matemática, essa situação é preocupante. Predomina o decorar fórmulas e regras que, após alguns dias, os alunos não lembram mais.Muitos docentes alegam que "ensinam", mas os alunos não "aprendem", ou "aprendem" apenas para o momento da prova, não veem sentido no que é ensinado, parecem máquinas programadas para executar determinada tarefa e depois perdem sua função. Nesse contexto, recorremos a Sousa, Panossian e Cedro que apresentam uma outra perspectiva para o ensinar e o aprender na educação escolar:

> O ponto fundamental que nos une é a convicção que fomos criando juntos sobre o papel da educação escolar: o de que ensinar é, sobretudo, dar sentido ao que deve ser aprendido. E aprender um conceito é apropriar-se de um instrumento cognitivo e do modo de usá-lo. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 9).

Assim, na busca de ultrapassar a barreira do "aprender" apenas para fazer uma prova e sim "aprender" para a apropriação dos conceitos, destacamos a importância dos estudos e pesquisas que resgatam o histórico-lógico na formação do conceito, com vistas ao ensino desenvolvimental, proposto por Davidov.

De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 74),

> As crianças saem da escola com a impressão de que os conceitos científicos que aparecem nos livros didáticos de forma linear, sem hesitação, estão prontos e acabados, são imutáveis, bastando-se a si mesmos. Aqui o conhecimento científico não tem história.

No resgate do movimento histórico da formação do conceito, é possível privilegiar um ensino que impulsione o desenvolvimento integral do aluno por meio de atividades que despertem a imaginação, a memória, a atenção, o raciocínio lógico, que o desafie. Cabe à escola e aos professores incentivarem essa formação de conceitos por meio de uma organização didática, que atue na zona de desenvolvimento proximal discente, visando ao desenvolvimento do pensamento teórico. Porém, muitas das orientações curriculares, no contexto de uma visão pragmática, enfatizam o que o aluno irá aplicar, sem ter a consciência de que a aplicação exige conhecimento conceitual. Esse é o nível das mudanças acessíveis, é o momento mais importante na relação da aprendizagem com o desenvolvimento, no qual a medição do professor por meio de ações intencionais contribui com as transformações.

Finalizamos esse tópico entendendo que a Teoria Histórico-Cultural estabelece uma estreita relação entre educação e a formação humana, valoriza o papel da escola como instituição que possibilita aos estudantes a apropriação do conhecimento sistematizado e que estes participam ativamente no processo de desenvolvimento do pensamento. Consideramos, ainda, que essa teoria pode subsidiar a organização do ensino capaz de promover o desenvolvimento.

Entretanto, Resende (2019, p. 298) nos alerta:

> O desenvolvimento do pensamento teórico, com base na abstração e generalização substantivas e na formação de conceitos, na perspectiva de Davidov, é possível e desejável na educação matemática, porém outros elementos devem ser considerados no campo da pesquisa e do ensino. A criança e o jovem do século XXI, a quem devem ser ensinados os conhecimentos historicamente acumulados, certamente não são as crianças e os jovens do século XX, assim como não o são as condições de realização das práticas pedagógicas.

Assim, é necessário compreendermos o cenário do desenvolvimento dessa pesquisa, ou seja, a condição social do desenvolvimento. Vivemos em um país capitalista, no século XXI, o que se contrapõem ao contexto dos experimentos realizados pelos pesquisadores soviéticos, um cenário socialista, vivido na Rússia na época de Vigotski e seus seguidores, trabalhando com crianças e adolescentes, que possuíam outras condições socioculturais. Além disso, considerarmos as condições objetivas de realização da pesquisa de campo, o contexto de uma pandemia que provocou o isolamento social e suspensão das aulas presenciais em todo o país, durante o ano de 2020 e 2021.

Na próxima seção, traremos para a discussão, o Ensino Médio, nível de ensino em que realizamos o experimento. Resgatamos os documentos e leis que o regem, até chegarmos à proposta de reformulação de 2017, apresentaremos também o ensino de Matemática nesses documentos.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO DO ESTUDO: O ESTADO DO CONHECIMENTO E OS ASPECTOS LEGAIS E CURRICULARES

O objetivo desse capítulo é contextualizar o estudo do objeto (o ensino da função seno) por meio das pesquisas já realizadas, em seguida caracterizar o Ensino Médio e as propostas curriculares, as normativas e orientações legais que marcaram a sua trajetória a partir da LDB 9.394/96, uma trajetória de contradições, mostrando a necessidade e a importância de pesquisas voltadas para esse nível de ensino. Analisamos, também, os documentos gerais e os específicos da área de matemática para uma melhor compreensão do objeto de pesquisa, conforme recomendado por Aquino (2017), ao tratar do experimento didático-formativo.

3.1 O estado do conhecimento do objeto

Dentro desse objetivo de contextualizar o objeto de estudo (função seno), buscamos mapear e analisar os trabalhos já desenvolvidos sobre o tema em questão elaborados nas últimas três décadas, por meio de teses e dissertações disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES.

Algumas perguntas nortearam esse mapeamento, dentre elas: Existem pesquisas que apontam como objetivo investigar o processo ensino-aprendizagem de Trigonometria, no Ensino Médio? Quantas dessas pesquisas há em nível de Doutorado? Quais os principais temas estudados em relação ao assunto? Quais são as lacunas existentes nas pesquisas realizadas?

Esse levantamento das teses e das dissertações, associado à análise de seus resumos, insere-se na modalidade de pesquisa denominada por Morosini; Fernandes (2014, p.155), como Estado do Conhecimento, isto é:

> Identificação, registro, categorização que levem à reflexão e síntese sobre a produção cientifica de uma determinada área, em um determinado espaço de tempo, congregando periódicos, teses, dissertações e livros sobre uma temática específica.

Uma característica importante que pode ser levantada no trabalho do Estado do Conhecimento, de acordo com os mesmos autores, é a “presença do novo na pesquisa”; ou seja, desvelar as lacunas que possam existir sobre determinado tema, de modo a contribuir com as inovações no campo da pesquisa.

Utilizamos como fonte de dados, o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, porque é uma fonte segura de informações.

> [...] ela é capaz de oferecer informações precisas, completas e abrangentes acerca de estudos acadêmicos realizados em todo território nacional e em diferentes áreas do conhecimento. Além disso, a Capes é responsável por atividades que envolvem quatro linhas de ação: acesso e divulgação da produção científica; investimentos na formação de recursos de alto nível no país e exterior; promoção da cooperação científica internacional e, avaliação da pós-graduação *strictu sensu*, tendo como princípio a busca de um padrão de excelência acadêmica sempre maior dos mestrados e doutorados nacionais. (BREJO, 2007, p.15),

Iniciamos as buscas pela palavra-chave "Trigonometria". O foco, a princípio, era realizar o levantamento de trabalhos, publicados nas últimas três décadas (1986 a 2016). Porém, esse banco nos apresentou trabalhos a partir de 1991; restringindo-se, assim, o nosso propósito inicial.

Na primeira seleção, encontramos 271 trabalhos, relacionados à palavra-chave. Nesse momento, partimos para alguns "recortes"; cujo critério de inclusão ou exclusão foi focar nos trabalhos que evidenciassem a Trigonometria, desenvolvida no Ensino Médio. Para isso, utilizamos a ferramenta "refinar".

A primeira opção do "refinar" é em relação ao ANO. Como comentamos, deixamos todos os anos marcados (1991 a 2016); os quais caracterizam os anos de trabalhos disponíveis em relação à temática proposta.

As próximas opções relacionam-se a AUTOR, ORIENTADOR e BANCA. Nestas, também, não fizemos nenhuma seleção por não termos a intenção de uma análise sobre tais itens. Em seguida, surgiu como opção de refinamento "GRANDE ÁREA DO CONHECIMENTO", com 10 itens, os quais estão apresentados pela Tabela 1:

Tabela 1: Número de trabalhos por Grande Área do Conhecimento – Catálogo de Teses e Dissertações da Capes - 1998-2016

Grande Área do Conhecimento	Quantidade de Trabalhos
Ciências da Saúde	1
Ciências Exatas e da Terra	157
Ciências Exatas e da Terra	6

Grande Área do Conhecimento	Quantidade de Trabalhos
Ciências Humanas	21
Ciências Sociais Aplicadas	2
Ciências Sociais Aplicadas	1
Engenharias	4
Multidisciplinar	38
Multidisciplinar	37
TOTAL	271

Fonte: Banco de Dados CAPES. Elaboração da Tabela 1 pela autora desse estudo

Observamos que algumas opções aparecem em duplicidade, ao pesquisarmos sobre o motivo de tal duplicação, verificamos que a opção que apresenta a maior quantidade de trabalhos, refere-se aos estudos cadastrados antes da Plataforma Sucupira[20](anterior a 2013 aproximadamente); e, a opção em duplicidade com a menor quantidade de trabalhos, contempla os estudos cadastrados após a Plataforma Sucupira.

Contudo, para esse refinamento, selecionamos as duas opções de "Ciências Exatas e da Terra"; as duas de "Ciências Humanas"; e, as duas de "Multidisciplinar", já que temos como propósito analisar todos os trabalhos antes e depois da Plataforma; e, dessa feita, conseguimos chegar a 263 trabalhos.

Optamos pela exclusão, em as Grandes Áreas do Conhecimento, das "Ciências da Saúde", "Ciências Sociais Aplicadas" e "Engenharias", por não se tratar do objetivo principal, pois o que pretendemos focar é a Trigonometria no Ensino Médio.

Para o refinamento seguinte, o Banco de dados nos apresenta a opção "ÁREA DO CONHECIMENTO"; e, traz 11 áreas as quais estão visualizadas na Tabela 2.

---

[20] É uma nova e importante ferramenta para coletar informações, realizar análises e avaliações e ser a base de referência do Sistema Nacional de Pós-graduação (SNPG).A Plataforma deve disponibilizar em tempo real e com muito mais transparência as informações, processos e procedimentos que a CAPES realiza no SNPG para toda a comunidade acadêmica.Igualmente, a Plataforma propiciará a parte gerencial-operacional de todos os processos e permitirá maior participação das Pró-reitorias e Coordenadores de Programas de Pós-graduação. A escolha do nome é uma homenagem ao professor Newton Sucupira, autor do Parecer nº 977 de 1965. O documento conceituou, formatou e institucionalizou a Pós-graduação Brasileira nos moldes como é até os dias de hoje.

Tabela 2: Número de trabalhos por "Área do Conhecimento"- Catálogo de Teses e Dissertações da Capes - 1998-2016

Área do Conhecimento	Quantidade de trabalhos
Educação	4
Educação	21
Ensino	6
Ensino	27
Ensino de Ciências e Matemática	32
Ensino de Ciências e Matemática	8
Física	1
Geociência	1
Interdisciplinar	2
Matemática	156
Matemática	5
TOTAL	263

Fonte: Banco de Dados CAPES. Elaboração da autora

Nesse caso, também, encontramos áreas em duplicidade; cujo motivo já foi explicitado anteriormente. Aqui, selecionamos as duas áreas de "Educação"; as duas de "Ensino"; as duas de "Ensino de Ciências e Matemática"; a "Interdisciplinar"; e, as duas de "Matemática"; reduzindo para 261 trabalhos publicados. Excluímos as Áreas do Conhecimento "Física" e "Geociência", em função do nosso foco.

A próxima opção de refinamento apresentada é "ÁREA DE CONCENTRAÇÃO", com 20 opções (Tabela 3).

Tabela 3: Número de trabalhos por "Área de Concentração" - Catálogo de Teses e Dissertações da Capes - 1998-2016

Área de Concentração	Quantidade de Trabalhos
Em Branco	63
Análise Matemática	1
Aprendizagem Significativa em Física na Educação Básica e Superior	1
Educação	4
Educação Matemática	14
Educação Matemática, Cultura e Diversidade	1
Ensino de Ciências	1
Ensino de Ciências e Educação Matemática	1
Ensino de Ciências e Matemática	8
Ensino de Ciências Naturais e Matemática	2
Ensino de Matemática	64
Ensino e Difusão de Astronomia	1
Formação de Professores em Ciências e Matemática	2

Área de Concentração	Quantidade de Trabalhos
Matemática	52
Matemática Aplicada	4
Novas Tecnologias no Ensino de Matemática	2
Processos e Produtos para Ensino	1
Projetos Educacionais de Ciências	2
Álgebra	2
TOTAL	261

Fonte: Banco de Dados CAPES. Elaboração da autora.

Nesse caso, selecionamos oito Áreas de Concentração, sendo elas: "Nenhum[21]", "Educação", "Educação Matemática"; "Educação Matemática, Cultura e Diversidade"; "Ensino de Matemática"; "Matemática"; "Matemática Aplicada"; e, "Álgebra"; refinando para 204 trabalhos. Cabe destacar que a Trigonometria foi foco de trabalho de outras áreas de concentração, tal como a Geometria e a Topologia; a Astronomia, dentre outras. Fizemos a exclusão, seguindo o critério já mencionado.

As três últimas opções de refinamento do site são "NOME DO PROGRAMA", "INSTITUIÇÃO" e "BIBLIOTECA". Nestas, não fizemos nenhuma marcação, pois buscamos conhecer os trabalhos científicos publicados, independentemente da região ou do foco dos Programas de Mestrado e de Doutorado.

Com os 204 trabalhos selecionados, iniciamos a análise individual por meio dos títulos das produções e excluímos aqueles que apresentavam como foco a Trigonometria no Ensino Fundamental, enxugando para 111 trabalhos.

Com intuito de afunilar ainda mais o mapeamento, fizemos uma segunda análise dos títulos dos trabalhos, selecionando apenas os trabalhos que faziam referência, já no título, ao objeto de estudo que é a **Trigonometria no Ensino Médio;** tanto em relação ao conteúdo específico e às aplicações, quanto em relação às diferentes práticas pedagógicas que podem ser adotadas no processo ensino-aprendizagem. Dessa forma, chegamos a 24 trabalhos.

Com a seleção dos 24 trabalhos, iniciamos a análise dos resumos e das introduções; e, sempre que necessário, realizamos a leitura do trabalho completo na busca de categorizá-los por sua natureza, ano e objetivo geral, com intuito de conhecer o foco de cada produção.

Ao analisarmos os estudos apresentados, verificamos que, de 24 (vinte e quatro) produções, apenas 1 (uma) se tratava de tese de Doutorado, publicada em 1998; as outras 23 (vinte e três) são em nível de Mestrado; o que demonstra a importância de se desenvolverem

[21] "Nenhum" aparece como uma das oito áreas de concentração apresentadas no banco de dados da Capes, verificamos que os trabalhados disponibilizados nessa área são aqueles que não foram agrupados em nenhuma outra das sete áreas apresentadas.

trabalhos atuais sobre a temática em pauta. Em relação ao ano de publicação, apresentamos a Tabela 4.

Tabela 4: Ano de Publicação das Teses e Dissertações sobre trigonometria no ensino médio do Catálogo de Teses e Dissertações da Capes – 1998-2016

Ano de Publicação	Quantidade de Produções
1998	1
1999	-
2000	-
2001	-
2002	-
2003	1
2004	-
2005	1
2006	-
2007	-
2008	2
2009	-
2010	1
2011	2
2012	2
2013	2
2014	3
2015	5
2016	4
TOTAL	24

Fonte: Banco de Dados CAPES. Elaboração da Tabela 4 pela autora desse estudo.

O primeiro trabalho sobre a Trigonometria no Ensino Médio, constante desse Banco, aparece em 1998; que é exatamente a única tese em nível de Doutorado, a qual citamos anteriormente. De 1999 a 2009, poucas produções foram publicadas; ou seja, apenas 4 (quatro), nesses onze anos. Após 2009, encontramos uma maior quantidade de trabalhos, sendo 15 (quinze) em seis anos. Ao analisarmos o porquê desse crescimento, verificamos que muitos foram desenvolvidos com a expansão dos Mestrados Profissionais, especificamente o PROFMAT[22].

Para a última análise das informações, buscamos, a partir dos objetivos gerais levantados, dividir as produções em quatro categorias de acordo com o seu foco de produção: Tecnologias; História da Matemática; Recursos Didáticos; e, Prática Pedagógica/Metodologias de Ensino. E, assim, chegamos à Tabela 5.

[22] O PROFMAT é um Programa de Pós-graduação gratuito que conduz ao grau de Mestre (Mestrado Profissional) na área de Matemática. A sua prioridade é para professores de Escola Pública, mas também são oferecidas vagas para os demais candidatos.

Tabela 5: Número de teses e dissertações sobre trigonometria no ensino médio por categorias – Catálogo de Teses e Dissertações da Capes – 1998 - 2016

Categorias	Quantidade de produções
Novas Tecnologias	5
História da Matemática	2
Práticas Pedagógicas e Metodologias de Ensino	11
Recursos Didáticos	4
Não identificadas	2

Fonte: Banco de Dados CAPES. Elaboração da Tabela 5 pela autora desse estudo.

Em relação à categoria "Novas Tecnologias", estão os trabalhos que focam a utilização de *softwares* que acreditam ser facilitadores do processo ensino-aprendizagem em Matemática, totalizando 5 (cinco) trabalhos. Dentre estes *softwares* está o GEOGEBRA[23], com três trabalhos dedicados a ele. Estes trabalhos buscam investigar as contribuições desse *software* no ensino de Trigonometria. Além do GEOGEBRA, aparece o GRAFMÁTICA[24]e o M@TMÍDIAS[25].

Na categoria "História da Matemática", agrupamos as produções que defendem a utilização da História da Matemática como ferramenta na construção do conhecimento discente, somando-se apenas 2 (dois) trabalhos.

Verificamos que, nesses trabalhos, a ênfase dada foi para a investigação do processo de construção da aprendizagem a partir de uma abordagem-filosófica, por meio da reconstrução histórica da Trigonometria; buscando levantar as contribuições ao processo ensino-aprendizagem de tal conteúdo matemático. Entendemos que trabalhos, nessa linha de investigação, podem oferecer importantes contribuições ao demonstrar a Matemática; e, especificamente, a Trigonometria como uma criação humana, desenvolvida a partir das necessidades do homem.

Na categoria "Recursos Didáticos", inserimos os trabalhos que apresentavam algum material didático, como por exemplo, o Ciclo Trigonométrico[26] manipulável; a utilização dos

[23] O GEOGEBRA é um *software* matemático que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo. Ele foi desenvolvido por MarkusHohenwarter´, da Universidade de Salzburg, para a Educação Matemática nas Escolas. Consiste em um dinâmico sistema de Geometria.
[24] O *software* GRAPHMATICA é um gerador de gráficos de funções de uma variável, nas suas várias formas: cartesiana, polar, paramétrica, logarítmica, trigonométrica, inequação e implícita.
[25] O programa M@tmídias trata-se de uma parceria entre a Mais e a Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores (EFAP) do Estado de São Paulo, para o oferecimento de uma série de Cursos para professores de Matemática do Ensino Médio.
[26] O CicloTrigonométrico é uma circunferência de raio unitário com intervalo de [0, 2π]; a cada ponto da circunferência associamos um número real. No Ciclo Trigonométrico, trabalhamos três tipos de simetria: em relação ao eixo vertical (seno;ao eixo horizontal (cosseno); e, em relação ao centro.

recursos disponíveis no Laboratório de Matemática[27]; e, o próprio livro didático como recursos facilitadores da aprendizagem da Trigonometria, no Ensino Médio; totalizando 4 (quatro) trabalhos.

O Ciclo Trigonométrico foi citado em dois desses estudos e pretenderam avaliar a sua contribuição na construção do conhecimento discente. Em relação ao Laboratório de Matemática, entendemos que, nesse ambiente, podem ser utilizados diferentes recursos didáticos, porém são poucas as Escolas que possuem uma infraestrutura destinada a tal fim.

De acordo com Oshima e Pavanelo (s/d),

> A maioria das escolas públicas não possui um espaço próprio para organizar e guardar esses materiais, os mestres não têm a sua disposição um local apropriado para desenvolverem essas atividades pedagógicas, para elaborar e propiciar aulas mais agradáveis aos alunos e para desenvolver sua formação continuada – um espaço ao qual nos referimos como LEM (Laboratório de Ensino e Aprendizagem da Matemática). (OSHIMA E PAVANELO, s/d,p. 3)

Oshima e Pavanelo (s/d) corroboram com o que já fora afirmado por outros autores sobre a deficiência das Escolas no que tange à disponibilização de infraestrutura condizente à importância em se desenvolver atividades didático-pedagógicas para o eficiente aprendizado do aluno.

Já o estudo que aborda o livro como recurso didático, analisou a abordagem dada à Trigonometria em alguns livros didáticos, utilizados em nível de Ensino Médio, no Brasil; os quais foram publicados em diferentes momentos históricos; isto é, desde o início do século XX até os nossos dias. Entendemos que os trabalhos sobre essa temática são importantes, pois, hoje, o principal recurso didático utilizado por muitos professores, ainda, é o livro didático; muitas vezes, o único recurso disponível e utilizado.

Compreendemos que a utilização de recursos didáticos é fundamental para as aulas de Matemática. E, portanto, comungamos com as ideias de Figueiras (2014, p. 05), que contribui afirmando que

> Percebe-se a utilização do recurso didático como um elemento indispensável às aulas de matemática. Ao docente, cabe rever sua prática de ensino e observar se suas aulas são inovadoras, contextualizadas e permitem ao aluno desenvolver habilidades matemáticas de forma crítica e reflexiva. O não atendimento a essa demanda implica numa urgente incorporação dos

---

[27] O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático". (LORENZATO, 2006, p. 6-7).

> recursos didáticos em suas aulas, salientando seu uso consciente e adequado a cada situação.

Conforme Figueiras (2014) atesta, o recurso didático consiste em uma ferramenta determinante para que o aluno possa realizar, reflexiva e criticamente, o pensar matemático bem como desenvolver as suas competências e habilidades no sentido de ele incorporar novos saberes e conhecimentos.

Para finalizar, na categoria "Práticas Pedagógicas e Metodologias de Ensino", incluímos os trabalhos que sugerem alguma prática pedagógica e/ou metodologias de ensino, os quais reúnem a maior quantidade de trabalhos, isto é, 11 (onze). Nessa etapa, chamou-nos a atenção que, desses onze trabalhos, quatro tiveram como objeto de estudo as funções trigonométricas. Esses estudos buscaram apresentar como proposta de abordagem, o conteúdo didático-programático de forma a facilitar a aprendizagem dos alunos no Ensino Médio, porém, nenhum deles apresentou um experimento didático-formativo para analisara organização do ensino e compreensão do conteúdo e nenhum teve como foco a função seno, mostrando a importância de se desenvolver estudos sobre tal temática, sendo uma lacuna com a qual gostaríamos de contribuir.

3.2 O Ensino Médio no Brasil: regulamentação legal e contradições

Vale afirmar que a locução *Ensino Médio*, como sendo a última etapa da Educação Básica, começa a ser usada a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB 9.394/96 (BRASIL, 1996). Antes desse documento, esse nível de ensino era conhecido como 2º grau.

Em 1988, com a promulgação da nova Constituição, a educação, com vistas à formação para a cidadania e preparação para o mercado de trabalho, passa a ser direito de todos e dever do Estado. Conforme inciso II do Art. 208,prevê-se a obrigatoriedade de oferta da educação básica e "a progressiva extensão da obrigatoriedade e gratuidade ao ensino médio". A partir dessas exigências, em 1996, é aprovada a "nova" LDB nº 9.394, que está em vigor até a presente data, com muitas emendas e alterações.

Na LDB9394/96, a Educação Básica ficou organizada em Educação Infantil – EI - (antiga pré-escola), Ensino Fundamental – EF- (1ª a 8ª séries, hoje 1º ao 9º ano), Ensino Médio – EM - (antigo 2º grau), última etapa da Educação Básica com finalidade de aprofundar os conteúdos do EF, conforme previsto no seu Art. 21.

O Ensino Médio de três anos, compondo a última etapa da Educação Básica, apresenta as seguintes finalidades, conforme previsto no Art. 35 da LDB 9.394/96:

> I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
> II – a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
> III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
> IV – a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina. (BRASIL, 1996, p.18).

No entanto, apesar de incluir o Ensino Médio como última etapa da educação básica, o que observamos, na prática, é que o Ensino Fundamental tem mais clareza quanto a sua finalidade e mais investimentos tanto financeiros, quanto pedagógicos, enquanto o Ensino Médio carece de identidade no sistema educacional brasileiro.De um lado, permanece a defesa de um ensino voltado à preparação do aluno para o mercado de trabalho (profissionalizante) e, por outro lado, um ensino para preparar o aluno para o vestibular, para o ENEM, questões essas que são objeto de estudo em pesquisas, como, por exemplo, os estudos de Ciavatta (2015). Inclusive, em 2008, com a Lei nº 11.741 de 2008, a educação profissionalizante ganha uma nova seção – Seção IV – A, na LDB/96, na qual se prevê a Educação Profissional Técnica de Nível Médio.

Em 1998, pela Resolução CEB nº 3, de junho de 1998, o MEC lança as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM), elaboradas, visando cumprir a LDB 9.394/96,que apresenta como função da União, em colaboração com os Estados, Distrito Federal e Municípios, no seu Art.9º inciso IV,elaborar “competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum”.

Desta forma, as DCNEM são apresentadas como um conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos para orientar a organização e o planejamento curricular nacional do Ensino Médio, articulando trabalho e prática social. Explicitadas no Parecer 15/98 e na Resolução 3/98, têm como objetivo:

> Sistematizar os princípios e diretrizes gerais contidas na LDB; explicitar os desdobramentos desses princípios no plano pedagógico e traduzi-los em diretrizes que contribuam para assegurar a formação básica comum nacional; dispor sobre a organização curricular da formação básica nacional e suas relações com a parte diversificada, e a formação para o trabalho. (BRASIL, 1998, p. 6).

São apresentados, no Art. 6º, os princípios pedagógicos que deveriam ser adotados como estruturadores dos currículos: “Identidade”, “Diversidade e Autonomia”, “Interdisciplinaridade” e “Contextualização”. Para cada um deles são sugeridos elementos que deveriam estar presentes. Chama a atenção o que se lê no Art. 8º, inciso IV, no que se refere à interdisciplinaridade:

> IV - a aprendizagem é decisiva para o desenvolvimento dos alunos, e por esta razão as disciplinas devem ser didaticamente solidárias para atingir esse objetivo, de modo que disciplinas diferentes estimulem competências comuns, e cada disciplina contribua para a constituição de diferentes capacidades, sendo indispensável buscar a complementaridade entre as disciplinas a fim de facilitar aos alunos um desenvolvimento intelectual, social e afetivo mais completo e integrado; (BRASIL, 1998)

Neste inciso, fica explícito o pressuposto de que a aprendizagem é decisiva para o desenvolvimento intelectual, social e afetivo dos alunos, embora com foco nas competências.

No seu Art. 10º, este documento traz a organização do currículo da base comum dividida em três áreas do conhecimento: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias. Para cada área são apresentadas competências e habilidades[28] com vistas a atingir os princípios pedagógicos da “autonomia”, “interdisciplinaridade”, “contextualização”, “diversidade” e “identidade”.

Para as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, são apresentados doze competências e habilidades na busca de relacionar os conteúdos trabalhados em sala de aula à prática social do aluno, aliando-os ao uso de diferentes tecnologias, que ganham destaque, sendo, inclusive, inseridas na denominação das áreas de conhecimento. Selecionamos quatro delas que reforçam essa afirmação,

> i) Entender a relação entre o desenvolvimento das ciências naturais e o desenvolvimento tecnológico e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuseram e propõem solucionar. j) Entender o impacto das tecnologias associadas às ciências naturais na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social. l) Aplicar as tecnologias associadas às ciências naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida. m) Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas. (BRASIL, 1998, p. 5).

---

[28] O conjunto de habilidades tem como objetivo assegurar o desenvolvimento de competências específicas de cada área.

Apesar das discussões ocorridas na época relacionadas à elaboração das DCNEM de 1998, o que observamos na leitura integral de seus artigos, é uma preocupação com a flexibilização do currículo escolar de maneira autônoma para uma preparação para o mercado de trabalho. Apesar de seu Art. 12 afirmar que não haveria dissociação entre a formação geral e a preparação básica para o trabalho, observa-se a contradição entre o discurso presente na lei e as práticas políticas dos governos federais.

Com a LDB/96 e as DCNEM/98, vem a necessidade da elaboração de Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como um conjunto de orientações e recomendações visando apoiar, sobretudo, o trabalho dos professores em sala de aula, com elementos práticos para a implementação das diretrizes.

3.3 Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a criação do ENEM

Nos anos de 1990, especificamente em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais começaram a ser publicados com a proposta de apoiar as escolas na elaboração dos seus currículos, trazendo conteúdos mínimos, competências básicas e sugestões de práticas pedagógicas aos professores, um referencial para ser usado de norte a sul do país, no entanto, segundo os seus autores, não deixando de considerar as diferenças culturais de cada região.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. (BRASIL, 1998, p.5).

Em função da extensão territorial e da diversidade do país, a preocupação era de a educação ter “parâmetros”, para que o aluno, seja do interior ou da capital, tivesse oportunidade de ter acesso aos conhecimentos necessários à formação do cidadão. Como parâmetros, não tinham um caráter normativo.

Os primeiros PCN publicados em 1997, foram os do Ensino Fundamental I (1ª a 4ª série), um conjunto de dez livros: Introdução, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História e Geografia, Arte, Educação Física, Apresentação dos temas transversais e Ética, Meio Ambiente e Saúde, Pluralidade Cultural e Orientação Sexual. Em 1998, foram lançados os do Ensino Fundamental II, que contemplam o mesmo conjunto.

Na busca de avaliar os estudantes que concluíam a última etapa da educação básica, em 1998, é criado o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), o qual induziu fortemente a organização/reorganização do currículo escolar e da prática pedagógica docente, sobretudo no Ensino Médio, após as mudanças que sofreu em suas finalidades. Hoje, é o principal instrumento de seleção para o ingresso no ensino superior de grande parte das universidades brasileiras. Desse modo, passa a se constituir em direcionador dos currículos e das avaliações, até em função da pressão exercida sobre as escolas para tirar "boas notas", numa prova com elevado nível técnico, indo totalmente na contramão das preocupações com a formação cidadã do aluno tão pregado e difundido nas escolas. Segundo a Portaria 468 de 3 de abril de 2017, no seu Art. 2º, constituía objetivo primordial do ENEM, quando da sua implantação:

> Aferir se aqueles que dele participam demonstram, ao final do ensino médio, individualmente, domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna e se detêm conhecimento das formas contemporâneas de linguagem. (BRASIL, 2017)

Com a inserção do Ensino Médio na Educação Básica e com o surgimento do ENEM, as discussões sobre o currículo se intensificaram. Não, apenas, discussões relacionadas ao conteúdo, mas, também, sobre avaliação, como parte integrante e intrínseca do processo educacional; sobre a autonomia na gestão das escolas; a inserção de tecnologias; a contextualização; a problematização; a relação teoria-prática; a interdisciplinaridade; os temas transversais, trazendo assuntos do cotidiano do aluno, responsáveis pela formação da cidadania; sobre a prática pedagógica, sendo esses alguns dos componentes contidos nos PCN, especificamente do Ensino Médio.

No ano 2000, são lançados os PCN do Ensino Médio organizados em quatro partes: Parte I - Bases Legais; Parte II - Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Parte IV - Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Na parte I, nas páginas iniciais, apresenta-se o objetivo, ao colocá-lo como instrumento de difusão dos princípios que deveriam orientar o ensino médio, ao mesmo tempo em que orienta os professores na busca de novas metodologias,

> Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias. Ao distribuí-los, temos a certeza de contar com a capacidade de nossos mestres e com o seu empenho no aperfeiçoamento da prática educativa. Por isso, entendemos sua construção como um processo contínuo:

> não só desejamos que influenciem positivamente a prática do professor, como esperamos poder, com base nessa prática e no processo de aprendizagem dos alunos, revê-los e aperfeiçoá-los. (BRASIL, 2000, p. 2).

Nas três partes finais estão presentes as áreas do conhecimento (disciplinas), nas quais se defende uma educação científica e tecnológica com vistas aos conceitos aplicados na solução de problemas do cotidiano discente, tendo como pilares: aprender a aprender (educação formal), aprender a fazer (educação profissional), aprender a conviver (respeito à diversidade) e aprender a ser (cidadania).

Entendemos que os PCN constituem um marco na educação brasileira. Não negamos sua importância, porém suas discussões estão imbricadas no ensino focado na prática, que tem origem no construtivismo, na pedagogia do "aprender a aprender", na resolução de problemas do cotidiano, deixando, em segundo plano, a questão da formação dos conceitos que pode promover o desenvolvimento das funções psíquicas superiores discente e é condição para que os alunos possam resolver os problemas.

Sobre as bases nas quais se assentaram esses dispositivos legais e curriculares, afirma Ciavatta (2015, p. 117 e 118):

> A mais influente, nas últimas três décadas, entre as pedagogias hegemônicas tem sido o construtivismo, que atuou como carro chefe que abriu caminho para o cortejo das demais pedagogias do "aprender a aprender", como teoria do professor reflexivo, a pedagogia dos projetos, a pedagogia das competências e o multiculturalismo, entre outras. E essa limitação do conhecimento a uma função adaptativa é bem evidente no construtivismo.

Amparados nos PCN, em 2006, a Secretaria de Educação Básica, por intermédio do Departamento de Política do Ensino Médio, encaminha para os professores o documento "Orientações Curriculares para o Ensino Médio" com o objetivo de "contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente" (BRASIL, 2006, p. 8). Organizado em três volumes, volume 1: Linguagem, Códigos e suas Tecnologias, volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e volume 3: Ciências Humanas e suas Tecnologias, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

Antes, porém, em 2002, foram apresentados os "PCN+: Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais", em três volumes: PCN+ Ciências Humanas e suas Tecnologias; PCN+ Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; PCN+ Linguagens, Códigos e suas Tecnologias. Como o próprio título anuncia, esses documentos têm o objetivo de colaborar com a escola e o professor na implementação das reformas para a educação e, particularmente, as definições em relação ao ensino médio, advindas da LDB/96 e dos PCN. Apresentam sugestões para a ação com foco nas competências e nos conceitos estruturadores das disciplinas, conforme se pode ler nestes documentos.

Apesar de os autores enfatizarem que o currículo deve ser construído, analisando o aluno, a escola e o sistema, as orientações chegaram nas escolas como uma receita do que fazer, como um manual a ser seguido, que, junto com o livro didático, alicerçam o trabalho linear do professor durante todo ano letivo. Porém, cabe ressaltar que a nossa experiência de dezenove anos na Educação Básica, tem mostrado que esses documentos não foram objeto de discussões nas escolas, com os professores, dado que o ENEM teve um efeito indutor muito maior.

3.3.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares do Ensino Médio para a Matemática

A Parte III (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias) do PCN do Ensino Médio é destinada às disciplinas: Biologia, Física, Química e Matemática e apresenta habilidades básicas e competências específicas para cada uma delas.

Em relação à Matemática, os PCN a descrevem como conhecimento básico para entender e explicar o funcionamento do mundo, sendo também fundamental para o processo ensino-aprendizagem de outras áreas do conhecimento, “os estudos nessa área devem levar em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências.” (BRASIL, 2000, p. 20).

Ela é apresentada como uma linguagem de comunicação com um sistema de códigos e regras que devem ser ensinados/aprendidos, visando aplicá-los em diferentes situações, sobretudo no uso de tecnologias na busca de uma aprendizagem significativa para o aluno.

Nesse sentido, selecionamos alguns objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio apresentados pelos PCN que afirmam essa concepção:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas

> e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; (BRASIL, 2000, p. 42)

Mesmo com a publicação e divulgação dos PCN do Ensino Médio e das Orientações Curriculares em todo território nacional na busca de uma educação de qualidade, em relação à matemática, são apenas 15 páginas, nas quais não se discutem os conteúdos a serem desenvolvidos e nem os pressupostos que os embasam.

Nos PCN+, a Matemática aparece no volume intitulado "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias", trazendo três competências básicas a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

> • representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> • investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> • contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2002, p. 113)

Para desenvolver tais competências, os PCN+ apresentam detalhadamente, por meio de quadros, as ações e possibilidades características dos afazeres escolares. A organização dos conteúdos matemáticos está em três eixos ou temas estruturadores, "1. Álgebra: números e funções 2. Geometria e medidas 3. Análise de dados", sendo que cada um deles foi dividido em unidades temáticas.

É apresentado um quadro com a organização e divisão dos conteúdos por série, apesar de deixarem claro que é apenas um exemplo, considerando que as escolas são autônomas para fazer outra organização.

Nessa organização, sugerem que os assuntos desenvolvidos no primeiro ano o sejam de maneira contextualizada; no segundo ano, sugerem uma "mudança significativa" mostrando a matemática enquanto Ciência; e, no terceiro ano, como uma ampliação dos aprendizados anteriores. Também são apresentadas nesse documento estratégias para a ação, como a resolução de problemas, o trabalho em equipe, projetos, comunicação e avaliação.

Entretanto, a contribuição desses documentos, na prática docente, pouco existiu, sendo que as matrizes de competências do ENEM e as provas dessa avaliação tem direcionado muito mais do que as próprias diretrizes do Ensino Médio e os PCN. (LIMA, 2005). Nas escolas particulares e nos cursos preparatórios para o ensino superior, são o ENEM e os grandes vestibulares que ditam as regras, constituindo-se numa máquina capitalista de propaganda. Nas escolas públicas, o livro didático continua a ser seguido de capa a capa, sendo, assim, o direcionador do planejamento. (NASCIMENTO, 2017; COSTA, 2000, GRECE, 2017).

Mediante a importância alcançada pelo ENEM, e, no contexto de atualização geral do conjunto das Diretrizes Curriculares Nacionais para todas as etapas e modalidades de Educação Básica, nelas incluídas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica, aprovadas em 2010 pelo Conselho Nacional de Educação, é que se tornaram necessárias novas orientações para as instituições educacionais e os sistemas de ensino, que foram definidas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – DCNEM/2012.

3.4 As DCNEM de 2012

E na continuidade das discussões relacionadas aos currículos, em 30 de janeiro de 2012, a Resolução CNE/CEB nº 2 instituiu as "novas" Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio, aplicadas a todas as formas de ensino e modalidades como uma atualização das diretrizes de 1998. Mas, na prática, o que trazem de novo?

Vale ressaltar que as DCN são normas obrigatórias, diferente dos PCN.Foram discutidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) com a finalidade de orientar os sistemas de ensino e as instituições escolares no planejamento dos currículos escolares do Ensino Médio. Em 2010, foram publicadas diretrizes gerais para a Educação Básica, e específicas para cada nível, as do Ensino Médio vieram em 2012 para complementar, principalmente, os PCN do Ensino Médio, ainda vigentes à época.

No título II, o capítulo I apresenta a organização curricular, as áreas de conhecimento e os componentes curriculares, sendo: I – Linguagens (Língua portuguesa, língua materna para as populações indígenas, língua estrangeira, arte e educação física); II - Matemática; III - Ciências da Natureza (Biologia, Física e Química); IV - Ciências Humanas (História, Geografia, Filosofia e Sociologia). O capítulo II traz as formas de oferta do Ensino Médio, período, duração e carga horária, sendo distribuídos em 2400 horas ao todo e 200 dias letivos para o ensino regular e 1200h para a Educação de Jovens e Adultos, e, também, apresenta um detalhamento para a integração do Ensino Médio com o ensino profissional e tecnológico. No título III, o capítulo I apresenta o projeto político-pedagógico, e, no capítulo II, os sistemas de ensino.

A partir do Art. 6º, é apresentada a organização curricular, com destaque para as relações sociais,

> Art. 6º O currículo é conceituado como a proposta de ação educativa constituída pela seleção de conhecimentos construídos pela sociedade, expressando-se por práticas escolares que se desdobram em torno de conhecimentos relevantes e pertinentes, permeadas pelas relações sociais, articulando vivências e saberes dos estudantes e contribuindo para o desenvolvimento de suas identidades e condições cognitivas e sócio afetivas. (BRASIL, 2012, p. 2).

Segundo as DCN/2012, o Ensino Médio, em todas as suas formas de organização, está baseado: na formação integral do aluno, no trabalho e pesquisa, na educação em direitos humanos, na sustentabilidade ambiental, na indissociabilidade entre educação e prática social, na contextualização e na interdisciplinaridade e no respeito às diversidades. Verificamos que, apesar de as DCNEM de 1998 e as de 2012 serem lançadas em contextos políticos, econômicos e sociais diferentes em nosso país, as discussões presentes em ambos os documentos giram em torno dos mesmos problemas – a questão da busca da identidade do Ensino Médio, questões relacionadas ao currículo, à flexibilização e à autonomia das escolas, embora essa última tenha incluído a educação em direitos humanos e a questão ambiental. De acordo com Moehlecke (2012, p.53),

> O que as diretrizes parecem trazer de novo tem menos a ver com o campo normativo e mais com as políticas de governo, ao trazerem a indicação de diversos programas do governo federal na área da educação, apresentados como exemplos para a adoção do modelo curricular proposto.

Ainda em meio a essas discussões, havia a necessidade, ao final da primeira década do século XXI, de elaboração de um novo Plano Nacional para a Educação com vistas à universalização do ensino, que contemplasse metas e estratégias para atingir esse objetivo principal, com políticas direcionadas a esse nível de ensino, considerando-se os diferentes fatores que intervém na vida dos estudantes do nível médio, e a preocupação com a busca e permanência do alunado na escola. Segundo essa mesma autora, são muitos os problemas que podem afetar a permanência/evasão.

> A permanência do estudante no Ensino Médio envolve um conjunto de fatores que podem facilitar ou não esse processo, tais como: idade com que ingressam na escola; inclusão ou não no mercado de trabalho; trajetória escolar anterior; taxas de repetência e evasão; aproveitamento dos estudos;

> infraestrutura oferecida; qualidade do corpo docente, entre outros. (MOEHLECKE, 2012, p.43)

No Art. 22, estabelece-se que as Diretrizes devem nortear, também, a formação de professores, a produção de materiais didáticos e as avaliações nacionais.

Além dessas questões específicas do Ensino Médio e de inúmeras outras relacionadas à Educação Infantil, ao Ensino Fundamental e ao Ensino Superior, começam as discussões de um novo PNE (Plano Nacional de Educação), dado que o anterior cobria a década 2001-2010.

3.5 O Ensino Médio nos PNE (2001-2010) e PNE (2014-2024)

Desde a década de 1930, com o movimento da Escola Nova, debatia-se sobre a proposta de elaboração de um Plano Nacional para a Educação com objetivo de superar a fragmentação e buscar a universalização do ensino.

Em meio a essas discussões, a Constituição de 1934, no seu Art. 150 traz a proposta de elaboração do plano, "fixar o plano nacional de educação, compreensivo do ensino de todos os graus e ramos, comuns e especializados; e coordenar e fiscalizar a sua execução, em todo o território do país". No entanto, apesar da determinação da constituição, o primeiro PNE só foi elaborado e aprovado pelo Conselho Federal de Educação em 1962, após a publicação da primeira LDB nº 4.024/61. Era constituído por um conjunto de metas e foi reformulado em 1965 para introduzir normas para elaboração dos planos estaduais. Também, em 1966, foi alterado, abrangendo questões voltadas para a distribuição de recursos, beneficiando a implantação de ginásios direcionados para o trabalho e para o atendimento a analfabetos com idade superior a dez anos, conforme se lê no histórico do PNE/2001-2010.

Somente a partir da nova Constituição de 1988, e, posteriormente à LDB 9.394/96, é que as discussões foram retomadas, com a força de lei. Com a Lei nº 10.172 de 09 de janeiro de 2001, é aprovado o PNE (2001-2010), com objetivo de melhorar a educação em todo país, de elevar o do nível de escolaridade da população, a redução das desigualdades sociais e democratização da gestão. No entanto, esse PNE não apresentava estratégias para o cumprimento das metas, o que provocou inúmeras críticas e instigou o reinício das discussões para um novo PNE.

Em relação ao Ensino Médio, o documento considera a sua expansão como importante para a formação da cidadania e a qualificação profissional. Consta no documento a preocupação com a baixa matrícula, ainda que reconhecessem um crescimento, a defasagem série-idade, altas taxas de abandono e desistência, a falta de definição de rumos. Além disso, reconhecem-se as dualidades existentes nesse nível de ensino:

> Na disputa permanente entre orientações profissionalizantes ou acadêmicas entre objetivos, humanistas ou econômicos, a tensão expressa nos privilégios e nas exclusões decorro da origem social. Em vista, o Ensino Médio proposto neste plano deverá enfrentar o desafio dessa dualidade com oferta de escola média de qualidade a toda a demanda. Uma educação que propicie aprendizagem de competência de caráter geral, forma pessoas mais aptas a assimilar mudanças, mais autônomas em suas escolhas, que respeitem as diferenças e superem a segmentação social. (BRASIL/MEC, 2001, p. 25)

Neste documento, ressalta-se, ainda, que cabe aos Estados a manutenção do Ensino Médio.

Com a participação ativa de vários atores da educação e diversos segmentos da sociedade, por meio de audiências públicas, fóruns, seminários e debates realizados pelas Conferências Nacionais de Educação (CONAE), elabora-se o Plano Nacional da Educação – PNE (2014/2024), instituído pela Lei nº 13.005/2014.

Como um projeto coletivo, o novo PNE é um instrumento de planejamento que apresenta diretrizes (10), metas (20) e estratégias (254) em todos os níveis de ensino (infantil, básico e superior), na busca de melhorias com foco sempre em uma “educação de qualidade”.

Em relação ao Ensino Médio, o PNE apresenta cinco metas que dizem respeito a essa etapa de ensino, direta ou indiretamente, sendo elas: Meta 3, Meta 6, Meta 7, Meta 10 e Meta 11. Buscaremos apresentar cada uma delas e tendo como fonte o Observatório do PNE, acessado em 2018 e em 2021, verificaremos o que já foi conquistado e o que ainda precisa ser atingido (em porcentagem). Sabemos que grandes são os desafios para atingir tais metas.

Na Meta 3 há a previsão de universalização do Ensino Médio, “Universalizar, até 2016, o atendimento escolar para toda a população de quinze a dezessete anos e elevar, até o final do período de vigência deste PNE, a taxa líquida de matrículas no Ensino Médio para oitenta e cinco por cento (85%)”. Para atingir tal objetivo, apresenta 14 estratégias na busca de atrair os alunos para a escola e, acima de tudo, buscar a sua permanência. De acordo com o Observatório do PNE, acessado em 15/10/18, em 2015, a porcentagem de jovens de 15 a 17 anos, matriculados no Ensino Médio era de 65,4%, a meta para 2024 é de 85%.

Ao atualizarmos as informações do Observatório acessado em 17/02/21, verificamos que dentro da meta 3, atualmente existem dois objetivos, o objetivo 1 é “matricular todos os jovens de 15 a 17 anos na escola até 2016”, o resultado parcial desse objetivo é que 94,5% dos jovens de 15 a 17 anos estavam na escola em 2020. O objetivo 2 dessa meta é “garantir, até 2024, que 85% dos jovens de 15 a 17 anos estejam no Ensino Médio”, os resultados parciais apresentados afirmam que 75,4% dos jovens de 15 a 17 anos cursavam essa etapa em 2020. Um crescimento em relação a 2015.

Na Meta 7, há a indicação de “Fomentar a qualidade da educação básica em todas etapas e modalidades, com melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem de modo a atingir as seguintes médias nacionais para o IDEB”. O IDEB de 2015 do Ensino Médio foi de 3,7 e a meta para 2021 é 5,5. Nessa última atualização do Observatório consta que o IDEB em 2019 foi de 4,2. Também com um ligeiro crescimento.

Com relação à Meta 10, “Oferecer, no mínimo, 25% (vinte e cinco por cento) das matrículas de educação de jovens e adultos, nos ensinos fundamental e médio, na forma integrada à educação profissional”, em 2017, a porcentagem das matrículas era de 3%, já a meta para 2024 é de 25%, as últimas informações apresentam que, em 2019, esse valor passou para 3,1%, praticamente não houve crescimento.

No que diz respeito à Meta 11, “Triplicar as matrículas da Educação Profissional Técnica de nível médio, assegurando a qualidade da oferta e pelo menos 50% da expansão no segmento público”, em 2014, era de 0,9% e a meta para 2024 é de 50%. Na busca de atualizar as informações por meio do Observatório, verificamos que, em 2019, o Brasil teve quase 1,9 milhões de matrículas, o que corresponde a 14,5% ainda distante dos mais de 5 milhões da Meta.

Por fim, na Meta 6, que prevê a expansão do tempo integral para todos os níveis da Educação Básica, incluindo o Ensino Médio, “Oferecer Educação em tempo integral em, no mínimo, 50% das escolas públicas, de forma a atender, pelo menos, 25% dos(as) alunos(as) da Educação Básica”. Analisando o Observatório, constatamos que, em 2017, 18,3% é a porcentagem de crianças e jovens matriculados no tempo integral, no entanto sabemos que a maioria são matrículas na Educação Infantil e no Ensino Fundamental. As últimas informações apresentam que, em 2019, a porcentagem era de 14,2%, uma redução dos valores.

Em relação ao tempo integral, no ano de 2019, vivenciamos uma luta das escolas e dos professores da rede, com o governo do estado de Minas Gerais, que não autorizou a sua continuidade e a ampliação na Educação Infantil e no Ensino Fundamental.

Nesse sentido, ao analisarmos os dados apresentados em relação ao previsto e ao alcançado, verificamos, de maneira geral, que estão bem abaixo do previsto para cada meta. Entendemos que são diversos os fatores que contribuem para que esses valores estejam abaixo, como a falta de perspectiva de vida e de futuro do jovem, falta de condições adequadas para o trabalho docente, falta de investimentos adequados na educação são os principais problemas. Com a pandemia devido ao Covid-19, em 2020, alastrando-se para 2021, o alcance de muitas dessas metas ficará comprometido, devido ao abandono escolar, às dificuldades financeiras que estão sendo enfrentadas por muitas famílias, ao desemprego, dentre outras consequências.

E na busca de caminhos para chamar o jovem para a escola foi proposto, no país, mais um projeto, o da "Reforma do Ensino Médio" ou "Reformulação do Ensino Médio" que será apresentado a seguir. No entanto, essa é mais uma preocupação por parte dos pesquisadores, que debruçam sobre essa temática, e principalmente uma preocupação dos profissionais (professores, especialistas, diretores) que atuam nesse nível de ensino: Será que esse projeto vingará?

3.6 O Projeto de Reformulação do Ensino Médio

Segundo Duarte (2016), a educação passa constantemente por reformas que reforçam ainda mais essa separação da burguesia e da classe trabalhadora, o que importa para essa é a preparação do indivíduo apenas para o mercado de trabalho, produzindo uma mão de obra barata e não pensante, muito longe da educação integral do aluno, para o desenvolvimento de um pensamento crítico, criativo e autônomo.

> [...] a educação escolar dos filhos da classe trabalhadora é constantemente reestruturada em todos os níveis, desde a educação infantil até o ensino superior, num complexo jogo político e ideológico cujo objetivo, por parte da classe dominante e dos intelectuais a seu serviço, é o de assegurar que os conteúdos ensinados e aprendidos na escola pública se limitem ao que é demandado pela reprodução da divisão social do trabalho e da concepção burguês de sociedade, de conhecimento, de vida humana e de individualidade; em poucas palavras, que a educação escolar se limite à adaptação. (DUARTE, 2016, p. 46)

Ciavatta (2015) aponta para uma preocupação relacionada às reformas, especialmente, as que estão pautadas pela Educação Profissional. De acordo com essa pesquisadora em educação e trabalho, tais Reformas têm ameaçado a estrutura da Educação Pública no país, tendo em vista que a finalidade precípua da Educação Profissional é formar mão de obra especializada para as grandes empresas. Considerando a Educação Profissional sob essa perspectiva, a sua utilidade, no mundo contemporâneo, tem sido inócua, pois não há tantas vagas de emprego disponíveis no mercado atualmente, dada a crise política e econômica que temos vivenciado. Dessa feita, não se pode dar a relevância que, realmente, o Governo deseja para esse tipo de Educação; já que ela não satisfaz quem a procura como uma alternativa ao ensino acadêmico.

Mesmo assim e mediante muitas dúvidas, desconfianças e discussões, como apresentado por Bald e Fassini (2017), chegou-se à proposta de Reforma do Ensino Médio, Lei nº 13.415, aprovada em 16 de fevereiro de 2017, que se originou da Medida Provisória (MP) nº 746/2016 proposta pelo Ministério da Educação do governo Temer (2016), e que, após a análise do Congresso, transformou-se no Projeto de Lei (PL) nº 34/2016.

Essa proposta de reforma é um conjunto de novas diretrizes que propõe flexibilizar o Ensino Médio, altera artigos da LBD 9.394/96 e institui a Política de Fomento à Implementação de Escola de Ensino Médio em Tempo Integral. Seria uma ação no sentido de se atribuir a real identidade ao Ensino Médio? Algo a se pensar e discutir, de modo especial, no que se refere ao financiamento, neste momento em que os Estados estão reduzindo despesas, inclusive, com a educação.

As principais modificações propostas nessa reforma são o Ensino Médio em tempo integral, com uma mudança gradativa da carga horária de oitocentas horas para mil e quatrocentas horas. Essa carga horária terá, de acordo com a BNCC, 60% com disciplinas comuns e obrigatórias, e 40%, flexível, com disciplinas optativas, conforme a oferta da escola e interesse do aluno na busca de aprofundar seus estudos.

Porém, em 2020, a escola que foi campo desta pesquisa (Escola Estadual Loren Rios Feres em Araxá), foi selecionada com o Ensino Médio integral, os alunos do primeiro ano ficariam na escola integralmente, ou seja, das 7h às 16:30h. No entanto, não houve adaptação da escola para receber esses alunos, continua como estava, apenas com algumas aulas a mais. Os professores passaram por um curso de capacitação no início do ano, que buscou apresentar o projeto. Percebemos que o Estado busca cumprir a meta para implantação do ensino integral, porém sem nenhum investimento em infraestrutura e qualificação.

Assim, o Ensino Médio, de acordo com a Lei nº 13.415/17 terá duas etapas, cada uma com um ano e meio de duração. Na primeira parte, o estudante terá todas as disciplinas, uma parte comum a todos, de acordo com o previsto na BNCC; na segunda, o aluno decidirá em quais matérias focará para aprofundar seus estudos, ou ainda, poderá optar pelo ensino técnico, são os chamados “itinerários formativos”. Apenas três disciplinas são obrigatórias em todas as etapas: língua portuguesa, matemática e língua inglesa, as outras serão oferecidas conforme a definição do sistema de ensino, algo preocupante, pois poderá contribuir ainda mais com a fragmentação do ensino e o aligeiramento da formação geral, principalmente em disciplinas do campo das ciências humanas.

Pode-se perceber, subjacente ao discurso que justifica e sustenta várias dessas alterações, uma desvalorização dos conteúdos escolares, como se fossem "coisas mortas" (DUARTE, 2016); que não tem qualquer valor para o jovem estudante, podendo ser descartadas e substituídas por outras "novas". Defende-se o estudo ligado ao cotidiano do aluno, um ensino que visa à aplicação imediatista do conteúdo; mas, há de se perguntar: onde fica a construção do pensamento científico do aluno?

Entendemos que seja necessário estabelecer uma relação dialética entre os conteúdos escolares e o cotidiano do aluno; e, para isso, recorremos à Teoria Histórico-Cultural[29], que, ao preocupar com as influências que as condições sociais desempenham sobre a vida psíquica do homem, irá nos aprouver pressupostos importantes a fim de se pensar a educação, o ensino e a aprendizagem como meios propícios à condução da vida humana.

Defendemos o real papel desempenhado pela escola, como um espaço adequado para a apropriação dos diversos conteúdos que subsidiarão o aluno no seu processo de construção do conhecimento. Nessa perspectiva, trazemos Duarte (2016), quando argumenta que o ensino dos conteúdos escolares é uma atividade em que "o trabalho morto, contido nos conhecimentos já produzidos, é transformado em atividade efetiva dos alunos, ou seja, o trabalho morto é trazido à vida pelo trabalho educativo." (p. 49).

Em relação às disciplinas optativas, a organização dos currículos ocorrerá por áreas do conhecimento (itinerários formativos), sendo: Linguagens e suas tecnologias; Matemática e suas tecnologias; Ciências da natureza e suas tecnologias; Ciências humanas e sociais aplicadas; Formação técnica e profissional. Porém, a referida Lei não garante a obrigatoriedade de oferta dos cinco itinerários formativos em todas as escolas, retiram das escolas a obrigatoriedade de conteúdos indispensáveis para a compreensão crítica da realidade e à tomada de posição política, como por exemplo as disciplinas de Sociologia, de Filosofia, garantindo apenas as disciplinas de Língua Portuguesa, Matemática e Língua Inglesa, o que leva ao empobrecimento do currículo escolar. Estabelece, assim, a oferta de uma "escola pobre para os pobres", retrocedendo em, pelo menos, duas décadas no debate educacional do país. Nessa linha de pensamento Nascimento (2007, p.78) afirma,

> A tentativa de superação da divisão social no Ensino Médio, através de uma nova concepção de organização escolar, revela-se uma reorganização apenas superficial, que não oferece condições para um real [princípio de]

[29] A teoria histórico-cultural tem suas origens nos estudos de Lev Semenovich Vygotsky (1896-1934). Procurando entender a estagnação em que a psicologia se encontrava no início do século XX, Vygotsky desenvolveu estudos que demonstravam a mediação social no desenvolvimento das funções psicológicas superiores.(SOUZA, 2011,p.1)

> unitariedade do ensino e superação das desigualdades socioeconômicas e educacionais.

Assim, essa lei de reforma do Ensino Médio veio a desagradar seus principais atores (profissionais da educação e alunos), o que causou várias manifestações no final de 2016, com estudantes ocupando as escolas e professores revoltados com as propostas conforme notícia publicada pelo site “Agência Brasil” no dia 21/12/2016. Entendemos que as reformas, principalmente na área da educação serão melhores sucedidas, se houver envolvimento e participação dos seus principais representantes, no caso professores e alunos, algo que não aconteceu, além de ela não considerar, frente à extensão territorial do país, suas diferentes realidades. Também, é importante marcar que sem investimentos, as mudanças necessárias no sentido de reduzir as desigualdades sociais, de oportunizar o desenvolvimento do jovem, por meio de uma aprendizagem efetiva não ocorrerão.

Vários alunos que hoje frequentam o Ensino Médio conciliam os estudos com o trabalho, pois precisam ajudar nas suas despesas pessoais e familiares. Assim, o tempo integral de estudos é totalmente inviável para muitos, sendo este um dos principais pontos de desagrado por parte dos estudantes. Entendemos que os alunos nessa faixa etária não devem priorizar o trabalho, pelo contrário, os estudos é que devem ser priorizados, e o tempo integral teria grande importância, se tivesse, antes disso, políticas públicas que os ajudassem a permanecerem na escola sem ter que trabalhar para ajudar as famílias.

Além disso, para que o estudante permaneça mais tempo na escola, é preciso: planejar as atividades que serão realizadas, contratar e preparar professores, adequar a estrutura da escola em todos os aspectos, físicos, organizacionais, administrativos. (CUNHA NETO, RESENDE, 2017). Num momento de encolhimento do Estado nas áreas essenciais, essas condições objetivas ficam cada vez mais distantes.

Segundo Teixeira; Ribeiro (2020, p. 9),

> As mudanças curriculares propõem modernização e buscam alterar o currículo sobrecarregado de disciplinas pouco atraentes aos jovens por itinerários formativos, voltando-se para as aptidões dos alunos e das unidades escolares. Porém, a literatura apresenta que o setor privado e os órgãos internacionais defenderam a necessidade de um currículo diversificado e atrativo, uma formação mais técnica do que teórica e uma ampliação da carga horária diária pensando em seus interesses e não nos jovens alunos. [...] O fato é que a Reforma assegura a descurricularização para o fortalecimento de um ensino baseado na razão instrumental. Fortalece os interesses mercadológicos, por meio da interlocução do governo brasileiro com o empresariado e seu explícito interesse na preparação de mão de obra.

Em relação ao descontentamento dos professores, também foi causado, porque essa reforma abre a oportunidade de contratação de profissionais sem diploma na disciplina que irão ministrar, chamados de “notório saber”. Entendemos aí uma desvalorização da formação básica do professor e uma controvérsia com a LDB 9394/96 que exigiu essa formação. Concordamos que a Educação Básica, principalmente o Ensino Médio, necessita de uma reformulação, porém, deverá ser uma proposta pensada e discutida com todos os envolvidos no sistema, profissionais da educação, pais, alunos. Para iniciar a implantação dessas reformas, é primordial investir em infraestrutura, valorização e capacitação docente, quesitos fundamentais para que tal reforma tenha êxito.

A Constituição de 1988, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996 e no Plano Nacional de Educação, de 2014, reiteram a importância da elaboração de uma base nacional comum curricular na busca de uma educação de qualidade. A LDB - 9394/96 prevê “uma Base Nacional Comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela” (Art. 26).

Em virtude disso, são elaboradas as propostas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na última década (2010-2020), na busca de padronizar o que é ensinado nas escolas de todo país, garantindo um patamar comum de aprendizagem a todos os estudantes, pois até então não existia nenhuma lei que especificava todas as disciplinas e conteúdo a serem desenvolvidos. No entanto, falar em padronização em um país com extensão continental e tamanha diversidade cultural é algo que demanda uma discussão complexa e estudos aprofundados.

3.7 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A BNCC é um conjunto de orientações curriculares obrigatórias da Educação Infantil ao Ensino Médio para as escolas públicas e particulares, elaborada à luz das DCN (que foram também reformuladas/readaptadas em função da reformulação do EM algo que apresentaremos a seguir, que norteará a organização dos currículos, trazendo competências, habilidades e conhecimentos (conteúdos) a serem desenvolvidos pelas disciplinas e em cada etapa.

> A BNCC é constituída pelos conhecimentos fundamentais aos quais todo/toda estudante brasileiro deve ter acesso para que seus direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento sejam assegurados. Esses conhecimentos devem constituir a base comum do currículo de todas as escolas brasileiras, embora não sejam, eles próprios, a totalidade do

> currículo, mas parte dele. Deve-se acrescer à parte comum, a diversificada, a ser construída em diálogo com a primeira e com a realidade de cada sistema educacional sobre as experiências e conhecimentos que devem ser oferecidos aos estudantes e às estudantes ao longo de seu processo de escolarização. (BRASIL, 2015, p. 13).

Ao ler esse trecho, constatamos que há a manifestação do direito à aprendizagem, visando ao desenvolvimento, o que também defendemos nesta pesquisa, apoiadas na THC, porém questionamos a existência de meios e de condições objetivas para que isso ocorra.

Após as críticas relacionadas à falta de participação dos principais atores da educação na elaboração da lei de Reforma do Ensino Médio, a preparação da BNCC relativa a esse nível, segundo o próprio documento, é fruto de um amplo debate, envolvendo professores e profissionais da educação de todo país com objetivo de buscar a melhora da qualidade da educação, principalmente no Ensino Médio, que apresenta o IDEB distante da meta proposta. Mas, sobre isso, perguntamos: Como foram processados os milhares de contribuições/participações? Os professores realmente foram ouvidos? As suas participações não foram apenas números em um levantamento estatístico? Esses questionamentos pairam, quando essas reformas são rapidamente aprovadas.

Enxergamos a BNCC como uma reconfiguração/atualização dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apesar destes não serem mencionados no documento, pois verificamos um entrosamento das principais ideias propostas em ambos como a necessidade de promoção da interdisciplinaridade e da contextualização.

No dia 22 de dezembro de 2017, foi publicada a Resolução CNE/CP nº 2, que institui e orienta a implantação da BNCC do Ensino Fundamental. A do Ensino Médio em consonância com a do Ensino Fundamental, foi homologada pelo ministro da Educação em 14 de dezembro de 2018, durante sessão extraordinária do Conselho Nacional de Educação (CNE), tendo agora caráter normativo e, de acordo com o Ministério da Educação (MEC), a previsão é de que as mudanças comecem a ser aplicadas já no início de 2020.

Os fundamentos pedagógicos da BNCC têm como foco o “desenvolvimento de competências”, ou seja, a preocupação com o“saber” e “saber fazer” com vistas à aplicação do que é ensinado/apreendido no seu cotidiano. Outro foco é relacionado ao “compromisso com a educação integral”, a formação e o desenvolvimento integral do ser humano, com respeito às diversidades, segundo se lê no documento.

A BNCC do Ensino Médio está organizada em quatro áreas do conhecimento, conforme determina a LDB, não está separado por disciplinas, isso acontece com objetivo de integrá-las para incentivar a interdisciplinaridade na elaboração dos projetos escolares.

Sobre a importância da interdisciplinaridade, Neto, Lima e Rocha (2017, p. 8719) afirmam,

> [...] o currículo organizado por disciplinas, nas escolas, tem uma relação direta com o que ocorre no mundo do trabalho, no modo de produção taylorista/fordista, pois o setor produtivo característico das fábricas/indústrias está presente no interior das escolas, ocorrendo a fragmentação do conhecimento. O estudante não tem o conhecimento na sua totalidade, as disciplinas são isoladas e não dialogam entre si.

Assim, a articulação dessas disciplinas é defendida na BNCC para dar oportunidade ao aluno de resolver problemas práticos e nela se lê:

> As áreas e componentes curriculares se articulam para promover a apropriação por crianças, jovens e adultos de diferentes linguagens e interpretar fenômenos e processos naturais, sociais e culturais, para enfrentar problemas práticos, para argumentar e tomar decisões, individual e coletivamente (BRASIL, 2015, p. 12).

As competências e habilidades das disciplinas Língua Portuguesa e Matemática, por fazerem parte da base comum do Ensino Médio, conforme proposto na Lei nº 13.415/2017, não são divididas por série. No entanto, o que se discute nas propostas da BNCC é o enxugamento e a exclusão de determinados conteúdos, o que demonstra mais uma vez o empobrecimento do processo ensino-aprendizagem com vistas à formação de conceitos e ao desenvolvimento das funções psíquicas superiores do aluno e do seu desenvolvimento integral, conforme Branco (2018, p. 1), "colaborando com esvaziamento e a precarização do ensino público".

3.7.1 A Matemática na BNCC

Na BNCC, a Matemática aparece como área do conhecimento e também como componente curricular. Como componente curricular no Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas em cinco unidades temáticas de conhecimento da própria área (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística). Em comparação aos PCN, essa organização se diferencia no sentido de estes trazerem esses conhecimentos divididos em apenas quatro blocos, Números e Operações, Grandezas e Medidas, Espaço e Forma e Tratamento da Informação. Algo que consideramos positivo, pois a BNCC separa a unidade *Álgebra* da unidade *Números*, dando-lhes certa autonomia na organização.

Especificamente, a BNCC do EM traz cinco “competências específicas de Matemática e suas tecnologias”, bem como as “habilidades de área”. As duas primeiras estão ligadas diretamente à preocupação de um conhecimento matemático para resolver problemas do cotidiano do aluno na sua tomada de decisão, com destaque para a utilização de diferentes tecnologias,

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018, p.523).

Percebemos na BNCC do Ensino Médio, uma proposta de processo ensino-aprendizagem com uma visão integrada da Matemática com a realidade do aluno, salientando o raciocinar, comunicar e expressar, uma valorização do ensino voltado para a resolução de problemas ligados, sobretudo, ao desenvolvimento das tecnologias, como por exemplo, na utilização de calculadoras e planilhas eletrônicas.

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem utilizar conceitos, procedimentos e estratégias não apenas para resolver problemas, mas também para formulá-los, descrever dados, selecionar modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, por meio da utilização de diferentes recursos da área. (BRASIL, 2018, p. 525).

Porém, com o pouco investimento no ensino-aprendizagem em outras áreas do conhecimento, pois não são mais obrigatórias, constituindo-se em itinerários formativos, questiona-se como promover um ensino interdisciplinar, como usar estratégias e conceitos matemáticos para resolver problemas nesses contextos? Além de outras críticas que vem sendo feitas por especialistas, como a de que a organização da base focada em competências tira a centralidade do conhecimento, conforme afirma Mônica Ribeiro da Silva, professora da Universidade Federal do Paraná e porta-voz do Movimento Nacional em defesa do Ensino Médio.

A terceira e quarta competências ainda dizem respeito à praticidade dos conceitos matemáticos, porém com foco na investigação, na coleta de dados e na análise de registros,

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2018, p. 523).

A quinta e última merece um olhar mais aprofundado, por trazer a experimentação, com a utilização de diferentes recursos e estratégias, como contribuição na formação de conceitos, algo proposto nesse trabalho. Amparados nessa competência apresentada a seguir, poderemos utilizar a investigação para promover ações que estimulem a reflexão, a abstração, a criatividade, o pensar indutivo, dedutivo e sistêmico, porém, com o cuidado de promover o desenvolvimento do pensamento teórico, papel da escola, e, não, apenas o pensamento empírico.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 523)

No entanto, apesar de expor ao longo de todo o texto a importância de considerar os conhecimentos já elaborados pelos alunos oriundos do seu ambiente social, não verificamos uma preocupação relacionada aos aspectos teóricos-metodológicos, como orientação para o processo ensino-aprendizagem para contribuir na formação de conceitos. Nesse sentido, Pinto (2017, p. 1059) percebe um,

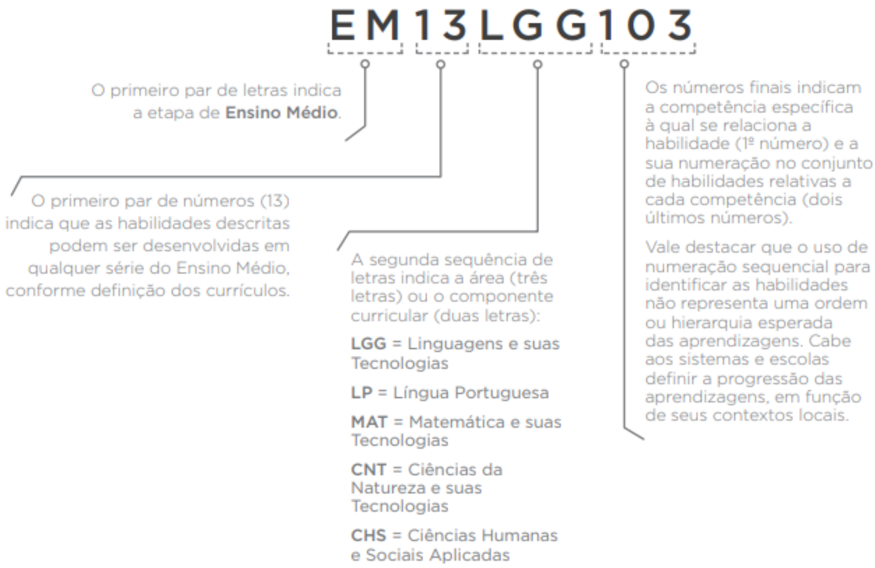
> [...] silêncio do documento BNCC em relação aos aspectos teórico-metodológicos já consolidados no campo da Educação Matemática, mais especificamente, o que foi até aqui produzido no âmbito da Etnomatemática, da História da Matemática e da Modelagem Matemática. Essas abordagens teórico-metodológicas constituem, na atualidade, referências importantes para uma prática docente que leve em conta a diversidade e a pluralidade da escola pública brasileira.

Ao final de sua análise percebemos que a BNCC, especificamente de matemática, está mais próxima de ser uma matriz com descritores, que, normalmente, usamos na elaboração das avaliações nas escolas, exatamente pelo fato de desconsiderar tais aspectos metodológicos fundamentais para uma boa prática docente.

3.7.2 A função seno na BNCC

A BNCC não apresenta os conteúdos a serem desenvolvidos separados por série, estando organizados, seguindo as competências e habilidades e por unidades temáticas, semelhantes aos do Ensino Fundamental. Assim, propõe que as redes de ensino terão a “tarefa de construir currículos com base nas aprendizagens essenciais estabelecidas” (p. 20), essas aprendizagens estão organizadas e identificadas por meio de códigos alfanuméricos semelhantes aos do Ensino Fundamental cuja composição está apresentada na figura 1.

Figura 1 - Códigos alfanuméricos da BNCC



Fonte: BNCC (2019, p. 34)

A função seno está apresentada na BNCC, na competência 3. (Figura 2)

Figura 2 - Competência e Habilidade referentes ao seno na BNCC

COMPETÊNCIA	HABILIDADE
3_ Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as **funções seno** e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Elaborado pela autora – Fonte: BNCC/Ensino Médio

Na sugestão de organização por unidades temáticas, diferente das propostas no Ensino Fundamental, são apenas três no Ensino Médio, apresentadas de maneira condensada, sendo: “Números e Álgebra”, “Geometria e Medidas” e “Probabilidade e Estatística”. A mesma habilidade (EM13MAT306) em que se encontra a função seno aparece na Unidade temática “Números e Álgebra”. (Figura 3)

Figura 3 - Unidade temática “Números e Álgebra” da BNCC

Números e Álgebra
Habilidades
(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as **funções seno** e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Elaborado pela autora – Fonte: BNCC/Ensino Médio

Ao analisarmos tal habilidade, verificamos que a preocupação desse documento está em o aluno resolver problemas com foco nas aplicações práticas e na utilização de exemplos que envolvam fenômenos periódicos. Não que isso não deva acontecer, pelo contrário, deve existir essa preocupação com a compreensão da realidade que nos cerca. No entanto, o que questionamos é a ênfase no utilitarismo dos conteúdos da matemática, sem a apropriação dos conceitos, requisito essencial para fazer essas aplicações.

Em relação ao ensino-aprendizagem da função seno, não existe a sugestão/indicação de resgate do movimento lógico-histórico do conceito, visando ao desenvolvimento das funções psíquicas superiores do discente, assim como não há para os demais conteúdos. Como o aluno irá aplicar um conceito, se a sua formação não for organizada, visando aquilo que ele tem de essencial, nos seus nexos internos? Isso não significa que estamos defendendo um ensino que esteja longe de suas aplicações, aliás, na perspectiva histórico-cultural, o ponto de partida é o concreto real, assim como é o seu fim, numa perspectiva dialética e contraditória.

Em paralelo às discussões e debates acerca da proposta de reformulação do Ensino Médio e da BNCC, as novas DCN para o Ensino Médio estavam sendo atualizadas e foram aprovadas.

3.8 As novas atualizações das DCN para o Ensino Médio

No dia 21 de novembro de 2018, houve a aprovação, pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação (CNE), da Resolução nº 3/2018, que atualiza as DCN para o Ensino Médio, em decorrência das alterações promovidas pela Lei nº 13.415/2017 e destacaremos os principais pontos. O processo de implementação dessa Resolução deve ocorrer dois anos após a promulgação da BNCC (14/12/2018), portanto, em 2021.

Dentre as várias atualizações, a que nos chamou mais atenção e merece destaque é a liberação de até 20% da carga horária total do curso diurno para atividades no formato EAD (Ensino à distância), dando preferência aos conteúdos “diversificados”. De acordo com a proposta de reformulação do EM, esses conteúdos diversificados seriam aqueles que ocuparão a carga horária flexível de 40%, valendo ressaltar que ainda não houve uma discussão sobre os conteúdos a serem trabalhados nessa carga horária. Para os cursos noturnos, essa carga horária poderá chegar a 30% e, para a Educação de Jovens e Adultos, a 80%.

Essa questão do ensino a distância é defendida atualmente, inclusive, pelo presidente eleito (2018) Jair Bolsonaro, porém é algo que preocupa os educadores e estudiosos da área, pois a escola também tem o papel de socialização dos estudantes, algo que no ensino a distância é dificultada. Outras questões preocupantes são: a necessidade de suporte tecnológico para a EAD, o acesso de todos os alunos aos recursos tecnológicos, a capacitação de mão de obra dos profissionais em serviço e o programa nacional do livro didático, questões ainda não discutidas e que estão muito aquém do recomendável.

No Art. 17, a forma de organização é estabelecida:

> Art. 17 - O ensino médio, etapa final da educação básica, concebida como conjunto orgânico, sequencial e articulado, deve assegurar sua função formativa para todos os estudantes, sejam adolescentes, jovens ou adultos, mediante diferentes formas de oferta e organização.

> § 1º O ensino médio pode organizar-se em tempos escolares no formato de séries anuais, períodos semestrais, ciclos, módulos, sistema de créditos, alternância regular de períodos de estudos, grupos não seriados, com base na idade, na competência e em outros critérios, ou por forma diversa de organização, sempre que o interesse do processo de aprendizagem assim o recomendar. (BRASIL, 2018).

A organização proposta tem a marca da flexibilidade, o que é a característica principal desta Resolução. Entretanto, flexibilidade envolve financiamento, condições objetivas de funcionamento, gestão, formação, o que, agora da educação brasileira, de contingenciamento de recursos, de desvios de recursos da educação para outras áreas, momento agravado pela pandemia, cujas consequências são imprevisíveis, tantas alterações e flexibilização nos deixam perplexos e céticos em relação à sua implementação.

A carga horária está organizada em: 1800 horas para as disciplinas de formação geral básica (relacionadas à BNCC) e 1200 horas para os itinerários formativos. Esses itinerários terão quatro eixos estruturantes: (I) Investigação científica, II) Processos criativos, III) Mediação e intervenção sociocultural e IV) Empreendedorismo.

No item II do Art. 12, explica-se como devem ser organizados os itinerários formativos na área do conhecimento relacionado à matemática e suas tecnologias.

> II - matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino. (BRASIL, 2018).

Essa proposta altera a área, incluindo conhecimentos que, até então, não faziam parte dela, como automação, inteligência artificial, jogos digitais, com forte ênfase nas tecnologias. Para os professores de matemática, tudo isso constitui “novidade” e exige formação e estrutura, que a maioria das escolas públicas brasileiras não tem.

A interdisciplinaridade ainda é destaque nessa proposta, trazendo, agora, a transdisciplinaridade, bem como o oferecimento de outras línguas estrangeiras como disciplina optativa, os temas transversais foram atualizados com a inclusão do respeito ao idoso, da educação digital, da educação no trânsito, dentre outros. Os itinerários devem ser ofertados obrigatoriamente e o aluno terá o direito de mudar, caso queira, ou cursar mais de um concomitante ou sequencial. Porém não são detalhadas as condições da oferta.

Com tais reformas, o ENEM também sofrerá mudanças, a prova passará a ser dividida em duas partes, uma prova geral baseada na BNCC e uma prova específica de acordo com os referenciais dos itinerários formativos. Isso ainda gera muitas dúvidas, pois como isso será operacionalizado se os itinerários poderão ser diferenciados por escola, por região?

3.9 E o Ensino Médio no estado de Minas Gerais: Currículo Básico Comum – CBC/MG

O estado de Minas Gerais, desde 2005, instalou um currículo básico comum para nortear o trabalho das escolas e professores nas diferentes disciplinas, o CBC (Currículo Básico Comum), publicado na Resolução nº 666 de 7 de abril de 2005.

Esse é um documento obrigatório nas escolas do Estado, organizado separadamente por nível de conhecimento, por disciplina e contempla as diretrizes norteadoras, os critérios adotados para a seleção dos conteúdos, os conteúdos as serem desenvolvidos, aliados às suas competências e habilidades, com sugestões de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, chamadas "orientações pedagógicas". Tal documento, segundo se lê,objetiva o sucesso do processo ensino-aprendizagem das escolas do estado, tendo como função,

> Estabelecer os conhecimentos, as habilidades e competências a serem adquiridos pelos alunos na educação básica, bem como as metas a serem alcançadas pelo professor a cada ano, é uma condição indispensável para o sucesso de todo sistema escolar que pretenda oferecer serviços educacionais de qualidade à população. A definição dos conteúdos básicos comuns (CBC) para os anos finais do ensino fundamental e para o Ensino Médio constitui um passo importante no sentido de tornar a rede estadual de ensino de Minas num sistema de alto desempenho. (SEE/MG, 2011, p. 1)

Construído coletivamente com apoio de inspetores escolares, especialistas da educação básica, técnicos da SEE/MG e professores da rede estadual, o CBC foi desenvolvido, tendo como base os PCN, que trouxeram caminhos para a prática docente em sala de aula, tendo como foco a contextualização, a interdisciplinaridade e a resolução de problemas.

Como fonte de pesquisa para a elaboração do CBC, os envolvidos usaram as sugestões contidas no CRV[30] (Centro de Referência Virtual do Professor). Especificamente o CBC do Ensino Médio está fundamentado também nas DCNEM/98 e todos têm como objetivo operacionalizar, ou seja, trazer instrumentos práticos e estratégias de ensino para se aplicar o apresentado nos parâmetros curriculares e nas diretrizes.

[30] Portal educacional (site) para os professores do estado de Minas Gerais, como apoio didático. Nele constam fóruns de discussões, vídeos, sugestões de atividades e experiências desenvolvidas em sala de aula.

O CBC passou a ser a base dos programas de avaliação do governo estadual como o Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB) e o Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar (PAAE).

A flexibilidade curricular permeia todo o documento, dando oportunidade de adaptação dos conteúdos pelas escolas e professores de acordo com cada região do estado. Após a publicação original de 2005, passou por atualizações nos anos seguintes, no entanto, tais atualizações não alteraram a base dos conteúdos sugeridos, apenas buscaram atualizar as orientações pedagógicas com a inserção de novas e diferentes propostas de atividades.

No ano de 2020, mesmo já com a implantação do "novo Ensino Médio" em tempo integral na escola em que atuamos, a ordem foi elaborar o planejamento das disciplinas ainda seguindo o CBC, o que constata nenhuma alteração nos planos mesmo com tal implantação, pois se é um projeto que busca alterar o Ensino Médio, essa alteração deveria iniciar-se já no planejamento de cada conteúdo.

Percebemos que essa orientação é anterior a vários dispositivos legais, como acabamos de apresentar, inclusive, a várias diretrizes curriculares para a Educação Básica e para o Ensino Médio. Certamente, deverá ser atualizada em virtude da Lei nº 13.415/2017, da BNCC/2018, das DCN/2018 para o Ensino Médio.

Optamos por trazer para as discussões também o CBC de Minas Gerais por ser o documento utilizado por todas as escolas do Estado, da Educação Infantil ao Ensino Médio, na elaboração e atualização dos seus projetos pedagógicos e dos planejamentos anuais de cada disciplina. No estado de Minas é, desde sua implantação, a chave do todo o processo ensino-aprendizagem e como a pesquisa de doutorado está sendo desenvolvida em escolas estaduais é fundamental o seu conhecimento e estudo, sendo parte dos vários documentos aqui apresentados que sustentam o Ensino Médio, bem como o ensino de Matemática.

Em novembro de 2020, a Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais entregou ao Conselho Estadual de Educação, o documento Currículo Referência de Minas Gerais – Etapa Ensino Médio, para apreciação e, posterior homologação. Assim como o disponibizou para consulta pública de 1 a 17 de novembro. Visa atender à Base Nacional Comum Curricular – BNCC, com mudanças pedagógicas no tempo e na estrutura do currículo, incluindo a Formação Geral Básica e os Itinérarios Formativos, que deverão ser escolhidos pelos alunos. Há a previsão de implantação em 2022, conforme se lê na página da Secretaria, na Internet.

3.9.1 A Matemática no CBC

A organização dos conteúdos de Matemática do CBC são por eixo: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/ Álgebra e Funções e Tratamento da Informação, indo ao encontro das propostas dos PCN. Além dos conteúdos que integram a parte comum, apresenta uma parte complementar. O CBC de Matemática do Ensino Fundamental traz a competência, o tema, o tópico, as habilidades, os conteúdos, as orientações pedagógicas e a coluna "ciclos" os anos escolares (do 6º ao 9º ano). Essa última coluna é preenchida com os símbolos I (Intermediário), A (Avançado) e C (Consolidado) e indica o nível que tais conhecimentos tem que atingir de acordo com cada série.

Na organização do CBC de Matemática do Ensino Médio, o primeiro ano é uma "formação básica", nele há um resgate dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Fundamental de forma geral, porém também há a inserção de novos conceitos. O segundo ano é de "aprofundamento", com atividades mais complexas e novos conteúdos. No terceiro ano, constam os tópicos "complementares", um enriquecimento de conceitos.

A distribuição dos conteúdos é similar ao CBC do Ensino Fundamental, por "Eixo Temático". No Ensino Médio há uma enumeração do Eixo Temático I ao Eixo Temático IX, cada eixo possui seus temas e cada tema é organizado em tópicos. Na Figura 4, apresentamos uma síntese dessas informações.

Figura 4 - Organização do CBC de Matemática do Ensino Médio (2011) em Minas Gerais

1º ANO	**2º ANO**	**3º ANO (Tópicos complementares)**
EIXO TEMÁTICO I	*EIXO TEMÁTICO IV*	*EIXO TEMÁTICO VII*
Tema 1: Números Tópicos: - Números racionais e dízimas periódicas - Conjunto dos números reais - Potências de dez e ordem de grandeza	**Tema 9: Contagem** Tópicos: Contagem do número de elementos de uma união de conjuntos Conjuntos e sequências Princípio multiplicativo Arranjos, combinações e permutações sem repetição	**Tema 15: Números** Tópicos: Números complexos
Tema 2: Contagem Tópico: Princípio multiplicativo	Tema 10: Probabilidade Tópico: Probabilidade	Tema 16: Contagem Tópicos: - Arranjos, combinações com repetições e permutações cíclicas -Coeficientes binomiais, binômio de Newton e triângulo de Pascal

1º ANO	2º ANO	3º ANO
Tema 3: Probabilidade Tópico: Probabilidade	*EIXO TEMÁTICO V*	Tema 17: Probabilidade Tópico: Probabilidade condicional
Tema 4: Estatística Tópicos: - Organização de um conjunto de dados em tabelas - Médias aritmética e geométrica	Tema 11: Funções Tópicos: - Função do primeiro grau - Progressão aritmética - Inequações do segundo grau - Progressão geométrica - Função logarítmica - Sistema de equações lineares	Tema 18: Estatística Tópico: Mediana e moda
EIXO TEMÁTICO II	*EIXO TEMÁTICO VI*	*EIXO TEMÁTICO VIII*
Tema 5: Funções Tópicos: - Função do primeiro grau - Progressão aritmética - Função do segundo grau - Progressão Geométrica - Função exponencial	Tema 12: Semelhança e **Trigonometria (Geometria e Medidas)** **Tópico: Trigonometria no círculo e funções trigonométricas**	Tema 19: Funções (Funções elementares e modelagem) Tópicos: **- Funções trigonométricas** - Estudo de funções
Tema 6: Matemática Financeira Tópico: Matemática financeira	Tema 13: Geometria Analítica Tópico: Plano cartesiano	Tema 20: Matemática Financeira Tópico: Matemática financeira
EIXO TEMÁTICO III	Tema 14: Geometria Métrica e de posição Tópicos: - Prismas e cilindros - Pirâmides e cones - Esferas e bolas - Planificações de figuras tridimensionais - Posição relativa entre retas e planos no espaço - Áreas laterais e totais de figuras tridimensionais - Volumes de sólidos	*EIXO TEMÁTICO IX*
Tema 7: **Semelhança e Trigonometria** **Tópicos:** **- Semelhança de triângulos** **- Trigonometria no triângulo retângulo**		Tema 21: Semelhança e **Trigonometria** **Tópicos: Funções trigonométricas**
Tema 8: Geometria Analítica Tópico: Plano cartesiano		Tema 22: Construções geométricas Tópico: Lugares geométricos
		Tema 23: Geometria Analítica Tópicos: - Interseções entre retas e circunferências - Elipse, hipérbole e parábola Vetores
		Tema 24: Geometria de posição no espaço Tópico: Seções planas de figuras tridimensionais usuais
		Tema 25: Geometria métrica Tópico: Princípio de Cavalieri

Elaborado pela autora. Fonte: CBC de Matemática Ensino Médio.

Observamos, analisando a figura acima, que, no CBC de Matemática, existem temas comuns nas diferentes séries, como constatamos em relação à trigonometria, que aparece no primeiro ano, no Tema 7; no segundo ano, no Tema 12; e, no terceiro ano, nos Temas 19 e 21.

3.9.2 A função seno no Currículo Básico Comum (CBC)

Em relação ao estudo da função seno, recorrendo à Figura 4, verificamos que aparece no primeiro ano, no segundo e no terceiro ano, distribuída da seguinte forma: No primeiro ano, no Eixo Temático III,Tema 7: Semelhança e Trigonometria com os tópicos: semelhança de triângulos e trigonometria no triângulo retângulo. No segundo ano, encontra-se no Eixo Temático VI, Tema 12: Semelhança e Trigonometria (Geometria e Medidas), Tópico: Trigonometria no círculo e funções trigonométricas;No terceiro ano, está no Eixo Temático VIII, Tema 19: (Funções elementares e modelagem), Tópicos: Funções trigonométricas e Estudo de funções e no Eixo Temático IX, Tema 21: Semelhança e Trigonometria, Tópicos: Funções trigonométricas.

No segundo ano do Ensino Médio, no tópico "Trigonometria no círculo e funções trigonométricas", o CBC traz quatro habilidades, que estão apresentadas na Figura 5.

Figura 5 - Tópicos e habilidades de Trigonometria no círculo e funções trigonométricas no CBC/MG

Eixo Temático VI

Tema 12: Semelhança e Trigonometria

Geometria e Medidas

TÓPICOS	HABILIDADES
28. Trigonometria no círculo e funções trigonométricas	28.1. Calcular o seno, o cosseno e a tangente dos arcos notáveis: 0º, 90º, 180º, 270º e 360º. 28.2. Resolver problemas utilizando a relação entre radianos e graus. 28.3. Reconhecer no círculo trigonométrico a variação de sinais, crescimento e decrescimento das funções seno e cosseno. 28.4. Identificar no círculo trigonométrico o período das funções seno e cosseno.

Fonte: CBC (2005, p. 15)

Entendemos que as habilidades são apresentadas como uma sequência de conteúdos na forma que são normalmente desenvolvidos pelos professores, de maneira técnica, sem preocupação com o desenvolvimento do conceito. A primeira habilidade (28.1) refere-se ao cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos arcos notáveis, porém é, na segunda habilidade (28.2), que há referência ao que é o grau e o radiano, bem como à conversão de um ao outro.

A terceira habilidade (28.3) relaciona-se com a variação de sinal, crescimento e decrescimento da função seno e cosseno, e a quarta (28.4), com o período das funções. No entanto, apenas, no sentido de reconhecer e identificar algo, o que normalmente é feito de maneira empírica.

No final do CBC são apresentadas sugestões de atividades para cada tema. Em relação ao tema (12), sugere a utilização de softwares de geometria como o "Z.u.l[31]", um software praticamente desconhecido nas escolas de Minas Gerais. Também sugere a construção, usando papelão, linha e palitos do círculo trigonométrico, com objetivo de "introduzir os conceitos das funções seno e cosseno" (p. 27). Observamos nessa passagem, que questões que discutem o movimento lógico-histórico dos conceitos não são apresentadas. Outra sugestão de atividade apresentada pelo CBC é trabalhar de maneira interdisciplinar com os professores de física "para o estudo do movimento circular uniforme e cálculo de distâncias"(p. 27), na busca de demonstrar uma aplicação imediata para o conteúdo sem se importar com a formação do conceito.

No terceiro ano, volta novamente a função seno em dois tópicos. Primeiro, no tópico "Funções trigonométricas", com 3 habilidades conforme figura 6.

Figura 6 - Funções trigonométricas no CBC

Eixo Temático VIII

Tema 19: Funções

Funções Elementares e Modelagem

TÓPICOS	HABILIDADES
42. Funções trigonométricas	42.1. Identificar o gráfico das funções seno, cosseno e tangente. 42.2. Reconhecer o período de funções trigonométricas. 42.3. Resolver equações trigonométricas simples.

Fonte: CBC (2005, p.17)

A primeira habilidade (42.1) é a identificação do gráfico das funções seno, cosseno e tangente; a segunda (42.2) refere-se ao reconhecimento do período e a terceira está relacionada às equações trigonométricas simples, que não é foco desse estudo. O que observamos aqui é praticamente uma repetição das habilidades do tema 12 desenvolvidas no segundo ano, que acabamos de discutir.

[31] Software aplicativo no campo de sistemas de geometria dinâmica, desenvolvido por René Grothmann, professor de matemática da Universidade Católica de Eichstatt.

Ao final do documento, também são apresentadas algumas sugestões de atividades que, se desenvolvidas da forma adequada, podem contribuir na busca da formação do conceito. Por exemplo: “propor situações que envolvam funções que apresentam periodicidade”, “situações-problema que envolvam o cálculo da amplitude, frequência e o período de uma onda senoidal”, e, novamente, a sugestão de atividades interdisciplinares com os professores de física “para analisar movimentos ondulatórios” (CBC, 2005, p. 29).

No tema 21, o tópico “45. Funções trigonométricas” tem cinco habilidades.

Figura 7 - Habilidades do tópico 45 - “Funções trigonométricas”- CBC/MG

Eixo Temático IX

Tema 21: Semelhança e Trigonometria

TÓPICOS	HABILIDADES
45. Funções trigonométricas	45.1. Resolver problemas que envolvam funções trigonométricas da soma e da diferença de arcos. 45.2. Resolver problemas que envolvam a lei dos senos. 45.3. Resolver problemas que envolvam a lei dos cossenos. 45.4. Identificar os gráficos das funções seno e cosseno. 45.5. Identificar o período, a freqüência e a amplitude de uma onda senoidal.

Fonte: CBC (2005, p. 18)

Destacamos a habilidade 45.4 que trata de “Identificar os gráficos das funções seno e cosseno” e a habilidade 45.5 sobre “Identificar o período, a frequência e a amplitude de uma onda senoidal”, repetindo as habilidades já apresentadas no segundo ano e no tópico anterior do terceiro ano.

Como sugestão de atividades desse tema e que nos chamou atenção é, “Propor atividades de pesquisas mostrando a motivação histórica da extensão da trigonometria no triângulo retângulo ao círculo trigonométrico” (p. 29) – uma sugestão que também pode contribuir, se enfatizar a formação do conceito, porém aparece como último tópico no final do estudo da trigonometria, momento em que o aluno já “estudou” a função seno de maneira técnica e empírica.

3.10 Uma síntese

Observa-se que desde a sua implantação, o Ensino Médio está apoiado no modo de produção capitalista e na dicotomia entre ser uma preparação para o mercado de trabalho e/ou uma preparação para o ingresso no ensino superior, no entanto mesmo com todas as discussões relacionadas à sua reformulação, essa dualidade ainda persiste. Essa falta de identidade do Ensino Médio reflete-se na quantidade de dispositivos legais que se propõem a regulamentá-lo. Revelam "boas intenções", visando a agradar às demandas dos que têm mais voz, entremeadas pela apropriação de propostas advindas do campo da educação.

Neste contexto, os gestores da educação básica e os professores, a quem cabe organizar o ensino ficam à margem das discussões. Não há tempo nem de conhecer o que está proposto e já surge outra proposta, sem questionar de onde virão os recursos para a implementação, de que forma se dará a formação.

Em função das várias mudanças em relação aos dispositivos legais e suas ementas, apresentaremos uma síntese organizada para um melhor entendimento do apresentado neste capítulo. (Figura 8)

Figura 8 - Trajetória da regulamentação do Ensino Médio no Brasil– 1996-2020

Ano	*Documentos/acontecimentos*	*Principais "contribuições"*
1996	Aprovação da LDB 9.394	Educação Básica ficou organizada em Educação Infantil, Ensino Fundamental (1ª a 8ª série, hoje 1º ao 9º ano) e Ensino Médio (última etapa)
1997	Primeiros PCN (Ensino Fundamental I)	Apoiar as escolas na organização dos currículos
1998	PCN (Ensino Fundamental II)	Apoiar as escolas na organização dos currículos
	DCNEM	Elaborar competências e diretrizes para orientar a organização e o planejamento curricular
	Criação do ENEM	Induziu fortemente a organização/reorganização curricular do EM
2000	PCN (Ensino Médio)	Apoiar as escolas na organização dos currículos
2001	PNE 2001/2010	Com objetivo de melhorar a educação em todo país
2002	PCN+ (Ensino Médio)	Orientações educacionais complementares aos PCNEM
2005	CBC de Minas Gerais	Currículo Básico Comum, obrigatório para a organização curricular das escolas do estado
2008	Lei nº 11.741	Prevê a Educação Profissional Técnica de Nível Médio
2012	"Novas" DCNEM	Atualizou as DCNEM/98, porém permanecendo as mesmas discussões
2014	Novo PNE 2014/2024	Com "participação" de vários atores trouxe 10 diretrizes, 20 metas e 254 estratégias, sendo 5 metas (3,6,7,10 e 11) direcionadas ao Ensino Médio

Ano	*Documentos/acontecimentos*	*Principais "contribuições"*
2017	BNCC do Ensino Fundamental	Conjunto de orientações obrigatórias que norteará a organização dos currículos.
	Projeto de Reforma do Ensino Médio (Lei nº 13.415)	Conjunto de novas diretrizes que propõe flexibilizar o Ensino Médio
2018	Reformulação das DCNEM com vistas a Reforma do EM	Alterações principalmente em relação à parte da carga horária que passa a ser à distância
	BNCC do Ensino Médio	Ensino Médio organizado em 4 áreas do conhecimento
2020	Reforma do Ensino Médio (Lei nº 13.415)	Implantação do "Novo Ensino Médio"
	Currículo Referência de Minas Gerais etapa Ensino Médio	Atender à BNCC

Fonte: Elaborado pela autora

Em relação ao currículo de Matemática, observamos, nos documentos aqui apresentados, uma preocupação em trabalhá-la enfatizando a sua aplicação no cotidiano do aluno e o desenvolvimento de competências, sem ênfase explícita a uma aprendizagem conceitual que conduza ao desenvolvimento integral do jovem.

Esta trajetória de alterações revela as contradições presentes neste nível de ensino sendo elas: promover uma formação integral para todos ou destinar um ensino de qualidade para alguns e um ensino aligeirado para as classes desfavorecidas, marginalizadas e vulneráveis; garantir o acesso a uma formação básica geral em todas as áreas do conhecimento para todos ou somente o mínimo para alguns; atender aos ditames de uma política neoliberal que enxuga o Estado ou prover os recursos necessários que possibilitem arcar com escolas de tempo integral como aparece no proposto. Muitas são as contradições nas inúmeras propostas de reformas, que incorporam o discurso dos pesquisadores do campo da educação, mas estão a serviço de outras intencionalidades

E nesse contexto do Ensino Médio, no próximo capítulo buscaremos adentrar no ensino de matemática, especificamente, na trigonometria e na função seno, com destaque nos seus aspectos históricos e lógicos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno.

4 O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DA FUNÇÃO SENO

Ainda no cenário do Ensino Médio, nesse capítulo buscamos entrelaçar os principais aspectos históricos e lógicos da trigonometria, passando pela álgebra, pelas funções e pelas funções trigonométricas até chegarmos ao objeto, que é a função seno, fios que compõem a tessitura do conhecimento matemático, com destaque no movimento lógico-histórico na formação desses conceitos pelo aluno, como base para o seu desenvolvimento.

Apesar desse movimento lógico-histórico ser uma unidade, no desenvolvimento do pensamento o histórico antecede o lógico, pois, nas palavras de Kopnin(1978), o histórico é o objeto em transformação, enquanto o lógico é o meio de transformação desse objeto.

Quando falamos no movimento lógico-histórico do conceito da função seno, recorremos a Kopnin (1978, p. 183) que explica o histórico como sendo,

> [...] o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade.

Ao explicar o lógico, afirma,

> [...] O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa (reprodução do processo histórico real), mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. (KOPNIN, 1978, p.183)

Esse pensamento de Kopnin a respeito do par histórico-lógico é muito profundo e coerente com a perspectiva dialética. Aquilo que o homem construiu historicamente é, para as novas gerações, objeto de conhecimento e, enquanto tal, situa-se no externo, no social. O reflexo do histórico, aquilo que já foi transformado em imagem, já foi abstraído pelo ser que conhece, passa a ser o conteúdo do pensamento, sendo o lógico, o modo de reproduzir, por um processo de ascensão do abstrato ao concreto, esse histórico.

Nesse sentido, iniciamos trazendo aspectos desse movimento lógico-histórico dos conceitos que sustentam o objeto. Segundo Moura (2014, p. 11), “ a história do conceito deve ser vista não como ilustradora do que deve ser ensinado. Ela é o verdadeiro balizador das atividades educativas”, ou seja, a história do conceito é a base para o seu verdadeiro entendimento por trazer as sínteses que são produzidas pelo homem ao longo da história. Em outras palavras, o processo ensino-aprendizagem fundamentado no movimento lógico-histórico pode contribuir na apropriação dos conhecimentos nas suas formas mais elaboradas, para além do seu valor utilitário e tecnicista, isto é, promover o desenvolvimento do pensamento teórico.

Para reforçar essa questão, Sforni (2015, p. 17) esclarece que

> A contextualização não deve ser apresentada aos alunos como uma narrativa histórica, seja por meio de um texto seja por aula expositiva: deve permear as atividades e ser destinada a inserir os estudantes em situações semelhantes àquelas que gestaram a necessidade de elaboração do conceito. Esse tipo de tarefa escolar leva o aluno a compreender os conceitos como instrumentos simbólicos criados pelos homens para atender às suas necessidades de compreensão e intervenção no mundo.

Não temos a pretensão de esgotar todo o processo de criação da trigonometria, da álgebra e das funções, pois sabemos que envolve o surgimento de várias teorias e conceitos de diferentes estudiosos, os quais não conseguiríamos elencar. Buscamos destacar os conceitos e as suas relações, ou seja, os nexos conceituais internos, na tentativa de ultrapassar os nexos externos, que são formais, elementos perceptíveis, estáticos, que não constituem a essência do pensamento teórico. Por exemplo, as classificações e as diferentes representações do conceito, que são nexos externos.

Para Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 96-97),

> Os nexos conceituais que fundamentam os conceitos contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento. [...] Os nexos externos não deixam de ser uma linguagem de comunicação do conceito apresentada em seu estado forma, mas que não necessariamente denota sua história.

Para a produção deste capítulo, foram consideradas como apoio, as historiografias[32] dos autores da História da Matemática BOYER (1974) e CARAÇA (1951) e de autores da matemática como LIMA e*t al.*(2001) e IEZZI (2001, 2016). É importante destacar que os autores matemáticos foram consultados por apresentarem obras consolidadas na área da matemática e do seu ensino. Embora saibamos que focam os nexos externos dos conceitos, ou seja, os elementos perceptíveis, como as fórmulas, as representações, as definições, ou seja, os aspectos lógicos e formais, estes, também, estão presentes nos conceitos e precisam ser ensinados. Já os autores da história da matemática, dentro de uma vertente historiográfica, enfatizam os nexos internos dos conceitos, como, no caso de funções, o movimento/fluência,

[32] Segundo Sousa; Moura (2019), existem diferentes historiografias da Matemática, dependendo das fontes históricas consultadas, das interpretações feitas dessas fontes, as quais dependem das ideologias assumidas.

a interdependência, havendo assim a presença dos nexos internos e externos, o que consideramos necessário para a melhor apropriação e desenvolvimento de um conceito.

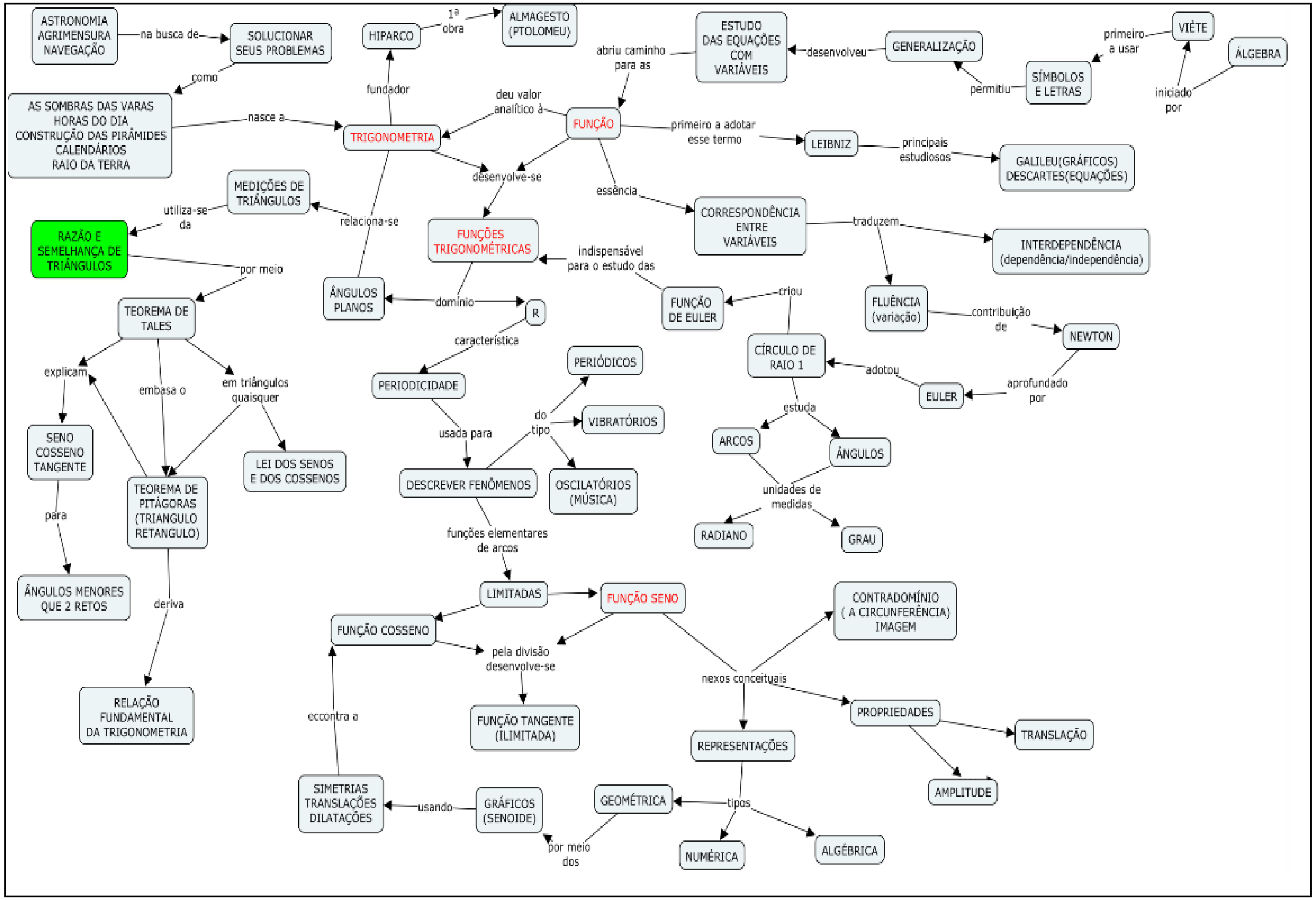
A obra *Exame de textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*, de Lima *et al*. (2001), na qual os autores fazem uma análise de 36 volumes, que compõem 12 coleções dos principais e mais usados livros didáticos adotados pelas escolas brasileiras, naquele momento (2001), teve como propósito “contribuir para a melhoria da qualidade dos nossos livros-textos” (p. 1). Nela, alguns aspectos nos chamaram a atenção em relação ao processo de ensino-aprendizagem da trigonometria no círculo, em especial da função seno: por um lado, os autores destacam aspectos relacionados ao excesso de abordagens desnecessárias do conteúdo, e, por outro lado, aspectos relacionados ao que é essencial para um bom aprendizado do conteúdo, porém que, em muitas situações, não são desenvolvidos. Propõem “não dar relevância a pontos triviais e, ao mesmo tempo, destacar os tópicos, os conceitos e as proposições de importância crucial”. (p. 3). Em outras palavras, afirmam que a trigonometria é tratada “com exagero de fórmulas sem importância, impedindo o aluno, e o próprio professor, de distinguir o essencial do supérfluo”. (p.3).

Iezzi (2001, 2016) foi consultado como outro autor matemático de apoio no desenvolvimento desse capítulo, por considerarmos que seus livros didáticos se preocupam com o aspecto lógico-formal dos conceitos. Além disso, na análise de Lima *et al* (2001) em relação à obra de Iezzi, foram desprendidos elogios em relação ao tratamento dado ao objeto de estudo (função seno), “as funções seno e cosseno estão bem apresentadas”(LIMA *et al.*, 2001, p. 114).

Assim, detalhamos o movimento do conhecimento trigonométrico/algébrico, notadamente, da função seno, com os propósitos de apropriar-nos da essência desse conhecimento, que, no nosso entender, é lógica e é histórica, e propor um experimento didático-formativo que enfatize a busca desta essência.

Para nos ajudar a tecer essas ideias, elaboramos um esquema, que denominamos “Esquema conceitual histórico-lógico da função seno” (Figura 9), que contribuiu na apropriação do movimento dialético do lógico-histórico da trigonometria. Esse esquema é a síntese das ideais apresentadas anteriormente sobre o movimento lógico-histórico da função seno.

Figura 9 - Esquema conceitual lógico-histórico da função seno



Fonte: Elaborado pela autora

4.1 Da trigonometria às funções trigonométricas

Como apresentado no esquema anterior, detalharemos nesse subcapítulo o caminho da trigonometria às funções trigonométricas. Iniciaremos pelos aspectos lógico-histórico do objeto na busca da compreensão de sua essência que, segundo Kopnin (1978, p.186), "...enriquece a teoria, corrigindo-a, complementando-a e desenvolvendo-a". Para revelar a essência do objeto, precisamos reproduzir o processo histórico do seu desenvolvimento, as necessidades humanas em cada época e as elaborações práticas e teóricas realizadas. Assim caberia indagar: O que é a trigonometria? Como surgiu ou quais as necessidades que levaram ao seu surgimento? Quais os seus principais estudiosos? Qual a sua relação com a álgebra? O que são as funções trigonométricas? Para que servem? E a função seno? O que ela representa? Essas perguntas são ambiciosas e difíceis de serem respondidas, pois como afirma Boyer (1974, p. 116) "A trigonometria como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação".

4.1.1 Aspectos do desenvolvimento histórico-lógico da trigonometria

Os egípcios e os babilônicos foram os pioneiros desse estudo, ao buscarem soluções para suas necessidades práticas, principalmente problemas ligados: à Astronomia, como ciência que trata do universo sideral e dos corpos celestes; à Agrimensura, arte da medição de terras; e às Navegações, no planejamento e execução de viagens. A relação entre as sombras das varas perpendiculares projetadas no solo e as horas do dia, a inclinação na construção das pirâmides e a elaboração de calendários são alguns exemplos de situações em que se aplicavam conhecimentos trigonométricos. Segundo Boyer (1974), teoremas envolvendo as razões entre lados de triângulos semelhantes haviam sido usados por esses povos, embora não conhecessem medida de ângulo.

No entanto, naquela época (civilização egípicia, babilônica), os registros eram feitos em materiais frágeis que, com o passar dos tempos, deterioravam-se, e muitos deles se perdiam, os que perduravam foram os feitos com materiais mais resistentes, como os papiros e as tábuas de barro, que eram muito usadas. O primeiro registro, conhecido hoje, está no Papiro Rhind[33] (Figura 10), no qual se encontram problemas que envolviam o cálculo de razões entre números e lados de triângulos semelhantes.

[33] Registro mais antigo da matemática (1650 a.C) escrito pelo escriba Ahmés. Possui a solução para 85 problemas matemáticos e está exposto no Museu Britânico, em Londres.

Figura 10: Papiro Rhind (Papiro Ahmes)

Fonte: Scribe (2015)

Carvalho (1999, p. 101) atribui a criação da trigonometria à matemática grega, segundo o autor “os estudos da Trigonometria se concentravam na Trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera”, sendo necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana.

Aristarco, que viveu por volta de 300 a.C, calculou distâncias inacessíveis[34], como da Terra ao sol, usando teorema geométrico, que, agora pode ser expresso por uma desigualdade trigonométrica. Isso confirma que o homem tinha a necessidade/curiosidade de calcular essas distâncias inacessíveis com os instrumentos tecnológicos de que dispunha naquela época, valendo-se dos conhecimentos matemáticos.

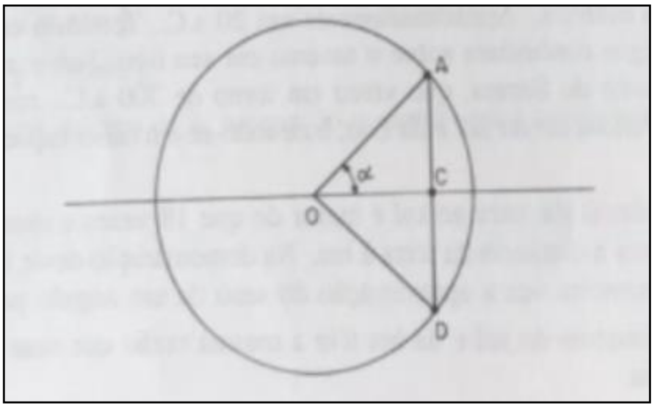
Considerado o “fundador” da Trigonometria, o astrônomo Hiparco de Nicéia (190 a. C a 120 a.C) elaborou a primeira tabela trigonométrica sobre comprimentos das cordas e arcos, seu objetivo era relacionar a corda[35] de um ângulo e o ângulo central para contribuir com seus estudos da astronomia. Segundo Boyer (1974), o surgimento do grau como sendo 1/360 da circunferência e do minuto como 1/60 do grau é atribuído a Hiparco.

Os matemáticos gregos já usavam o seno da corda do arco duplo e não como seno de ângulo. Conforme a figura 11, se o ângulo AOC subtende o arco AC, a corda do arco duplo AD será AD, nesse sentido adotavam-se o raio AO com comprimento 60 e dividiam o círculo em 360 partes para facilitar os cálculos realizados, Carvalho (1999, p. 102), apresenta o cálculo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}\frac{cordaAD}{OA} = \frac{1}{120} \text{ corda AD}$$

[34] Para mais detalhes, ver Boyer (1974, p. 116)
[35] Segmento de reta que une dói pontos distintos quaisquer da circunferência.

Figura 11: A corda do arco duplo



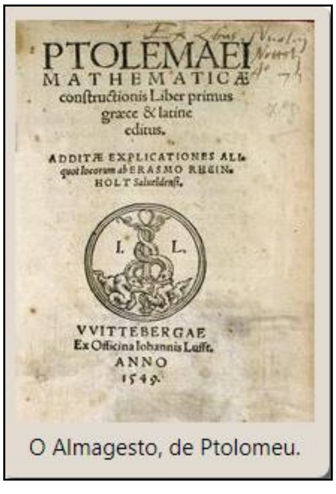
Fonte: Carvalho (1999, p. 102)

Esses fatos já constatavam a presença da trigonometria na circunferência.

Apoiado nos estudos de Hiparco e acrescentando suas concepções, Claudio Ptolomeu (90-168, século 2) lançou a principal obra sobre trigonometria da antiguidade, *Almagesto*(Figura 12) palavra árabe que significa "o maior", com objetivo de descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar. Ele contém 13 livros que serviram como fonte de pesquisa para astrônomos durante anos. Nele, estão teorias como: a divisão da circunferência em 360 partes; a aproximação para o número π *(pi)*; o conceito de radiano; e, no capítulo 11 dessa obra, existe uma tabela de cordas (ou seja, de senos).

Mas antes dele, Arquimedes de Siracusa (287 a.C-212 a.C) já desenvolvia trabalhos envolvendo o raio e o perímetro do círculo e algumas fórmulas trigonométricas, no entanto, não sistematizou esses conhecimentos da forma que fazemos hoje.

Figura 12 - "O Almagesto"



Fonte: COSTA (2020)

Entendemos que o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, ligados à Trigonometria e à Geometria, aconteceram gradualmente durante muitos séculos, e foram teorias que contribuíram na formação de uma para a outra. Inclusive, nomes de geômetras, como dos gregos Tales de Mileto (625-546 a.C), que desenvolveu seus estudos sobre razão e semelhança[36], dando nome a um teorema de "Teorema de Tales", e Pitágoras de Samos (570-495 a. C), que deu nome a um dos teoremas mais importante da matemática elementar, o "Teorema de Pitágoras[37]", foram estudiosos que desenvolveram conhecimentos fundamentais para a Trigonometria. Vale antecipar que a semelhança de triângulos explica todas as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), além das leis dos senos e a dos cossenos, usadas para resolver problemas práticos do dia a dia.

A definição da palavra *trigonometria* está relacionada às "medições de triângulo", "tri" (três), "gono" (ângulo) e "metrien (medida), nome que só foi adotado em 1595 por Bartholomeo Pitiscus (1561- 1613), porém a sua gênese é bem anterior a essa palavra.

Analisar o processo histórico da trigonometria é entender também o percurso de surgimento da álgebra[38]. Os primeiros registros da aplicação da trigonometria à resolução de problemas algébricos foram feita por Francóis Viéte[39] (1540-1603), que desencadeou o avanço dos estudos da álgebra e deu um tratamento analítico para a trigonometria com o surgimento das fórmulas. Em pleno século XVI, Viète, em meio à ênfase atribuída ao estudo de geometria e da trigonometria, foi o primeiro estudioso a usar símbolos (letras) para valores desconhecidos, o que permitiu a generalização, fato esse diretamente relacionado ao surgimento da álgebra e à sistematização do pensamento algébrico.

Antes de Viète, os primeiros registros algébricos foram achados no Egito, por volta de 2.000 a.C. no papiro de Rhind. Os árabes já divulgavam procedimentos algébricos vindo dos hindus, mas usando linguagem comum ligada aos números (álgebra retórica, álgebra geométrica, álgebra sincopada). Diofanto (nascido entre 201 e 214, falecido entre 284 e 298) antecedeu Viète e tentou criar um tipo de simbologia que permitisse a escrita de leis gerais, a partir da álgebra sincopada.

---

[36]Regras de três só valem quando há proporcionalidade e, em Geometria, isto significa semelhança.

[37]Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é a igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"

[38]O termo *álgebra*, segundoIfrah (1985, apud Sousa, Panossian, Cedro, 2014, p.103), significa "passar os termos de um membro a outro para torná-los positivos em uma equação", no próprio significado do termo observamos uma relação direta da álgebra com as equações[38]. Esse termo provém da obra "Hisab**aljabr**w'al-muqabalah" ou simplesmente "Al-jabr."do matemático Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi.

[39] Francês, conhecido como "O pai da Álgebra", deu caminho aos estudos posteriores de grandes nomes da matemática como Descartes e Newton. A obra mais antiga sobre álgebra registrada é sua ("Isagoge in artemanalyticu", ou seja, "Rudimentos da arte analítica"1591). Devido a sua habilidade com os símbolos trabalhou para a corte francesa para descodificar cartas em períodos de guerra.

Nesse sentido, desenvolveu o estudo das equações e construiu uma primeira notação algébrica representada com gráficos até chegar à aplicação da álgebra nos estudos de trigonometria. O seu método consistia em cálculo simbólico, envolvendo grandezas abstratas, no entanto, todo seu estudo era voltado para a solução de problemas práticos da geometria e da trigonometria. Nesse sentido Corrêa e Roque (2017, p .1) afirmam, "o método analítico e os procedimentos algébricos propostos por Viète foram fundados para servir à geometria".

A geometria era o ramo da matemática mais usado para resolver os problemas do cotidiano da sociedade, na medição de terras e no cálculo de áreas. Foi nesse movimento das diversas teorias em transformação para atender às necessidades da população que as "álgebras[40]" ganharam seu espaço ao produzir avanços na sociedade, o que é afirmado por Sousa, Panossian e Cedro, (2014, p.31) ao dizerem, "... tanto o campo da álgebra quanto o de outros conhecimentos matemáticos foram elaborados historicamente por indivíduos de diversas civilizações, em diferentes épocas, para atender às necessidades postas pela experiência prática".

4.1.2 Aspectos do desenvolvimento histórico-lógico do conceito de função

No movimento de desenvolvimento econômico, político e cultural da sociedade, as ciências tornam-se protagonistas e a álgebra simbólica[41] consolida-se como conhecimento científico. Nela, o conceito de variável como incógnita, representada por letras e símbolos para a generalização de grandezas desconhecidas, solidifica-se e abre caminho para o estudo das funções, como uma relação de dependência entre grandezas.

Na antiguidade, já se estudavam as relações de dependência entre grandezas, porém ainda se desconheciam as ideias de variáveis e de função, desde a época do grego Diofanto. No entanto, o conceito de função foi demarcado com o desenvolvimento do trabalho de vários estudiosos: com Galileu Galilei[42] (1564-1642), que introduziu, no estudo dos seus gráficos, valores (dados quantitativos), em seguida com René Descartes[43] (1596-1650), ao utilizar equações para relacionar dependência entre grandezas.

---

[40]Quando descrevemos "álgebras", nos remetemos às suas várias fases e duas delas merecem destaque em função do seu marco no processo da formação conceitual, são elas, "Álgebra Elementar", que tem como foco o estudo das equações e seus processos de resolução e a "Álgebra Moderna", que se relaciona às estruturas matemáticas (grupos, anéis e corpos).
[41] Ao falarmos em "álgebra simbólica" estamos nos referindo à parte da matemática que estuda símbolos, letras e variáveis, base hoje para o desenvolvimento da tecnologia digital.
[42] Astrônomo, foi o pioneiro ao defender que a terra não era o centro do universo.
[43] Filósofo, matemático, físico e pioneiro no pensamento filosófico moderno.

Em paralelo ao surgimento da trigonometria, também, caminhava o surgimento das funções, os trabalhos de Isaac Newton[44] (1643-1727) sobre “fluentes” (expressão usada para explicar os conceitos de função) no estudo de curvas, que representavam movimentos e fenômenos mecânicos, muito contribuíram nesse desenvolvimento. Porém, segundo Baraldo (2009), foi Leibniz[45] (1646-1716), o primeiro a adotar o termo “função”, mais adiante, Jean Bernoulli[46] (1667-1748) e Leonard Euler[47] (1707-1783) refinaram o conceito, representando-o por uma expressão algébrica.

Como um dos matemáticos mais produtivos da história até hoje, Euler adotou o círculo de raio um na busca de relacionar a trigonometria dos triângulos com a trigonometria dos arcos na circunferência trigonométrica, ampliando o trabalho de Newton (“fluentes”), o que possibilitou a criação da Análise Matemática, que discute os processos infinitos; e adotou o símbolo mais usado para função, que é *f(x).* Não podemos deixar de citar também o matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813), pois ampliou o campo de conhecimento, ao incorporar o estudo de várias variáveis.

Ao recorremos à historiografia de Eves (1997), constatamos que a importância do estudo das funções, não só nas escolas de Educação Básica, mas também nos cursos de formação de professores, tem como foco a formação matemática do estudante. Segundo o autor, o conceito de função é como um “guia natural”, um eixo estruturador para a seleção e o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos. Em suas palavras,

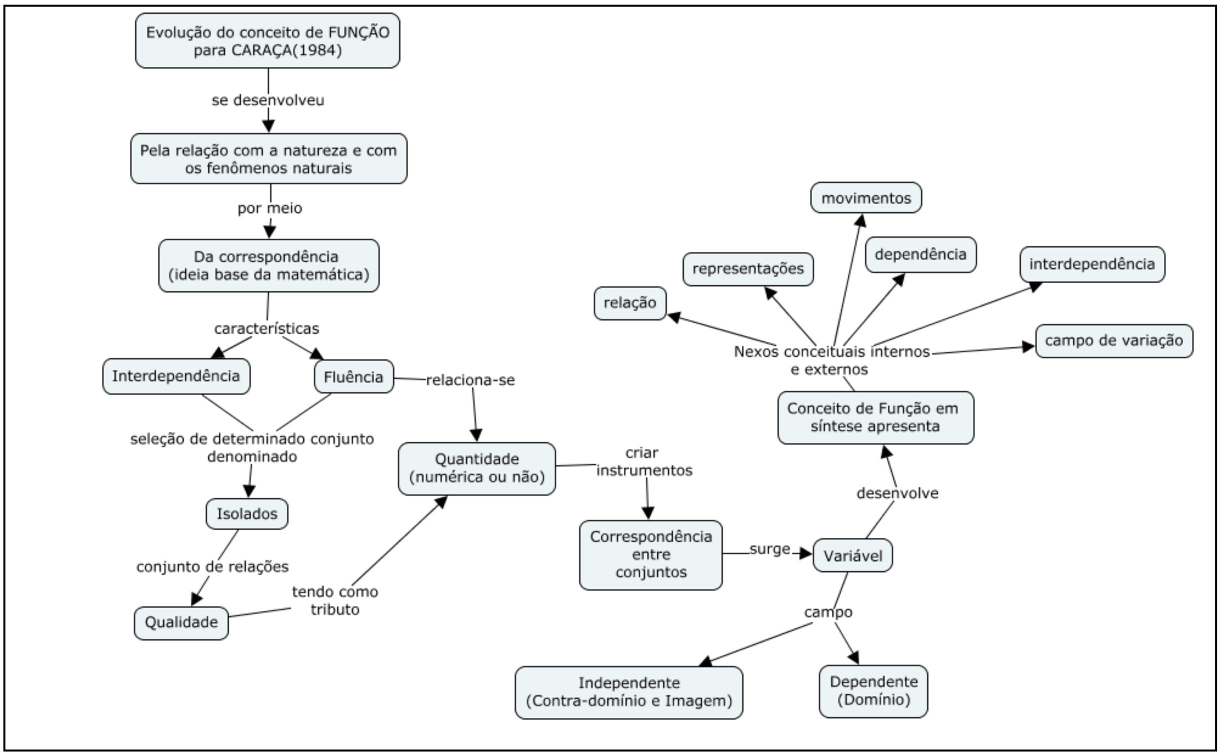
> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática. (EVES, 1997, p. 661).

Como o foco do trabalho é o movimento lógico e histórico das funções trigonométricas, especificamente da função seno, faremos, ainda, uma breve discussão sobre o desenvolvimento do conceito de função, bem como seus nexos conceituais, amparados na historiografia de Caraça (1951). Em um movimento de apropriação de suas ideias, construímos o esquema conceitual apresentado (Figura 13).

---

[44]Cientista, químico, físico, mecânico e matemático descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade.
[45]Gottfried Wilhelm Von Leibniz, matemático e filósofo alemão, “pai da função”.
[46] Matemático suíço que contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.
[47]Foi o matemático que desenvolveu mais trabalhos da história.

Figura 13 : Esquema conceitual da historiografia de Caraça sobre função



Fonte: Elaborada pela autora

Em análise ao esquema anterior, destacamos que para Caraça (1951), o conceito de função teve a sua gênese e foi se lapidando à medida que o homem o utilizava na sua vida prática, na sua relação com a natureza, com os fenômenos naturais.Por exemplo, "o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a ação do calor, a passagem duma corrente elétrica num condutor, a germinação duma semente, o exercício de direitos políticos pelos cidadãos, etc." (p. 119).

A realidade, que o homem busca conhecer, apresenta duas características básicas, a *interdependência*, que é a relação entre as coisas, e a *fluência*, que é a transformação das coisas, demonstrando a relação direta e indireta entre tudo e todos no universo.

Mas como tudo depende de tudo, para o estudo de determinado conceito, Caraça (1951) caracteriza o que chamou de *isolado*, "um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados" (p. 112). Nesse contexto, os isolados possuem um conjunto de relações que ele chama de *qualidades* e de *quantidades,* essas últimas são atributos das qualidades, que podem ou não serem traduzidas em números.

O trabalho do cientista é, segundo Caraça (1951, p. 119), o de "observar, descrever os fenômenos e ordenar os resultados da sua observação num quadro explicativo". Nessa busca, a constatação de regularidades é fundamental, pois permite a replicação e a previsão, o estabelecimento de uma lei natural, que é "toda regularidade de evolução dum isolado" (p. 120).

Essa concepção de Caraça alinha-se a uma perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico, segundo a dialética materialista e os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, presente nos trabalhos dos autores russos, conforme tratamos na seção 2 desse estudo.

A variação quantitativa do isolado está relacionada à fluência, que são as alterações que ocorrem nos fenômenos naturais, e, para estudá-las, é necessário criar instrumentos. Em suas palavras, "se queremos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos" (CARAÇA, 1951, p.127). Essa relação de correspondência é a base para o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos. Uma forma de instrumento palpável para essa correspondência seria a representação simbólica por meio de variáveis. Assim define variável,

> Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo, x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos variável. (CARAÇA, 1951, p. 127).

Ao explicar o conceito de variável, referindo-se ao x, variando no conjunto dos números reais do intervalo (0,1) ele expressa toda a dialética desse conceito, quando afirma: "o símbolo x, sem coincidir *individualmente* com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida *coletiva* do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela " (p. 127, grifos do autor). Nessa explicação, identificamos a relação parte-todo, expressa nas palavras "individualmente" e "coletiva"; a questão da contradição entre o "ser" e o "não ser" um representante do todo; o movimento do "vir a ser".

As variáveis se relacionam com um campo de variação, e podem ser dependentes (quando pertencem ao contradomínio e imagem) ou independentes (quando pertencem ao domínio) e são essenciais nas várias maneiras de representação de uma função, seja analítica (que faz corresponder cada valor de x um y) ou geométrica (representação no plano cartesiano com retas e curvas).

No entanto, para Caraça (1951), a essência do conceito de função é a correspondência unívoca entre os dois conjuntos envolvidos na relação e destaca que, "o conceito de função não teve sempre a generalidade que lhe damos hoje. Ele foi surgindo, lentamente, da necessidade de estudar leis naturais. Foi sendo identificado com ―a relação analítica que define a correspondência das duas variáveis" (p. 209).

Assim, ao analisarmos esse movimento lógico-histórico do desenvolvimento da função do ponto de vista de Caraça (1951), podemos destacar os seguintes nexos conceituais externos: representações nas formas analítica, f(x) e gráfica, e os nexos conceituais internos: movimento, variação, dependência, interdependência, campo de variação e relação. Sousa (2004), Sousa; Panossian; Cedro (2014); Sousa; Moura (2019) têm discutido e apresentado esses nexos.

Em contrapartida, o que verificamos na prática do processo ensino-aprendizagem desse conteúdo nas escolas e nos livros didáticos atualmente é a preocupação excessiva com os nexos externos, ou seja, aprender as representações do conteúdo para saber usá-los na resolução de exercícios, o estudo das funções é desenvolvido a partir da teoria dos conjuntos, desconsiderando seu movimento lógico-histórico. Sousa; Moura (2019) afirmam que, "estudam-se, por exemplo, o conceito de função, tendo como fundamento a Teoria dos Conjuntos", eles vão além ao dizer que, usando esse caminho "a palavra assume o conteúdo" e os "nexos internos perdem a importância", pois existe uma ruptura entre a unidade dialética forma-conteúdo.

> Não é à toa que, nesta perspectiva, à qual denominamos lógica-formal, cujo ponto de partida para o ensino do conceito de função é a Teoria dos Conjuntos, poucos jovens escolarizados conseguem relacionar o conceito de função com os movimentos de suas próprias vidas. Há uma distância muito grande entre os movimentos da vida e o conceito lógico-formal da função. (SOUSA; MOURA, 2019, p. 17)

É necessário destacar que não menosprezamos a importância dos nexos externos no desenvolvimento do pensamento teórico do aluno, entendemos que deve haver um diálogo entre os nexos internos e externos na formação de um conceito.

Nessa proposta, segundo Sousa, Moura (2019), o devido fundamento dos nexos conceituais internos e externos do conceito de função nos possibilita conhecer e manipular os fenômenos naturais que nos cercam. Para isso é necessário,

> (1) analisar e compreender movimentos regulares e irregulares da vida; (2) elaborar leis de formação que regem os movimentos regulares da vida; (3) compreender um poderoso instrumento de leitura e compreensão das diversas variações que insistem em dominar a nossa realidade, seja ela científica ou não; e, (4) pensar cientificamente, de forma a elaborarmos

> pensamento teórico sobre a realidade que nos cerca. (SOUSA, MOURA, 2019, p. 16)

Essas são possibilidades para a organização do ensino que exigem um outro pensar dos elaboradores de propostas curriculares, de professores, dos alunos. São mudanças que podem fazer parte dos processos formativos de professores, tanto inicial, quanto continuada.

4.1.3 Aspectos do desenvolvimento lógico-histórico da função seno

Ao entrarmos especificamente no estudo da função seno, verificamos que o seu primeiro registro está no livro *Aryabhatiya* (500 d. C), que apresenta o seno como uma função de um ângulo, antes disso era a relação entre a metade da corda de um círculo e a metade do seu ângulo central, ou seja, a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é o valor do seno, o que provocou a substituição das tabelas de cordas dos antigos, conforme apresentamos anteriormente.

Nos registros originais, o nome dado à meia corda pelos hindus era *jiva*, na tradução feita pelos árabes transformou-se em *jiba* (jb), na tradução para o latim virou *sinus*(seio, curva*)* e para o português *seno*. A abreviação *sen*, que adotamos até hoje, só surgiu no século XVII, feita por Edmund Gunter. Mesmo não sendo o objeto de estudo, vale ressaltar que a função cosseno surgiu, posteriormente, a partir da necessidade de calcular o seno do ângulo complementar, ou seja, o seno do ângulo cuja soma com o original resulta em 90º, $\text{sen}(90^{\circ} - \alpha) = \cos(\alpha)$.

Apesar dos pioneiros dessa teoria serem os hindus, posteriormente, os árabes deram continuidade aos estudos e criaram o conceito das funções trigonométricas: tangente, cotangente, cossecante e secante e estabeleceram conexões entre a trigonometria e a álgebra.

Em paralelo ao avanço do sistema de numeração hindu-arábico[48], os estudos da trigonometria também prosseguiam na Europa, e estudiosos como Georg Von Peurbach (1423 – 1461), Johannes Muller Von Konigsberg (1436 - 1476), NicolausCopernicus (1473-1543) e Rhaeticus[49] (1514 - 1576) deram grandes contribuições, pois aprimoraram as tábuas o que proporcionou a sua independência em relação à astronomia.

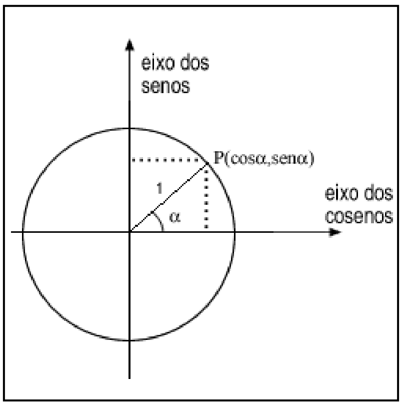
Porém, segundo Zuffi (2016), foi mesmo Euler, em seu trabalho *Introductio,* quem estabeleceu um tratamento estritamente analítico para as funções trigonométricas (expansão das mesmas em séries de potências), introduziu abreviações para estas funções que são

[48] Sistema de numeração usado por nós (0,1,2,3,4,5,6...).
[49] Nome original era Georg Joachim Von Lauchen.

próximas das que conhecemos hoje, intensificou o estudo das funções trigonométricas como funções circulares, pois seus comportamentos decorrem do que ocorre no círculo trigonométrico.

Assim, com Euler e a chamada “Função de Euler”, a qual será detalhada mais a frente, as funções trigonométricas passaram a ser funções de arcos e não funções de ângulos como antes se consideravam. De acordo com Boyer (1974), Euler fez uma transição da função, em que o seno deixa de ser um segmento de reta e passa a ser um número obtido pelo valor da coordenada y, de um ponto sobre uma circunferência trigonométrica de raio um (Figura 14).

Figura 14 – O seno na função de Euler



Fonte: RAMOS (2016)

A função de Euler possibilitou encontrar o sen(x) e o cos(x) em função de uma variável x, com $x \in R$. Foi o estudo dessa função que fez a trigonometria ter uma perspectiva analítica.

Segundo Costa (1997), foi Thomas-Fanten de Lagny o primeiro estudioso a evidenciar a peridiocidade das funções trigonométricas, em 1710. No entanto, ao analisarmos a história desse conceito, na escola pitagórica do século V a. C. já se estudava a acústica (som) por meio de intervalos musicais que relacionava os diapasões de notas emitidas por cordas distendidas, sob tensões iguais, aos comprimentos das cordas, sendo o estágio embrionário das funções trigonométricas.

Para compreender os elementos essenciais da função seno, na perspectiva de seu movimento lógico-histórico, estudada na educação básica, dividimos a abordagem em duas partes. Na primeira, desenvolvemos os conceitos preliminares da trigonometria, cujo domínio é o conjunto dos ângulos agudos, com foco na trigonometria no triângulo retângulo, e, em seguida as chamadas “Lei dos senos” e “Lei dos cossenos” que se aplicam a triângulos quaisquer, incluindo ângulos obtusos. Essa divisão foi feita amparada nos estudos de Lima *et al*(2001), o qual afirma que antes do estudo das funções trigonométricas, é importante que se faça uma apresentação elementar da Trigonometria propriamente dita, ou seja, senos, cossenos e tangentes dos ângulos de um triângulo, pois isso faz parte do movimento histórico do conceito, no qual a semelhança e a proporcionalidade são nexos conceituais importantes.

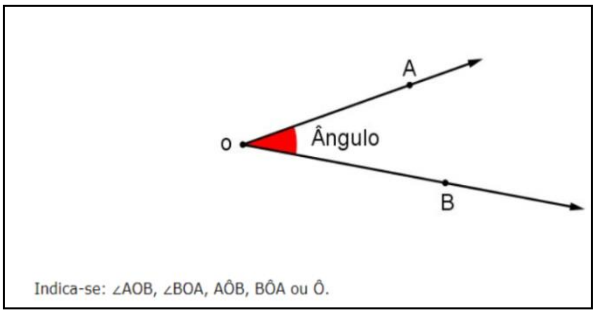
Na segunda parte, trazemos a trigonometria, cujo domínio é o conjunto dos números reais, tendo como suporte a função de Euler e o estudo do círculo trigonométrico.

4.2 A função seno no domínio dos ângulos planos

Ao iniciarmos o estudo da trigonometria, cujo domínio são os ângulos planos, é necessário entendermos o conceito de ângulos que, muitas vezes, não é devidamente explicado nos livros didáticos, conforme constatou Lima *et al*(2001).

Segundo Carmo, Morgado e Wagner (1992, p. 5), "o ângulo é a figura formada por duas semi-retas de mesma origem. As semi-retas são os lados do ângulo e a origem comum é o seu vértice". Na Figura 15, a origem seria o ponto O e os lados são as semirretas são $\underset{OB}{\rightarrow}$ e$\underset{OA}{\rightarrow}$.Para representar um ângulo, pode-se usar os pontos tendo o cuidado de colocar o ponto O (origem) no meio da representação, AÔB ou BÔA, porém é usual representar um ângulo usando letras do alfabeto grego como α, β, θ.

Figura 15 – O ângulo



Fonte: SILVA (2020)

O ângulo surgiu com a prática de medição dos antigos, quando mediam a altura de objetos ao colocarem uma vara em posição vertical em relação ao chão e comparavam as sombras projetadas, o que mais tarde tornou-se uma das ideias básicas da geometria apresentada por Euclides. Assim, o estudo de movimentos e sombras nas aulas de matemática pode contribuir no desenvolvimento desse conceito, por trazer o seu movimento lógico-histórico, nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

Para construção de ângulos, pode-se usar o transferidor e/ou régua e compasso, no entanto muitos alunos passam toda a Educação Básica sem nunca terem utilizado tais ferramentas, fato esse comprovado pelos estudos de Turra e Novaes (2013).

Em relação à unidade de medida, a primeira estudada nas escolas para medir ângulo é o grau, mas o que é o grau? Segundo Carmo; Morgado; Wagner (1992, p.5), "o grau é a fração de 1/360 do círculo", ou seja, ao dividirmos qualquer círculo em 360 partes iguais, cada uma dessas partes representa um ângulo cuja medida é um grau (1°). É importante entender que, independentemente, do tamanho da circunferência e do comprimento do seu raio, um grau (1°) como medida do ângulo central, tem sempre a mesma medida. Lima *et al* (2001, p.61) afirmam, "a mesma unidade de medida (por exemplo, um grau) é representada por arcos de tamanhos diferentes em circunferências de diferentes raios. Logo não estamos medindo arcos e sim os ângulos centrais por eles subtendidos".

A classificação dos ângulos pode ser feita de acordo com as suas medidas, o ângulo reto é o que mede 90°, ângulos agudos são os que têm medida inferior a 90°, e ângulos obtusos são os de medida maior que 90°.

4.2.1 A semelhança – um nexo conceitual da trigonometria dos ângulos planos

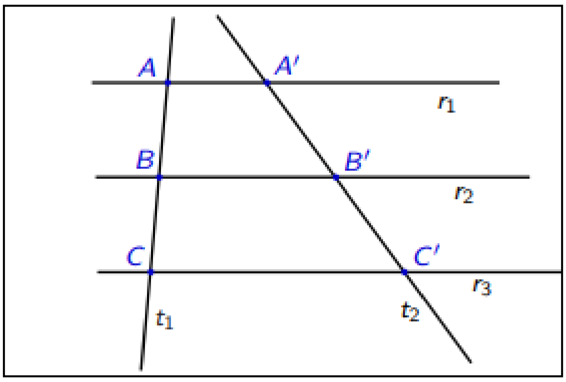
Para iniciarmos o estudo das funções trigonométricas dos ângulos agudos, é necessário abordar o Teorema de Tales, que trata de proporcionalidade entre segmentos. Tales de Mileto, eminente sábio da Grécia antiga, buscou sistematizar situações práticas já desenvolvidas pelos egípcios, como medir a altura das pirâmides de modo simples e prático, usando paralelismo e proporcionalidade. Segundo Mlodinow (2004, p.25),

> Tales buscou explicações teóricas para os fatos descobertos empiricamente pelos egípcios. Com tal compreensão, Tales foi capaz de deduzir técnicas geométricas, uma da outra, e de roubar a solução de um problema a partir de um outro, pois tinha *extraído o princípio abstrato da aplicação prática* particular. Ele deixou os egípcios impressionados quando lhes mostrou como eles poderiam medir a altura da pirâmide empregando um conhecimento das propriedades de triângulos semelhantes. [...] Ele se tornou uma celebridade no Egito antigo. (grifos nossos)

Essa consideração de Mlodinow (2004) nos mostra como os conceitos vão sendo construídos historicamente e se tornando mais complexos, a partir de abstrações e generalizações dos casos particulares, num processo de ascensão do abstrato ao concreto.

O Teorema de Tales afirma que, “se um feixe de retas paralelas[50] é interceptado por duas retas transversais[51], então os segmentos[52] determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais[53]” (BONGIOVANNI[54],2007, p. 94). Para melhor explicar tal teorema, apresentamos a figura 16, na qual as retas r_1, r_2 e r_3 são retas paralelas e t_1 e t_2 são retas transversais, que formam os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{AC}, e \overline{A'C'},$

Figura 16 - Teorema de Tales



Fonte: WAGNER (s/ data)

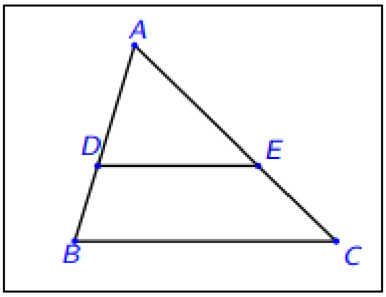
Pelo Teorema de Tales podemos afirmar que os segmentos formados são proporcionais, ou seja, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = k$, sendo k a constante de proporcionalidade[55].

O desenvolvimento dos estudos de Tales estreitou essa relação de semelhança e proporcionalidade nos triângulos ao dizer que, “toda paralela a um dos lados de um triângulo determina sobre os outros dois segmentos proporcionais”. A figura 17 representa essa relação com o Teorema de Tales e podemos concluir que, se DE é paralelo a BC, então:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ou $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}$

[50] Retas paralelas distintas são aquelas que mantêm sempre uma mesma distância entre eles, ou seja, quando o aluno inicia seus estudos em geometria ele “aprende” que retas paralelas são aquelas que não se cruzam.
[51] Retas transversais são retas que tem um único ponto em comum.
[52]Segmento é uma parte da reta que possui início e fim.
[53] Ser proporcional na matemática significa que a razão (divisão) entre os correspondentes valores de grandezas relacionadas é uma constante, e a esta constante dá-se o nome de constante de proporcionalidade.
[54] Autor de vários livros didáticos adotados nas escolas públicas do país, suas obras focam os nexos conceituais externos.
[55] É um número que representa o resultado de uma divisão que não sofre alteração independente da divisão.

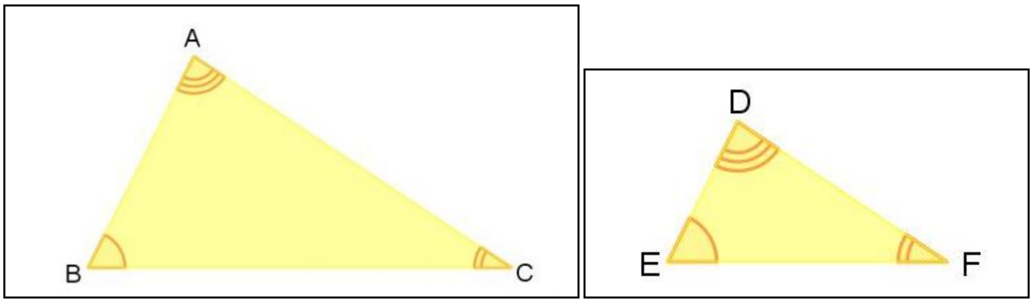
Figura 17 - O Teorema de Tales aplicado aos triângulos



Fonte: WAGNER (s/ data)

Em decorrência de tais conclusões, é possível tratar a semelhança de triângulos e dizemos que dois triângulos são semelhantes, se e somente se, os seus ângulos têm medidas iguais e os lados correspondentes são proporcionais. Para ilustrar, na Figura 18, os ângulos correspondentes têm medidas iguais(A=D, B=E e C=F[56]), assim podemos afirmar que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ = k. Para indicar essa semelhança usamos Δ ABC ~[57]ΔDEF.

Figura 18 - Triângulos semelhantes



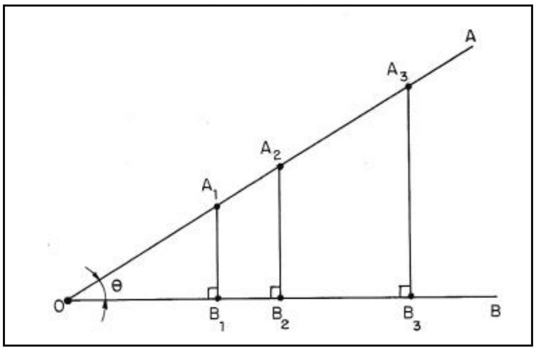
Fonte: SILVA (2020)

4.2.2 O seno, o cosseno e a tangente no triângulo retângulo

A partir da semelhança de triângulos, podemos tratar um caso específico que é o do triângulo retângulo[58]. Na figura 19, temos os triângulos A_1OB_1, A_2OB_2 e A_3OB_3, todos retângulos em B_1, B_2 e B_3, respectivamente. Como esses triângulos possuem em comum, além do ângulo reto, também o ângulo α, podemos afirmar que são semelhantes.

[56]A quantidade de linhas que estão inseridas nos ângulos indicam os iguais.
[57] O símbolo ~ na matemática indica semelhante.
[58] Triângulo que possui um ângulo reto.

Figura 19 - Razão de semelhança em triângulos



Fonte: Carmo; Morgado; Wagner (1992, p. 8)

A partir do estudo da semelhança desses triângulos, podemos identificar a razão de semelhança (k) entre seus lados como sendo um número K:

$$K = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3}$$

Uma observação fundamental nesse resultado é que, independentemente da medida dos lados dos triângulos, a razão de semelhança é sempre a mesma dependendo apenas da medida do ângulo θ (0° <θ< 90°). Essa razão de semelhança K ficou conhecida como seno (sen), ou seja,

$$\text{Sen } \theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3}.$$

Segundo Lima *et al* (2001, p.60), "o valor de seno é o mesmo, seja qual for esse triângulo retângulo". Consideramos que essa seja a essência do conceito de seno de um ângulo agudo.

Na continuidade do estudo dessas razões, da mesma forma realizada para a construção do seno, surgem o cosseno e a tangente.

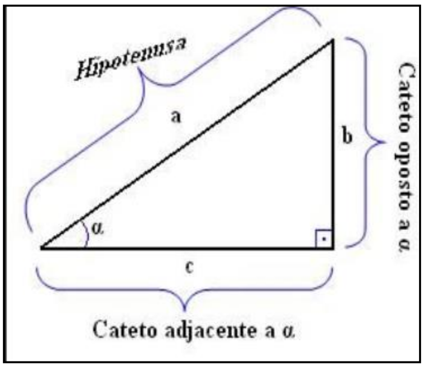
$K_1 = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3}$, definiu-se o cosseno (cos), ou seja,

$$\cos \theta = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3}.$$

De forma análoga desenvolve-se que $k_2 = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}$, a tangente (tg), $tg\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}$.

Considerando os nomes dados aos lados de um triângulo retângulo, hipotenusa (maior lado) e catetos (os outros dois), essas relações podem ser escritas, com base na Figura 20:

Figura 20 – Hipotenusa e catetos



Fonte: Faria (2009)

senα $=\frac{catetooosto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$

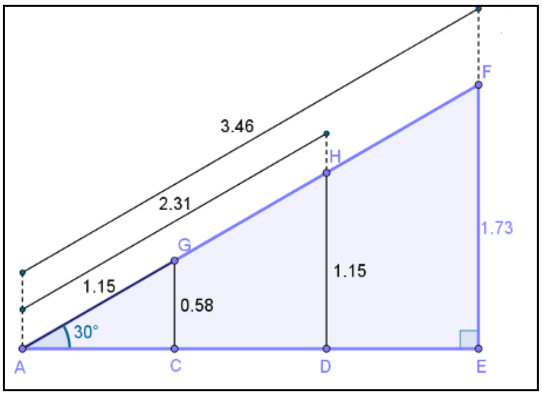
cos α $= \frac{catetoadjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$

tgα $= \frac{catetooposto}{catetoadjacente} = \frac{b}{c}$

Para exemplificar esses conceitos, apresentamos a figura 21. Nela podemos verificar o seno do ângulo de 30°, como sendo:

sen 30° $= \frac{0,58}{1,15} = \frac{1.15}{2,31} = \frac{1,73}{3,46} = \frac{1}{2}$ (constante de proporcionalidade)

Figura 21 - Razões trigonométricas de um ângulo cuja medida é 30º



Fonte: SILVA (2020)

Observa-se que, independentemente, do tamanho do triângulo, a razão de semelhança é sempre a mesma (1/2).Vale entender que, na prática do estudo do triângulo retângulo, ao dizer que o sen 30° = ½, significa afirmar que, em um triângulo retângulo, se um ângulo agudo é o dobro do outro, a hipotenusa é o dobro do menor cateto, fato esse destacado por Lima *et al*(2001) e omitido em quase todos os livros didáticos.

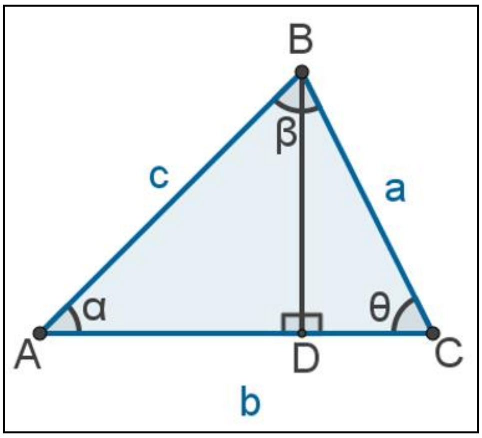
4.2.3 A Lei dos senos e a Lei dos cossenos em um triângulo qualquer

No estudo de triângulos, que não possuem um ângulo reto, conhecidos como triângulos quaisquer, outras relações podem ser estabelecidas, tendo como base a definição de seno no triângulo retângulo. Uma delas é a Lei dos Senos, que é uma relação matemática de proporção sobre as medidas de triângulos, desenvolvida para encontrar suas alturas. Segundo Lima *et al*(2001), é importante entender que a principal aplicação da lei dos senos é a determinação dos seis elementos de um triângulo (3 lados e 3 ângulos), conhecendo-se três deles, sendo, pelo menos, um lado.

Segundo a lei dos senos relacionada ao círculo, “as medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo”(IEZZI, 2001, p. 34). Em outras palavras, os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Para a sua demonstração considere o triângulo abaixo a figura 22:

Figura 22 - Demonstração da Lei dos senos



Fonte: SILVA (2020)

Nesse triângulo, a medida do lado AC é *b*, a medida do lado AB é *c*, a medida do lado BC é *a* e BD é a altura do triângulo relativa ao lado AC o qual divide o lado AC em duas partes (AD e DC). Podemos afirmar que os triângulos ABD e BDC são retângulos em D.

Ao recorrermos ao estudo das razões trigonométricas que acabamos de apresentar podemos verificar que:

senα = $\frac{BD}{c}$ $\rightarrow$ sen α .c = BD

sen θ = $\frac{BD}{a}$ $\rightarrow$ sen θ .a = BD

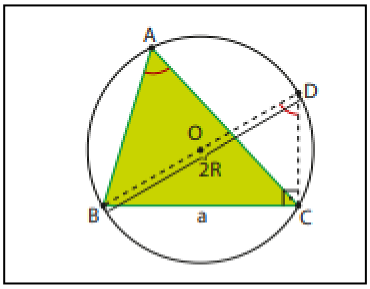
Assim:

senα .c = senθ .a

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\theta}$$ (Lei dos senos)[59]

É possível demonstrar a lei dos senos, relacionando-a com o círculo e o seu raio. Assim, pode ser enunciada do seguinte modo: Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Para isso, observe o triângulo ABC inscrito na circunferência de centro O e raio R. Ao traçar o diâmetro BD, os ângulos A e D ficam com a mesma medida por possuírem vértices sendo pontos da circunferência e lados secantes a ela, ou seja, são congruentes por determinarem o mesmo arco sobre a circunferência, daí temos dois triângulos, ABC e BDC (retângulo em C por estar inscrito em uma semi-circunferência).

Figura 23 - Demonstração da lei dos senos relacionada ao círculo



Fonte: Iezzi (2001)

Assim, ao calcularmos o sen D = $\frac{BC}{BD}$ = $\rightarrow$ sen D = $\frac{a}{2R}$ $\rightarrow$ 2r = $\frac{a}{senD}$

Outra lei usada para o estudo de triângulos quaisquer é a Lei dos cossenos, segundo a qual em todo triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das

[59] Fazendo a construção da altura relativa a outro lado do triângulo e, fazendo um raciocínio análogo ao realizado, obtém-se a outra fração relacionando o lado b ao sen β.

medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto dessas medidas vezes o cosseno do ângulo formado entre eles. A lei dos cossenos permite descobrir a medida de um dos lados de um triângulo, conhecendo-se as medidas dos outros e do ângulo oposto a esse lado.

Para a sua demonstração retomaremos ao triângulo da Figura 22.

No triângulo retângulo ABD, temos o seguinte:

$\cos\alpha = \frac{AD}{c} \rightarrow AD = c \cdot \cos\alpha$

Ao analisarmos a medida da base do triângulo observamos que b= AD + CD, assim CD = b – AD, substituindo na equação anterior, obtemos:

$CD = b - c \cdot \cos(A)$

Com base nos itens anteriores, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no Δ ABD:

$c^2 = BD^2 + AD^2$ ou $BD^2 = c^2 - AD^2$

E também no triângulo BCD,

$a^2 = BD^2 + CD2$ ou $BD^2 = a^2 - CD^2$.

Substituindo: $CD = b - c \cdot \cos\alpha$ em $a^2 - CD^2$, temos: $a^2 - (b - c \cdot \cos\alpha)^2$.

Substituindo: $AD = c \cdot \cos\alpha$ em $c^2 - AD^2$ temos: $c^2 - (c \cdot \cos\alpha)^2$.

Resolvendo, temos:

$a^2 - (b - c \cdot \cos\alpha)^2 = c^2 - (c \cdot \cos\alpha)^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha - c^2 \cdot \cos^2\alpha = c^2 - c^2 \cdot \cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad \text{(Lei dos cossenos)}$$

Analogamente, é possível encontrar para a altura do triângulo em relação aos outros lados:

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\theta$

Como afirmado por Lima *et al* (2001), as leis de senos e cossenos têm muitas aplicações nos problemas práticos do cotidiano e deveriam ser, nos livros didáticos, melhores desenvolvidas.

Concluindo essa parte da função seno no domínio dos ângulos planos, podemos afirmar que a semelhança de triângulos e o conceito de proporcionalidade estão na essência da trigonometria do triângulo e representam os nexos internos na formação desse conceito, assim como o de interdependência entre ângulos e lados. Destacamos que podemos falar de uma função seno cujo domínio é um conjunto A constituído de todos os ângulos do plano, menores ou iguais a dois ângulos retos e a imagem um número real, a razão constante entre cateto oposto e a hipotenusa, que é o seno do ângulo dado.

A seguir, tratamos a função seno, cujo domínio é o conjunto dos números reais.

4.3 A função seno no conjunto dos números reais

Para entendermos como aconteceu a transição das razões trigonométricas, especificamente do seno, do conjunto dos ângulos planos para o conjunto dos números reais, é fundamental compreendermos o círculo trigonométricos de raio 1 adotado por Euler e a sua função, dita *Função de Euler*. Para isso, iniciaremos abordando o conceito de arco e ângulo.

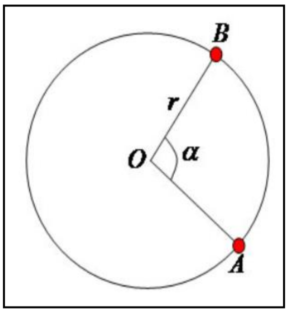
Segundo Lima *et al* (2001), alguns autores dos livros didáticos adotados pelas escolas brasileiras mencionam as palavras arco e ângulo sem qualquer distinção, o que é um equívoco e uma confusão para o entendimento do aluno e ainda mais grave é que, de acordo com esses mesmos autores, em muitas situações "não é dita uma palavra sequer sobre o significado do comprimento de um arco" (p. 283).

4.3.1 Ângulos e arcos: o radiano

O arco de uma circunferência é um trecho formado pelo comprimento entre dois pontos, na figura abaixo seria entre os pontos A e B, ou seja, a circunferência está dividida nesse caso em dois arcos, AB e BA.

A todo arco corresponde um ângulo central. Na Figura 24, ao arco AB corresponde o ângulo central α, que é a medida angular do arco, essa medida não depende da medida do raio.

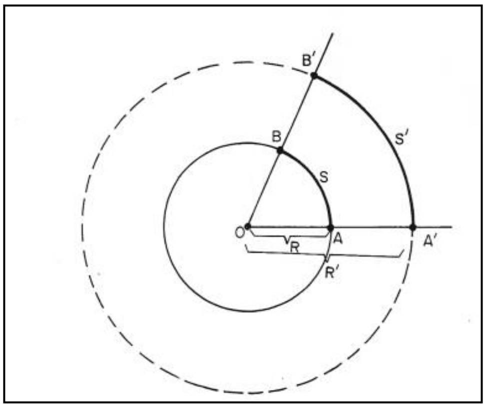
Figura 24 - Medida angular do arco



Fonte: SILVA (2020)

O comprimento do arco é a distância linear entre os pontos AB. Em muitos livros didáticos, encontramos a explicação, segundo a qual, para medir o comprimento de um arco, basta usar uma linha entre os dois pontos, apoiando-se nos pontos da circunferência, e depois esticar essa linha e medi-la como se mede um segmento. Teríamos, assim, a medida do comprimento de um arco, porém essa não é uma definição clara para que o aluno possa compreender a essência desse conceito, pois, para isso, é importante o aluno entender que essa medida de comprimento do arco depende do raio da circunferência. Assim, arcos de círculos, que possuem o mesmo ângulo central, são semelhantes, e a razão de semelhança é a razão entre os raios. Para ilustrar melhor essa definição observamos a figura 25.

Figura 25 - Razão de semelhança entre arcos da circunferência



Fonte: Carmo; Morgado; Wagner (1992)

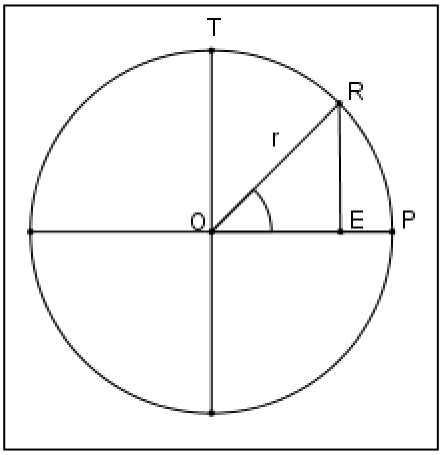
Nela verificamos que *s* é a representação do comprimento do arco AB e R o raio da circunferência menor, *s'* é o comprimento do arco A'B' e R' o raio da circunferência maior, ambos os arcos possuem o mesmo ângulo central que é AÔB. Assim, podemos afirmar que os arcos AB e A'B' são semelhantes e a razão de semelhança é R/R'.

Em outras palavras, ao usar a teoria da semelhança entre as circunferências Carmo; Morgado; Wagner (1992, p.24) afirmam que, "é constante a razão entre o comprimento do arco determinado e o raio", ou seja, $\frac{s'}{R'} = \frac{s}{R} = k$. A ideia de semelhança e de proporcionalidade estão presentes neste contexto.

A partir dessa relação, desenvolveu-se toda explicação de radiano. No entanto, nos livros didáticos essa teoria é limitada a dizer que o radiano é o ângulo cujo comprimento coincide com o raio e não explicam a relação com o raio como o próprio nome já prediz. De acordo com Lima *et al* (2001, p.19), "o radiano é mal explicado em quase todos os nossos livros didáticos, por isso vale a pena recordar seu significado".

O radiano surgiu da necessidade de padronizar as unidades de medidas de arcos e da corda (meia corda), para isso adotou-se o raio como unidade de medida, daí o nome *radiano* refere-se a raio. Na Figura 26, a meia corda é RE, RP o arco e o raio r = 1. Essa padronização permitiu relacionar a trigonometria, cujo domínio são os ângulos agudos, ou seja, a trigonometria dos triângulos, com a trigonometria dos arcos na circunferência trigonométrica.

Figura 26 - O estudo da meia corda



Fonte: Silva (2020)

Para compreendermos melhor a definição do radiano, remetemos novamente a Carmo; Morgado; Wagner (1992, p.24) que afirmam, “a medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo”. Para isso, analisamos a figura 25 e podemos entender que, se a medida do ângulo AÔB = $\frac{s}{R}$ radianos, então a medida do ângulo AÔB = $\frac{s'}{R'}$ radianos. Assim, quando o raio é igual a 1 podemos concluir que a medida de AÔB = s e que a medida de AÔB = s’, ou seja, a medida do ângulo coincide com a medida do arco, nas palavras de Lima *et al* (2001, p. 358-359)

> [...] em duas circunferências de mesmo centro os arcos subtendidos pelo mesmo ângulo central são proporcionais aos raios. Isto resulta da semelhança entre as circunferências e é o que assegura que dois arcos com a mesma medida em radianos são subtendidos por ângulos centrais iguais. Um grave omissão é a fórmula (comprimento do arco)/(raio) que dá a medida de um arco em radianos.

A importância desse entendimento para o estudo do radiano é mais uma vez apresentada por esses mesmos autores, ao afirmarem que,

> Numa circunferência de raio r, o comprimento l do arco subtendido pelo ângulo central α é diretamente proporcional a r e à medida do ângulo α. Indicando, como de hábito, pelo mesmo símbolo α o ângulo central e sua medida, e admitindo que o raio e o arco são medidos com a mesma unidade, temos então l = c. α.r, onde a constante de proporcionalidade c depende da unidade escolhida para medir os ângulos. ... Quando o ângulo α é medido em radianos, a fórmula acima se reduz a l = α.r, logo α =l/r. Portanto, a medida de um ângulo em radianos é a razão entre o arco que ele subtende na circunferência que tem centro no seu vértice e o raio da circunferência. (LIMA *et al.*,2001, p. 19)

Como afirmamos anteriormente, muitos autores nos livros didáticos mencionam as palavras arco e ângulo sem qualquer distinção, isto é, sem deixar claro que a unidade *radiano* pode expressar uma medida linear (comprimento do arco subentendido pelo ângulo) ou uma medida angular. Acrescenta Lima *et al* (2001, p. 145) em relação ao tratamento dado a essa questão nos livros didáticos, "não deixa clara a diferença entre medir o comprimento da curva constituída por um arco (que pode ser toda a circunferência) ou medir o ângulo central definido por um arco de circunferência, para o que se utilizam ou graus ou radianos".

Ao medirmos o comprimento do círculo completo (360°) cujo raio mede 1, verificamos que esse comprimento é 2π[60], ou seja, aproximadamente 6,28, e, consequentemente, para o semicírculo (180°) o comprimento é π (aproximadamente 3,14). Por isso que, nos livros didáticos, encontramos que, para converter as unidades de graus para radianos ou de radianos para graus, adota-se π rad = 180°, porém, em grande parte das obras analisadas por Lima *et al*. (2001), essa explicação não fica clara para o aluno e, às vezes, também, para muitos professores, pois dessa forma levam muitos a acreditarem que a medida de um ângulo em radiano tem que vir acompanhada do π, o que não é verdade.

Como exemplo encontrado nos livros didáticos temos, converta para radianos 30°, usa-se a regra de três:

180° - π rad

30° - x

$x = \frac{30\pi rad}{180} = \frac{\pi rad}{6}$

Tal conversão está correta, no entanto, fica parecendo que toda medida em radianos tem que ser um múltiplo de π. Algumas indagações que podem aparecer por alunos mais

[60] O π é a razão entre o comprimento de qualquer círculo e seu diâmetro e ele vale aproximadamente 3,14159...

observadores como: quantos graus tem 1 radiano? Se o aluno compreende o que é radiano a explicação de quantos graus existe em 1 radiano passa a ser mais fácil e clara, pois basta efetuar a divisão de 180°/π ou 180°/3,14 que é aproximadamente 57,29°.

Assim, para medir o comprimento total da circunferência (360°), a fórmula usada é 2πR, e, para medir os comprimentos dos arcos, aplica-se a regra de três, relacionando com os seus ângulos. No entanto, Carmo; Morgado; Wagner(1992, p. 23) afirmam que a definição de comprimento para o círculo em particular é "o número real cujas aproximações por falta são os perímetros dos polígonos convexos nele inscritos", uma demonstração consistente para tal medição, mas que não detalharemos nesse estudo.

A apropriação dessa relação entre arcos e ângulos é fundamental para tratar as funções trigonométricas no círculo ou circunferência trigonométrica orientada. Adotaremos nesse estudo tais termos apesar de, em muitos livros didáticos, aparecer "ciclo trigonométrico", expressão criticada por Lima *et al.* (2001), que afirmam não corresponder à linguagem comum dos matemáticos, mas que foi adotada por muitos autores brasileiros de maneira equivocada.

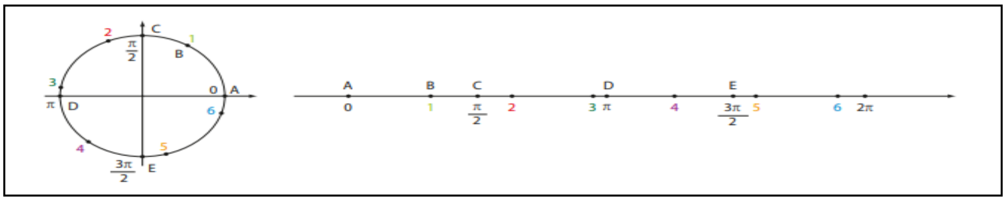
4.3.2 A função de Euler e a definição de seno e de cosseno

Ao se considerar que o domínio das funções trigonométricas na circunferência trigonométrica é o conjunto dos números reais, significa associar pontos da circunferência trigonométrica a pontos da reta numérica, de modo que quando x=0 o ponto P coincide com o ponto A(1,0). Se x> 0, descreve-se, a partir de A, no sentido anti-horário, um arco de comprimento x, cuja extremidade final é P. Segundo Lima *et al.* (2001, p.390), "seria uma correspondência bijetora entre pontos da reta e os números reais. A partir daí, de maneira gradual e intuitiva, chega-se à circunferência trigonométrica e aos arcos côngruos".

Essa ideia, de acordo com a função de Euler, consiste em definir, inicialmente, a função E: IR → C, sendo que $C = \{(x,y) \in R / x^2 + y^2 = 1\}$, isto é, a função que faz corresponder a cada número real *x*, um ponto de uma circunferência de raio unitário e com centro na origem do sistema cartesiano, E(t). Lima *et al.* (1996, p. 214) afirmam que esse processo pode ser pensado como "um processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel), de modo que o ponto 0 ∈

IR caia sobre o ponto (1,0)∈C". É uma metáfora que traduz os nexos conceituais internos da função, o movimento e a interdependência.

Figura 27 – A funçao de Euler: relação entre os numeros da reta real e a circunferência

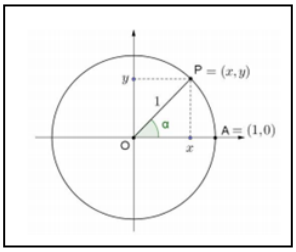


Fonte: Iezzi (2016, p. 14)

Cada vez que o ponto percorre um intervalo na reta de comprimento *x*, percorrerá sobre a circunferência C, um arco de comprimento *x*, obtendo-se a imagem, E(t), que é um ponto P dado pelas coordenadas (x, y) (Figura 28).

Como o comprimento da circunferência é 2π, quando $t = 2\pi$, percorre-se uma volta completa. A partir daí, para $t + 2\pi$, tem-se que E $(t + 2\pi) = E(t)$ e, de modo mais geral, para $t \in$ IR, tem-se E $(t + 2k\pi) = E(t)$, com $k \in Z$ e representando o número de voltas. Se $t < 0$, percorre-se a circunferência no sentido oposto, isto é, horário, portanto é uma forma de medida orientada.

Figura 28 – Função de Euler



Fonte: LIMA et al (2001)

Estabelecida a função de Euler, E: IR → C, podemos definir que o senα é a ordenada do ponto P = E(t) e o cosα é a abscissa de P, sendo α o ângulo que corresponde ao número t. Assim, podemos escrever:

$x = \cos\alpha$

$y = \operatorname{sen}\alpha$

$$\boxed{P\ (\cos\alpha,\ \operatorname{sen}\alpha)}$$

Nas palavras de Lima *et al*(2001, p. 60), temos,

> A fim de dar significado à expressão sen x quando x é um número real qualquer, é necessário associar a cada x ϵ R um ângulo, de modo que sen x seja o seno daquele ângulo. A maneira mais conveniente de fazer isso é considerar a função de Euler E:R → C, cujo contradomínio é a circunferência C de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano. Para cada x ϵ R, o ângulo que corresponde ao número x é o ângulo do semi-eixo positivo das abscissas com a semi-reta que vai da origem ao ponto E(x) ϵ C. Então sen x é a ordenada e cos x é a abscissa do ponto E(x). Noutras palavras, tem-se E(x) = (cosx, senx).

Ao analisarmos a circunferência de raio 1 e o plano cartesiano XY, verificamos que as coordenados de todo ponto em C pertencem ao intervalo [-1,1], então podemos afirmar que $-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$ e também o $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Percebemos, assim, que a função de Euler descrita, anteriormente, é uma relação que é essencial para a definição da função seno e da função cosseno, pois estabelece o seu campo de variação, o conjunto dos números reais.

4.3.3 Nexos conceituais da função seno na circunferência

Para compreender a função seno no seu movimento lógico-histórico, necessitamos aprofundar nos seus nexos conceituais internos e externos. Em se tratando de uma função, estão presentes os nexos internos de qualquer função: a fluência, o movimento, que, no caso da função seno, tem a marca da periodicidade, da continuidade, dado que é definida para qualquer número real; a interdependência entre arcos entre e números reais, e, na sequência, entre esses e a coordenada y de um ponto da circunferência; as simetrias decorrentes da posição dos pontos em relação aos eixos coordenados ou em relação ao centro. Esses são os nexos conceituais que identificamos e exploramos nas situações de estudo.

A periodicidade é um nexo importante e que caracteriza fenômenos naturais que podem ser modelados pela função seno ou por funções obtidas a partir de algumas transformações da função inicial.

Na realidade, lidamos com vários fenômenos periódicos, ou seja, fenômenos que se repetem em um determinado intervalo de tempo, como por exemplo, os dias da semana, os batimentos cardíacos e o movimento das marés. O período é o menor intervalo de tempo em que acontece a repetição desses fenômenos, por exemplo, os dias da semana tem período de 7 dias.

Esse nexo distingue as funções trigonométricas de outros tipos de funções, embora não sejam as únicas funções periódicas. O fato de ser periódica permitiu modelar muitas situações da realidade, pois essas funções foram capazes de descrever fenômenos dos tipos periódicos, vibratórios e oscilatórios. Marques (s/data) apresenta alguns exemplos de aplicações desses fenômenos presentes em nossa vida. Movimento harmônico simples, no estudo das ondas harmônicas, nele destacando o entendimento dos sons produzidos pelos instrumentos musicais, e no entendimento de alguns circuitos de corrente alternada. No movimento oscilatório mais simples (o movimento harmônico simples), o móvel executará um movimento que é inteiramente descrito (posição, velocidade e aceleração) por meio de funções trigonométricas. No caso do movimento ondulatório, consideramos o caso das ondas harmônicas, as quais se propagam de acordo com uma função trigonométrica. A natureza e as características dos sons dos instrumentos musicais podem ser entendidas a partir do conceito de ondas estacionárias.

No processo ensino-aprendizagem de matemática é importante apresentar exemplos desses fenômenos no desenvolvimento das funções trigonométricas, pois aproximará o aluno ao conteúdo.

Mas porque o seno é uma função periódica? É uma função que apresenta uma repetição ao longo de seu domínio e é uma consequência da *função de Euler*[61] apresentada anteriormente. Segundo Carmo; Morgado; Wagner (1992, p. 28), "se conhecemos o comportamento destas funções no intervalo [O, 2π], passamos a conhecer imediatamente como estas funções se comportam em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π".

A definição de função periódica é exposta por IEZZI (2001, p.49), ao dizer que "Uma função f: $A \rightarrow B$ é periódica se existir um número real positivo *p* tal que $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in A$. O menor valor positivo de p é chamado de período de f".

A função seno no conjunto dos números reais é uma função trigonométrica oriunda da função de Euler, sendo então uma função periódica, em que sen: $R \rightarrow R$, ou seja, para qualquer valor $t \in R$ existe um número real P (x, y), sua imagem na circunferência trigonométrica, tal que sen(t) = y.

Como pela função de Euler, $E(t + 2k\pi) = E(t)$, com $k \in Z$, pode se afirmar que o ponto

P(x,y) sobre a circunferência é imagem de *t* e de $t + 2k\pi$, logo sent (t) = sen (t +2kπ), ou seja, a função seno é periódica e o seu período é 2π.

Na circunferência trigonométrica existem três tipos de simetrias: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro (encontro dos eixos). Essas

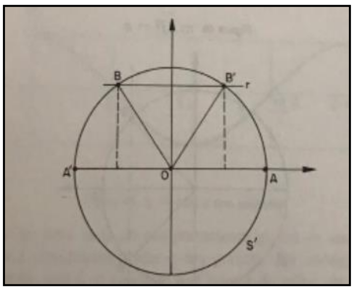
[61]Entender a função de Euler é indispensável para o estudo das funções trigonométricas.

simetrias podem ser utilizadas para obtenção do sen*x*, quando o ponto B, extremidade do arco de medida x, não está no primeiro quadrante, a partir do seno de arcos correspondentes no primeiro quadrante. A este processo se dá o nome de “redução do seno ao primeiro quadrante”.

I) se x está no segundo quadrante, $\pi/2 < x < \pi$.

Segundo Carmo; Morgado; Wagner (1992, p. 29), traçamos por B uma reta r paralela ao eixo das abscissas que intercepta novamente S1 em B’ (Figura 29). É claro que a medida do arco AB’ é igual à medida do arco BA’, cuja medida é igual a $\pi - x$. Assim, senx = sen ($\pi - x$).

Figura 29 – Redução do 2º para o 1º quadrante

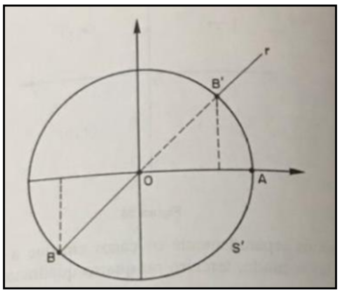


Fonte: CARMO; MORGADO; WAGNER (1992, p. 29)

II) se x está no terceiro quadrante, $\pi < x < 3/2\pi$

Ainda segundo Carmo, Morgado, Wagner (1992, p. 30), tomando como r a reta que liga O a B (Figura 30), obteremos senx = -sen ($x - \pi$)

Figura 30 -Redução do 3º para o 1º quadrante

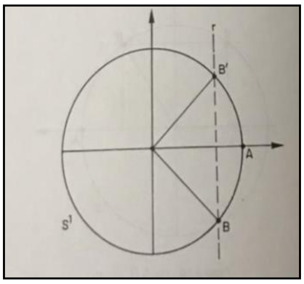


Fonte: CARMO; MORGADO; WAGNER (1992, p. 30)

III) se x está no quarto quadrante, $3/2\pi < x < 2\pi$

Para os mesmos autores (p.30), tomando como r uma paralela ao eixo das ordenadas passando por B, obteremos a medida de AB’ igual a $2\pi - x$ e sen x= -sen ($2\pi - x$) (Figura 31).

Figura 31 -Redução do 4º para o 1º quadrante



Fonte: CARMO; MORGADO; WAGNER (1992, p. 29)

Além da representação algébrica, um nexo externo das funções trigonométricas, existem duas outras representações, especificamente aqui, da função seno, a representação numérica e a geométrica (gráficos).

f) A representação numérica refere-se aos valores dos pares ordenados (x,y).Por exemplo, dada a função f(x) = sen x, com $0 \leq x \leq 2\pi$.

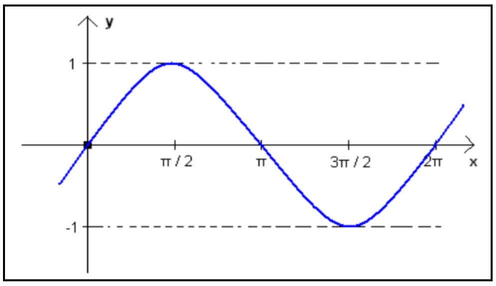
Figura 32 - Representação numérica da função seno para alguns valores de x

x	**y** = sen x
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0

Fonte: Elaborada pela autora

A representação geométrica refere-se aos gráficos construídos no plano cartesiano XY. No caso da função seno, recebe o nome de *senoide*.

Figura 33 - Senoide no intervalo [0, 2π]



Fonte: ALMEIDA (2011)

Como o domínio da função seno é o conjunto dos números reais e, considerando o fato de ser periódica e de ser contínua, isto é, de existir para qualquer x ϵ IR, um valor para o seno, é possível prolongar esse gráfico tanto para a direita, o sentido de crescimento de x, quanto para a esquerda, o sentido decrescente de x.

4.4 A função seno nos livros didáticos adotados pela escola campo da pesquisa de 2010 a 2020

Com objetivo de compreender como a função seno está apresentada nos livros didáticos adotados pela escola campo da pesquisa nos últimos 10 anos, fizemos um levantamento das obras e suas respectivas análises o qual será apresentado a seguir. Vale lembrar que o livro didático, na maioria das escolas da rede pública de ensino, é a única ferramenta usada pelo professor em sala de aula, conforme afirmam Lima *et al*(2001, p. 1),

> O livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe. Assim, é necessário que esse livro seja não apenas acessível e atraente para o aluno, como também que ele constitua uma base amiga e confiável para o professor, induzindo-o a praticar os bons hábitos de clareza, objetividade e precisão, além de ilustrar, sempre que possível, as relações entre a Matemática e a sociedade atual.

A cada três anos, as escolas da rede pública de ensino são solicitadas a renovar os livros didáticos adotados em todas as áreas do conhecimento, os quais têm a função de complementar os estudos dos alunos e contribuir com a prática pedagógica do professor. Esse processo faz parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD[62]).

Assim, são enviados por diferentes editoras, exemplares para que os professores, de modo conjunto, possam analisá-los e escolher o material que mais se adéqua à sua realidade escolar. Isso é o que acontece, de fato, na escola deste estudo.

Para essa seleção, segundo a supervisora da escola, são adotados alguns critérios como: coerência com o PPP, linguagem adotada pelos autores deve ser compreensível pelos alunos e a quantidade e nível dos exercícios propostos também são analisados. Após as discussões e o acordo em relação ao melhor livro seguindo tais critérios, é preenchido um

[62]O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

formulário, contendo as características e dados gerais da obra, que é encaminhado à Secretaria Estadual de Educação - SEE/MG.

Para o levantamento dos livros didáticos adotados pela escola nos últimos anos, solicitamos junto à supervisão pedagógica, o planejamento escolar anual elaborado pelos professores e, a partir deles, elaboramos a Figura 34.

Figura 34 - Levantamento dos livros didáticos adotados pela escola de 2006 a 2020

Nome da obra	Autores	Cidade de publicação	Editora	Ano de publicação	Período adotado
Matemática	Eduardo Chavantee Diego Prestes	São Paulo	SM	2016	2018 a 2020
Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo (org.)	São Paulo	Moderna	2013	2015 a 2017
Matemática aula por aula	Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva	São Paulo	FTD	2000	2006 a 2014

Fonte: Elaborado pela autora

Os dois últimos livros adotados pela escola, “Matemática” e “Conexões com a Matemática” são organizados em 3 volumes, um para cada série do Ensino Médio: 1º, 2º e 3º anos. Já a obra “Matemática aula por aula” é volume único, foi publicado no ano 2000, chegou à escola em 2005 e começou a ser usado em 2006, sendo adotado por 9 anos, pois naquela época não tinha a exigência de renovação de 3 em 3 anos. Como a proposta é analisar os livros adotados nos últimos dez anos, debruçamo-nos sobre tais obras.

Existem vantagens e desvantagens na escolha de um livro volume único. As vantagens estão relacionadas à visão que o professor tem do conjunto da obra, sendo capaz, quando preciso, de recorrer a conteúdos anteriores de maneira mais rápida e precisa. Outra vantagem está relacionada à disponibilização ao aluno, a entrega é feita uma única vez no início do 1º ano e só é recolhido no final do 3º ano, evitando transtornos nas bibliotecas. Outra vantagem é o preço, porque, normalmente, são mais baratos. Já as desvantagens do volume único são relacionadas à abordagem dos conteúdos, que é, consideravelmente, mais resumida.

A análise dessas obras será fundamental para a construção do experimento didático-formativo, pois, como o livro didático acaba sendo a referência para as aulas dos professores, conseguiremos identificar as possíveis lacunas existentes para a formação do pensamento teórico do aluno frente ao estudo da função seno. Os critérios usados nessa análise estão relacionados aos nexos conceituais da função seno, ou seja, a semelhança, a proporcionalidade, as simetrias e a periodicidade, bem como ao movimento lógico-histórico da formação dos conceitos presentes nessas obras. Desta forma, apresentaremos a seguir uma análise da função seno nesses livros iniciando pelo mais antigo.

4.4.1 "Matemática aula por aula" de Benigno Barreto Filho e Claudio Xavier da Silva

É um livro volume único, no qual os conteúdos estão organizados em capítulos: Conjuntos, Funções, Função polinomial do 1º grau, Função polinomial do 2º grau, Função exponencial, Função logarítmica, Função modular, **Trigonometria**, Progressões, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares, Análise combinatória/Binômio de Newton, Probabilidade, Geometria espacial, Geometria analítica, Números Complexos, Polinômios, Estatística e Matemática financeira.

De acordo com a apresentação da obra, cada capítulo é constituído pelo "desenvolvimento teórico", com uma linguagem simples e objetiva para o aluno, "exercícios resolvidos", que favorecem o esclarecimento de dúvidas, "exercícios propostos", que dão a oportunidade de fixar o conteúdo, "ficha resumo", destacando as principais conclusões, "exercícios complementares", para rever todo o conteúdo e "saiba um pouco mais", em que trazem artigos que relacionam o conteúdo com a vida.

O capítulo destinado à Trigonometria começa com o seu estudo no triângulo retângulo, algo positivo, de acordo com Lima *et al.*(2001), abordando as razões trigonométricas, os ângulos notáveis e o cálculo do seno, cosseno e tangente. Porém, não se relacionam essas razões com a semelhança de triângulos e nem com o Teorema de Tales, não mostra que o seno de um ângulo é o mesmo independente das medidas dos lados desse triângulo, o que, para nós, é um nexo conceitual importante. É apresentada a fórmula do Teorema de Pitágoras sem nenhuma demonstração. Em seguida expõe-se sobre a Trigonometria no círculo, explicam-se as unidades (grau, grado e radiano) e as fórmulas para a sua conversão, porém não menciona a *função de Euler* para relacionar a circunferência e a reta real, o que permite ampliar o campo de variação das funções trigonométricas.

Na parte destinada às Funções Trigonométricas, inicia-se com o estudo do ciclo trigonométrico, expressão criticada por Lima *et al.* (2001); explica-se a divisão dos quadrantes, o sentido positivo e negativo dos arcos de maneira totalmente técnica. Na parte do conteúdo "arcos côngruos", introduz-se a técnica da divisão por 360º para identificar a quantidade de voltas dadas na circunferência e encontrar o arco côngruo, mas não explica a relação da reta numérica com a circunferência para falar desses arcos côngruos. A partir daí inicia-se a apresentação da função seno.

É apresentada em apenas uma página, explica-se o seno como medida encontrada no eixo y associado à circunferência, em momento nenhum traz o movimento histórico do conceito. A seguir, é tratado o estudo dos sinais do seno de acordo com os quadrantes, bem como o seno dos arcos notáveis (0º, 90º, 180º, 270º e 360º) e, para finalizar, o gráfico da função seno (y=sen x), construído através da tabela dos ângulos notáveis e conclui-se, com a explicação do domínio, da imagem e do período em poucas linhas. No entanto, não mostra as transformações que podem ocorrer no gráfico da função seno pela manipulação dos parâmetros, sequer cita essas transformações. No fechamento desta parte das funções trigonométricas, estão as funções cosseno, tangente, secante e cossecante, explicadas do mesmo modo que o descrito para a função seno. Podemos afirmar que prepondera o "Paradigma do exercício", caraterizado por Skovsmose (2000) como um ambiente de aprendizagem fundamentado na "tradição" da educação matemática, na qual o livro didático direciona a prática de sala de aula, os exercícios são formulados por alguém que está fora do ambiente da sala de aula, geralmente têm respostas únicas.

Para finalizar o capítulo, os autores trazem as relações trigonométricas, a redução ao 1º quadrante, as operações com arcos e transformação em produto, as equações e inequações trigonométricas e o estudo de triângulos quaisquer com apenas as fórmulas, sem nenhuma explicação e relação com a semelhança de triângulos. Essa presença maciça de fórmulas, nesta parte, significa focar em aspectos externos de conceitos e relações, portanto valorizado o desenvolvimento do pensamento empírico.

A "ficha resumo" desse capítulo é uma lista com todas as fórmulas e o "saiba um pouco mais" é um artigo com o nome "O lugar da Terra" que fala, em poucas linhas, do estudo de Aristaco sobre as distâncias entre a Terra, a Lua e o Sol, usando para isso o sen x.

De maneira geral, a trigonometria nessa obra não apresenta os nexos conceituais (semelhança, proporcionalidade, simetrias, periodicidade) na condução da formação de conceitos e os exercícios não enfatizam os nexos conceituais da função seno. As explicações dos conceitos acontecem de forma técnica e os exercícios são resolvidos apenas manipulando fórmulas. São raros os exercícios contextualizados. Em momento nenhum, os autores propõem a utilização de tecnologias como a calculadora ou os computadores. Em síntese, podemos afirmar que se priorizam os nexos externos e o desenvolvimento do pensamento empírico.

Atualmente essa mesma obra é apresentada às escolas divididas em 3 volumes e não, em volume único, como na época da adoção. O PNLEM (Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio) de 2009 traz uma análise desses volumes. Em relação ao estudo da Trigonometria verificamos que ela aparece no volume 1 do 1º ano, intitulada “Trigonometria: no retângulo e no círculo; funções e relações trigonométricas” e no 2º ano com o tema “Retomando Trigonometria: revisão; fórmula de adição, subtração e duplicação de arcos; transformação em produtos; equações e inequações trigonométricas; funções circulares inversas; teorema dos senos e co-senos”, tal programa não analisa detalhadamente cada conteúdo, mas vale destacar que em relação as atividades propostas há uma crítica em relação à falta de novas estratégias e estímulos à criatividade do aluno.

> As atividades propostas, normalmente, não requerem o desenvolvimento de novas estratégias para a resolução de problemas. Em geral, os exercícios solicitados ao aluno são similares aos solucionados na obra. O aluno não é incentivado a explorar procedimentos envolvendo estimativas ou cálculos mentais. O uso da calculadora ou computador não é estimulado. (PNLEM, 2009, p.34)

4.4.2“Conexões com a Matemática” organizado por Fábio Martins de Leonardo

O segundo livro a ser analisado é “Conexões com a Matemática”, obra organizada por Fábio Martins Leonardo usada pela escola no período de 2015 a 2017. Este foi o primeiro livro adotado pela escola com três volumes separados, deixando de usar o volume único.

De acordo com a apresentação do livro, é um trabalho coletivo com objetivo de produzir um material com “uma linguagem acessível ao aluno” e possibilitar “a atribuição de significado aos conceitos matemáticos”, questões que discutiremos na análise do estudo da função seno.

A sequência didática escolhida para a apresentação dos conteúdos, segundo as primeiras páginas do livro é a seguinte: inicia-se com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, sugerindo os conceitos com uma imagem. A seguir, exploram-se as definições e propriedades intercaladas por exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, finalizando cada capítulo com uma lista de exercícios complementares e com a “Auto avaliação”. Também, nesse livro, há marcas do “Paradigma do exercício” DE Skovsmose (2000). As seções “Pesquisa e ação”, “Resolução comentada”, “Compreensão de texto” e “Sugestões de leitura” complementam e enriquecem a obra.

A separação da trigonometria em dois volumes traz uma dificuldade, em função de os alunos do segundo ano não terem acesso ao livro do primeiro ano, pois todos são entregues no começo do ano letivo e, na maioria das vezes, são contados, não ficando exemplar algum para consulta ou empréstimo na biblioteca. Seria importante o aluno ter acesso ao livro do ano anterior, pois a parte inicial da trigonometria encontra-se no volume 1 e, conforme defendem Lima *et al.* (2001), é fundamental o professor, antes de desenvolver a trigonometria na circunferência, retomar a trigonometria no triângulo retângulo.

O capítulo 10 do volume 1 traz Tales e seu estudo sobre semelhança, um ponto forte dessa obra, pois recorre à História da Matemática para falar da descoberta de Tales na medição da altura das pirâmides do Egito, em seguida relaciona o Teorema com o estudo da semelhança de triângulos; explora o Teorema de Pitágoras e o demonstra por meio da semelhança de triângulos. O capítulo 11 "Trigonometria no triângulo retângulo", inicia-se recorrendo à história da trigonometria oriunda da Astronomia, explica as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), usando semelhança de triângulos, entra na relação fundamental da trigonometria, mas não a demonstra. Outro ponto positivo dessa obra é que apresenta as tabelas trigonométricas, mas também fala da calculadora como uma ferramenta facilitadora no processo ensino-aprendizagem.

No capítulo 1 do volume 2 (Ciclo trigonométrico), apresenta-se, no início, a explicação de arco e de comprimento de arco, cita o valor do π (PI), mas não explica seu significado. Aborda que a medida angular de um arco pode ser igual à medida linear, mas não explica o porquê; traz as unidades grau e radiano, mas também não explica o significado do radiano; entra na circunferência, mas não a relaciona com a reta numérica; traz a simetria dos arcos nos quadrantes, mas não explica a relação com os triângulos semelhantes na circunferência. Em seguida apresenta o seno, cosseno e tangente como projeções no círculo trigonométrico e demonstra a relação fundamental da trigonometria.

O segundo capítulo intitulado **Funções Trigonométricas** apresenta como objetivos: "Relacionar funções trigonométricas com fenômenos periódicos; Estender o conceito de ciclo trigonométrico em R; Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas" (p. 27). Para isso, traz um texto com um exemplo de fenômeno com comportamento cíclico, no caso a maré, baseado no seu gráfico explica o significado de período. Esse é um ponto positivo, pois aborda um nexo conceitual importante das funções trigonométricas, que é a periodicidade.

No decorrer desse capítulo, o livro traz a função de Euler para a identificação de um ponto na circunferência trigonométrica e os arcos côngruos. À abordagem da função seno destinam-se apenas três páginas, incluindo os exercícios resolvidos e propostos. Bem similar à obra analisada anteriormente, traz seu estudo a partir da análise do eixo y, na construção de seu gráfico y = sen x e explica rapidamente algumas de suas características (período, imagem e amplitude). Em seguida, apresenta as funções cosseno e tangente, usando as mesmas abordagens.

A construção de gráficos mais complexos é feita, sem a utilização das tabelas, por meio de transformações, transladando o gráfico, alterando a amplitude e alterando o período.

Na parte “Pesquisa e ação”, retoma-se a questão dos eventos periódicos com uma sugestão de pesquisa para ser desenvolvida pelos alunos com exemplos de fenômenos cíclicos como: acústica, astronomia, ciclo das marés, ciclos nos seres humanos – frequência cardíaca, menstruação, migração das aves e a piracema, para a elaboração de um vídeo frente à escolha de um dos temas. Junto à “pesquisa e ação”, apresenta duas páginas interessantes intituladas “Compreensão de texto”, que discute a questão das ondas sonoras relacionadas à função seno.

Em síntese, em relação aos critérios adotados para a análise da obra (os nexos conceituais: semelhança, proporcionalidade, simetrias, periodicidade), podemos constatar a presença de alguns deles, como a periodicidade, no entanto, deixa a desejar por não ter uma conexão entre tais nexos, o que prejudica o entendimento do movimento lógico-histórico e a aprendizagem conceitual.

4.4.3 “Quadrante Matemática” dos autores Eduardo Chavante e Diego Prestes

Essa é a obra adotada atualmente pela escola-campo de pesquisa, também está organizada em 3 volumes. Na sua apresentação, os autores dedicam o livro aos estudantes como sendo um auxiliar para o seu ingresso nos cursos superiores com textos e atividades que relacionam a Matemática com outras áreas do conhecimento com vistas à “formação cidadã, fornecendo oportunidades de reflexão sobre atitudes que podemos, e devemos, desenvolver para viver melhor em uma sociedade dinâmica e em plena transformação” (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p.3). A intencionalidade dos autores corresponde ao discurso presente nos documentos legais, tratados anteriormente.

O livro é organizado em várias seções: Inicia-se com que os autores chamam de “Abertura de unidade”, trazendo temas e assuntos relacionados com o que será estudado; “Atividades” para a prática do aluno; “Atividades resolvidas”, para complementação dos conteúdos; “Valores em ação”, com temas transversais; “Verificando rota”, como uma revisão dos conceitos estudados; “Ampliando fronteiras”, traz textos sobre a história e as diversas aplicações da Matemática; “Matemática em ação” traz a sua relação com outras áreas do conhecimento; e, por fim “Ferramentas”, traz a calculadora científica e a planilha eletrônica BrOfficeCalc, como objetivo de aprofundar os conhecimentos.

Essa é a primeira obra adotada pela escola cujos capítulos estão organizados em 4 unidades, que os autores chamam de “campos da matemática”, assim distribuídas: Números, Álgebra, Geometria (incluindo trigonometria) e Estatística e Probabilidade, sendo que a ordem com que eles aparecem nos três volumes sofre variação. Verificamos uma relação dessas unidades ou campos com as chamadas unidades temáticas da BNCC e os blocos de conteúdo dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Essa obra tem as mesmas características da anterior em relação ao conteúdo de trigonometria, pois trata, no último capítulo do volume 1, a trigonometria relacionada aos triângulos, e, no primeiro capítulo do volume 2, a trigonometria na circunferência.

O estudo da trigonometria nos triângulos começa com o Teorema de Tales, inclui as relações métricas no triângulo retângulo com foco no Teorema de Pitágoras, trata as relações trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e a tangente), desenvolve o seno por meio da semelhança de triângulos, mostrando que ele é uma constante, independente das medidas dos lados do triângulo e a relação fundamental da trigonometria, que são pontos positivos da obra, pois inclui alguns nexos conceituais. Traz a tabela trigonométrica, porém não faz referências à utilização da calculadora, a não ser ao final do livro, como um apêndice.

O capítulo 1 do volume 2 parte da explicação dos arcos da circunferência e a conversão relacionando graus/radianos de maneira bem técnica, traz a unidade “radiano”, mas não a define. Um ponto positivo da obra é a apresentação da relação da circunferência com a reta numérica para explicar os arcos côngruos, ainda que não a trate como uma função. Na continuidade, explica o passo-a-passo das projeções para o cálculo do seno (eixo y), cosseno (eixo x) e tangente (reta tangente), traz as fórmulas de conversão ao primeiro quadrante e as explica, relacionando-as à semelhança de triângulos.

Em menos de três linhas, os autores falam das funções trigonométricas como relacionadas a fenômenos periódicos e trazem a função seno em apenas duas páginas. Introduz o conceito de função seno por meio de diagramas de flecha ao relacionar x e y, esta é uma diferença interessante dessa obra em relação às anteriores, pois explica o significado buscando o conceito de função como sendo uma relação entre duas variáveis, mas isso não resgata o movimento lógico-histórico da formação do conceito de função, como afirmam Sousa; Moura (2019). Em seguida, explica a construção do gráfico da função seno (senoide), bem como o período e a imagem. Aborda, ainda, a função cosseno, mas não referências às funções tangente, secante, cossecante, cotangente

A secção “Valores em ação” traz um texto ilustrativo sobre a “Hipertensão arterial” como exemplo prático de movimentos periódicos, mostrando a função cosseno e seu gráfico para o cálculo da variação da pressão arterial em função do tempo. Na seção “Ampliando as fronteiras”, retrata as ondas sonoras como exemplo de fenômeno periódico.

Em síntese, esses livros não tratam das funções trigonométricas no campo dos ângulos planos, o que prejudica a assimilação do conceito e o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno.

Ainda que os autores manifestem a preocupação com a contextualização, com a aplicação da matemática na vida e em outras áreas do conhecimento, com a formação cidadã, com a introdução das tecnologias, com a atribuição de significado aos conceitos matemáticos, o que constatamos é que os livros tentam se adequar aos documentos legais direcionadores da educação, para serem aprovados pelo PNLD. Não percebemos que haja foco na aprendizagem conceitual (a apropriação dos nexos conceituais internos e não apenas dos externos) e o desenvolvimento do pensamento teórico, sem os quais não há possibilidade de o aluno fazer as aplicações do conhecimento matemático à vida, e sem os quais o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores pode ficar comprometido. A abstração e a generalização substantivas, assim como a possibilidade de elaboração de sínteses, de ascensão do abstrato ao concreto pensado deverão estar presentes na organização do ensino, o que caberá ao professor. Se esse professor considerar o livro didático adotado como o elemento direcionador do ensino, a ênfase será nos nexos externos do conceito e no desenvolvimento do pensamento empírico.

Toda essa análise contribuiu na elaboração das tarefas de estudo que compuseram o experimento didático-formativo, pois, a partir dela, conseguimos encontrar as lacunas para o desenvolvimento do pensamento teórico discente na construção do conceito da função seno.

5 DO MATERIALISMO HISTÓRICO-DIALÉTICO AO EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO: FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS E METODOLÓGICOS

Esta pesquisa tem como abordagem epistemológica, a dialética-materialista de Karl Marx, que fundamenta, também, o referencial teórico que estamos utilizando. A explicitação do método é fundamental numa tese, o que exige do pesquisador o esforço de apropriação de seus pressupostos, para poder embasar o caminho da pesquisa. Entendemos, com base em Gamboa (2007), que o método de pesquisa diz respeito às diferentes maneiras de aproximação do objeto de conhecimento e aos modos de construção da realidade. Neste capítulo, pretendemos, inicialmente, apresentar alguns pressupostos desse método e, em seguida, o experimento didático-formativo, oriundo dos psicólogos e didatas russos em seus estudos.

5.1 O método de pesquisa - o materialismo histórico dialético

Para iniciarmos as discussões, apresentaremos alguns antecedentes do Materialismo Histórico Dialético que representam a base desse método.

5.1.1 Alguns antecedentes do método

Partimos de um cenário europeu, século XIX, especificamente alemão, que vivenciava o período, mesmo que tardio, de revolução industrial com a instalação de grandes indústrias e o modo de produção capitalista em um processo de desenvolvimento, vinculado ao objetivo maior desse sistema, que é o lucro. Junto com a expansão das indústrias, ganham destaque Karl Marx[63] e suas ideias socialistas. Segundo Ciavatta (2015, p. 23), “Marx parte da produção social da vida em sociedade e contextualiza historicamente toda produção humana, como o conhecimento, a ciência, a cultura e a educação”, conceitos esses que tem como ponto chave a definição de trabalho humano, que é, para Marx (2002, p. 211),

> [...] um processo de que participam o homem e a natureza, processo em que o ser humano, com sua própria ação, impulsiona, regula e controla seu intercâmbio material com a natureza. Defronta-se com a natureza como uma de suas forças. Põe em movimento as forças naturais de seu corpo – braços e pernas, cabeça e mãos –, a fim de apropriar-se dos recursos da natureza, imprimindo-lhes forma útil à vida humana. Atuando assim sobre a natureza externa e modificando-a, ao mesmo tempo modifica sua própria natureza.

[63] O alemão Karl Heinrich Marx (1818 – 1883) foi um importante revolucionário e fundador da doutrina comunista moderna. Atuou como filósofo, economista, historiador, jornalista e teórico político.

Os estudos de Marx apresentam o homem em uma relação direta com a natureza, na sua transformação, na busca de satisfazer as suas necessidades, o que insiste em chamar de trabalho, tornando-se, assim, um ser social. Para ele, “a humanidade criou-se a si mesma através do trabalho” (MARX, 1983, p. 65).

Marx junto a Engels[64], levam-nos a entender que o sistema capitalista tem uma grande capacidade de geração de riquezas, embora seja de forma desigual, pois, apenas uma pequena parte da população detém a maioria delas. Resgatam a existência de duas classes[65], a “dominante”, também conhecida como burguesia, que é detentora do capital e dos meios de produção e a “dominada”, que é o proletariado, que são os trabalhadores que atuam diretamente nas grandes indústrias, vendendo a sua força de trabalho na produção da mercadoria. Estes recebem apenas parte do valor que produz e são explorados tanto em relação aos baixos salários, quanto em relação às condições de trabalho oferecidas pelas indústrias.

Marx e Engels afirmam, em relação à existência de classes e à luta entre elas que,

> [...] No que me concerne, não me cabe o mérito de haver descoberto, nem a existência das classes, nem a luta entre elas. Muito antes de mim, historiadores burgueses já haviam descrito o desenvolvimento histórico dessa luta entre as classes e economistas burgueses haviam indicado sua anatomia econômica. O que eu trouxe de novo foi: 1) demonstrar que a existência das classes está ligada somente a determinadas fases de desenvolvimento da produção; 2) que a luta de classes conduz, necessariamente, à ditadura do proletariado; 3) que essa própria ditadura nada mais é que a transição à abolição de todas as classes e a uma sociedade sem classes. [...]. (MARX; ENGELS, s/d, p. 253-254).

É nesse contexto que Marx estimula a luta de classes, que é a luta do proletariado contra esse sistema “opressor”. Para o pensador, a ideia de revolução deve implicar mudanças radicais e globais, que rompam com todos os instrumentos de dominação da burguesia, pois

> O movimento proletário é o movimento autônomo da imensa maioria no interesse da imensa maioria. O proletariado, a camada inferior da sociedade atual, não pode levantar-se, não pode erguer-se sem fazer saltar toda a superestrutura de camadas que formam a sociedade oficial (MARX; ENGELS, 1998, p. 18).

---

[64]Friedrich Engels (1820 - 1895), empresário industrial e teórico revolucionário alemão, que, junto com Karl Marx fundou o chamado socialismo científico ou marxismo.

[65] Surgimento de classes, segundo Marx, “Milhões de famílias existindo sob as mesmas condições econômicas que separam o seu modo de vida, os seus interesses e a sua cultura do modo de vida, dos interesses e da cultura das demais classes, contrapondo-se a elas como inimigas formam uma classe. [...]”. (MARX, 2011, p. 142-143).

Toda essa crítica se encontra na sua principal obra, "O Capital", um conjunto de livros, publicados originalmente em 1867, que apresentava uma análise do capitalismo. "O Capital" foi publicado também na Rússia, em 1872, e inspirou Lenin[66], chefe de governo do país, a defender o chamado marxismo de Marx/Engel, no qual se acreditava em uma sociedade sem classes, obtida pela luta do proletariado contra os vínculos das forças opressoras na busca de uma nova sociedade, indo ao encontro das ideias socialistas/comunistas.

As obras de Marx explicam vários conceitos como, "mais valia", "mercadoria", "fetichismo", dentre outros, os quais não temos a intenção em detalhar nesse trabalho, porém são conceitos e ideias que buscam destacar a importância da mão de obra do trabalhador na construção do sistema capitalista. Nesse sentido, Marx (2013, p. 392) afirma que, "[...] o valor efetivo de uma mercadoria não é seu valor individual, mas seu valor social, isto é, não é medido pelo tempo de trabalho que de fato custa ao produtor em cada caso singular, mas pelo tempo de trabalho socialmente requerido para sua produção".

Estudava filosofia, política, economia, sociologia e tinha como fonte de pensamento Hegel (sua Dialética) e o Socialismo, apesar de se contrapor em muitas situações a Hegel. Criticava-o por centrar sua atenção na especulação acerca do espírito absoluto. Nesse contexto ele afirma,

> Meu método dialético, em seus fundamentos, não é apenas diferente do método hegeliano, mas exatamente seu oposto. Para Hegel, o processo de pensamento, que ele, sob o nome de Ideia, chega mesmo a transformar num sujeito autônomo, é o demiurgo do processo efetivo, o qual constitui apenas a manifestação externa do primeiro. Para mim, ao contrário, o ideal não é mais do que o material, transposto e traduzido na cabeça do homem. (MARX, 2013, p. 90)

Assim, ao referirmos à Dialética, sua base de pensamento está na ideia de que tudo se encontra em constante processo de mudança e movimento. O motor da mudança são os conflitos resultantes das contradições de uma mesma realidade, sendo uma forma de diálogo que contrapõe conceitos com o objetivo de surgir novos conceitos, com base no trio: tese, antítese e síntese. Para Marx, esse movimento transforma a história e o conhecimento da história do objeto é fundamental nessa transformação. Lenin (1979, p. 20), apoiado nessas ideias afirma,

---

[66]Vladimir Ilyich Ulyanov, mais conhecido como Lenin (1870 –1924), revolucionário marxista, comunista, político e teórico russo que foi chefe de governo da República Russa de 1917 a 1924 pelo Partido Comunista.

> Na concepção de Marx, como na de Hegel, a Dialética compreende o que hoje se chama de teoria do conhecimento ou gnoseologia, que deve igualmente considerar seu objeto do ponto de vista histórico, estudando e generalizando a origem e o desenvolvimento do conhecimento, a passagem da ignorância ao conhecimento.

Existem vários tipos de dialética, no entanto nos debruçamos sobre a dialética como método, que, segundo Gamboa (2006, p.19), “nos permite conhecer a realidade concreta no seu dinamismo e inter-relações”. As abordagens dialéticas dão prioridade às categorias de temporalidade (tempo) e historicidade (gênese, evolução e transformação), sendo que, para a explicação dos fenômenos, é necessário compreender a dinâmica da sociedade onde os processos se realizam e adquirem sentidos. Assim afirma que a dialética

> [...] considera os fenômenos em permanente transformação, sendo determinados pela sua “historicidade”. Para serem compreendidos é necessário revelar sua dinâmica e suas fases de transformação. Neste sentido, as fases mais desenvolvidas são a chave para compreender as menos desenvolvidas e vice-versa. (GAMBOA, 2006, p. 74)

Em outras palavras, na dialética, todo fenômeno deve ser entendido como parte de um processo histórico maior.No caso da educação, suas transformações estão relacionadas com as transformações culturais e sociais, sendo necessário buscar informações que fazem parte desse movimento histórico para a sua compreensão.

5.1.2 O Materialismo Histórico-Dialético

Entendemos que a base filosófica da dialética percorre um imenso caminho antes de Hegel, no entanto o pensamento marxista instituiu uma nova dialética fundada no materialismo histórico. No cenário de produções científicas hegelianas com as devidas críticas realizadas por Marx, origina-se o Materialismo Histórico-Dialético (MHD), que é um método de análise da realidade na busca de sua transformação, criado pela dupla Marx/Engels, caracterizado pelo movimento do pensamento por meio da história de vida social do homem.

> A primeira condição de toda a história da humanidade é, naturalmente, a existência de seres humanos vivos. A primeira situação a constatar é, portanto, a constituição corporal desses indivíduos e as relações que ela gera entre eles e o restante da natureza [...]. Toda a historiografia deve partir dessas bases naturais e de sua transformação pela ação dos homens, no curso da história (MARX; ENGELS, 2007, p. 10).

O termo “materialismo” refere-se às condições materiais da existência do homem, o termo “histórico”, refere-se aos acontecimentos históricos e que subsidiaram a formação da humanidade e o termo “dialético” refere-se a esse movimento contraditório na produção dos acontecimentos, sendo então um método teórico e metodológico para compreender as transformações históricas da sociedade.

E na busca de um maior entendimento sobre essa dialética de Marx, recorremos também à obra “Dialética do concreto”, de KarelKosik, que representa um clássico para entendermos a dialética. Para Kosik, deve existir uma relação dialética na análise do todo em relação às partes e das partes em relação ao todo, considerando suas contradições,

> A compreensão dialética da totalidade significa não só que as partes se encontram em relação de interna interação e conexão entre si e com o todo, mas também que o todo não pode ser petrificado na abstração situada por cima das partes, visto que o todo se cria a si mesmo na interação das partes. (KOSIK, 2010, p. 50)

Ainda, sobre a relação parte-todo e o conhecimento afirma,

> A dialética não atinge o pensamento de fora para dentro, nem de imediato, nem tampouco constitui uma de suas qualidades; o conhecimento é que é a própria dialética em uma das suas formas; o conhecimento é a decomposição do todo. O “conceito” e a “abstração”, em uma concepção dialética, têm o significado de método que decompõe o todo para poder reproduzir espiritualmente a estrutura da coisa, e, portanto, compreender a coisa. (KOSIK, 2010, p. 18).

Kosik (2010) nos esclarece uma das categorias fundamentais da postura dialética, que diz respeito à totalidade. Esta perspectiva tem uma grande importância, quando desenvolvemos os processos de ensino-aprendizagem, pois esse é complexo, constituído de várias partes, que precisam ser compreendidas isoladamante, mas dentro de um todo que existe em cada uma dessas partes. Assim, não podemos discutir o ensino da função seno, sem situá-lo no contexto do ensino da álgebra, que, por sua vez, é parte do ensino da matemática, que é parte do currículo do ensino médio brasileiro, que se insere dentro de um projeto de educação e de sociedade.

Kosik, também nos ajuda a pensar o método de ascensão do abstrato ao concreto, que é um método de pensamento, e é basilar nessa perspectiva dialética. Assim, explica Kosik (1976, p. 30):

> A ascensão do abstrato ao concreto não é uma passagem de um plano

> (sensível) para outro plano (racional): é um movimento no pensamento e do pensamento. Para que o pensamento possa progredir do abstrato ao concreto, tem de mover-se no seu próprio elemento, isto é, no plano abstrato, que é a negação da imediatidade, da evidência e da concreticidade sensível. A ascensão do abstrato ao concreto é um movimento para o qual todo início é abstrato e cuja dialética consiste na superação desta abstratividade.

Como estamos preocupadas em propor um ensino que estimule o pensamento teórico, o método de ascensão do abstrato ao concreto está presente nesta pesquisa. Por esse método, pretendemos que o aluno busque a essência do conceito da função seno, a partir da abstração e da generalização substantivas, tendo a consciência de que isso se dá no movimento, por aproximações sucessivas ao objeto, num movimento em espiral. Em relação à generalização afirma Resende (2019, p. 304),

> A generalização tem um papel importante no pensamento, pois ao buscar conhecer o mundo nas suas manifestações naturais e culturais por meio das relações sociais, o homem busca as sínteses, a comunalidade, a essência, porém essa busca tem níveis e formas de operar diferentes.

Alicerçado nos pressupostos teóricos do Materialismo Histórico-Dialético e dentro da proposta do ensino desenvolvimental, Davidov propõe a sistematização didática, ou seja, a organização do ensino para o desenvolvimento integral do aluno e traz a aplicação do experimento didático-formativo, com a participação do pesquisador, por meio de investigações da aprendizagem (identificar, elaborar e experimentar), com objetivo de promover o desenvolvimento teórico discente. Libâneo (2004, p. 4) identifica o experimento didático-formativo como “um método de investigação que consiste em estudar as mudanças no desenvolvimento do psiquismo por meio da influência do pesquisador na experimentação”, o qual será apresentado a seguir.

5.2 Experimento didático-formativo

Lemes e Cedro (2015) criticam a função da escola apenas como transmissora de conteúdos, mas a defendem ao assumir o papel de desenvolver o pensamento crítico e consciente do aluno, as suas funções psíquicas superiores, preparando-o para as diferentes situações da sua vida fora da escola. Nesta tarefa, o professor tem uma função essencial, como organizador do processo ensino-aprendizagem, ou seja,

> Preparar o educando para a vida, para seu pleno desenvolvimento, compreende ações amplas que não se encerram na transmissão de conteúdos; exige que o professor organize o ensino de um modo que o aluno possa perceber a necessidade de se apropriar do conhecimento como ferramenta para o seu desenvolvimento como pessoa, tornando-se capaz de fazer escolhas conscientes. (LEMES; CEDRO, 2015, p. 135)

Mas para promover esse ensino na busca do desenvolvimento integral discente, é necessário que o processo ensino-aprendizagem dos conceitos científicos estejam alicerçados em metodologias e práticas pedagógicas que contribuam para a apropriação desses conceitos. Um ensino organizado para desenvolver o conceito teórico contribui para alargar nos discentes o pensamento.

Nesse sentido, Aquino (2017) defende o método do experimento didático-formativo, em pesquisas no campo da didática desenvolvimental, com a inserção de diferentes e novos procedimentos, que contribuam nesse processo de formação das funções psíquicas superiores do aluno. O experimento didático-formativo supõe,

> [...] a reestruturação dos programas escolares, assim como a introdução experimental de novas metodologias, procedimentos de ensino, conjuntos de meios, tecnologias educacionais, sistemas de jogos, etc., no ensino de uma ou mais disciplinas escolares, com o propósito de avaliar em que medida os sistemas didáticos experimentais facilitam a apropriação dos conhecimentos, ao tempo em conduzem ao desenvolvimento mental e integral da personalidade dos alunos. (AQUINO, 2017, p. 340).

O experimento é uma forma prática de aplicar as teorias de Vigotski: da mediação, da ZDP, da formação de conceitos com o propósito de impulsionar o desenvolvimento. Segundo Aquino (2017, p.340), “ele vai além do método de pesquisa, convertendo-se, também, em método de ensino e educação experimentais, orientado a potencializar a aprendizagem e o desenvolvimento intelectual, físico e emocional dos alunos”.

De acordo com esse mesmo autor, as vantagens de utilizar o experimento estão ligadas à participação/intervenção do pesquisador no processo de ensino-aprendizagem, ao mesmo tempo em que investiga~~,~~ sendo capaz de modificar, adaptar ou aprimorar os procedimentos ao longo da pesquisa. Outra vantagem é a ação direta no programa de estudo da escola, em uma disciplina escolar, o que permite analisar a coerência entre os objetivos propostos em cada conteúdo, as metodologias adotadas e as condições físicas e psíquicas dos sujeitos participantes. No entanto, exigirá que o aluno esteja totalmente envolvido na atividade de estudo, sendo esse um grande desafio.

Sforni (2014) postula que o experimento didático apresenta indícios de ser um método de pesquisa que contribui significativamente para as ações do professor no intuito de promover o desenvolvimento do ser humano no processo ensino-aprendizagem dos conteúdos clássicos, ao estimular a aprendizagem e o desenvolvimento das funções psicológicas superiores do aluno, indo ao encontro das ideias de Vigotski que afirma,

> [...] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia produzir-se sem a aprendizagem. Por isso a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não naturais, mas formadas historicamente. (VIGOTSKI *et al*, 2001, p. 115)

Essa Lei vigotskiana, que relaciona aprendizagem e desenvolvimento dialeticamente, é fundamental para o campo da didática e, de modo particular, para a organização do experimento didático-formativo.

Comungamos com as ideias de Sforni (2014, p. 10), quando afirma que o experimento didático-formativo não é uma receita para as ações do professor, mas sim “princípios orientadores e ações que possam ser uma referência geral na sua atividade profissional”. Cabe ao professor aprimorar de forma contínua suas ações na busca da apropriação dos conceitos por parte do aluno, visando ao seu desenvolvimento

Assim, entendemos que, para a realização de atividades experimentais embasadas na THC, é fundamental a ação do professor, pois, segundo Libâneo (2004, p. 8), cabe ao professor:

> 1) a apropriação teórico-crítica dos objetos de conhecimento; 2) a apropriação de metodologias de ação e de formas de agir facilitadoras do trabalho, a partir da explicitação da atividade de ensinar; 3) a consideração dos contextos sociais, políticos, institucionais – práticas contextualizadas – na configuração das práticas escolares.

O experimento didático formativo é um método que norteia o fazer teórico e prático de uma pesquisa na busca de mudanças positivas no ensino. Segundo Davidov (1999, p.1),

> As mudanças positivas no sistema da educação moderna vão depender em muito se os pedagogos saberão dar uma nova organização a todo o processo de ensino-educacional na escola. Por sua vez, do nosso ponto de vista, isto está relacionado com a organização do aprendizado dos alunos dos conhecimentos e habilidades sob a forma de atividade de estudo.

Para adotar o experimento didático-formativo no desenvolvimento de uma pesquisa, é necessário ao pesquisador, conhecer detalhadamente as suas origens, suas vantagens e as etapas. Essas etapas são: 1ª) Revisão da literatura e diagnóstico da realidade; 2ª) Elaboração do sistema didático experimental; 3ª) Desenvolvimento do experimento didático-formativo; 4ª) Análise dos dados e elaboração do relatório (AQUINO, 2017).

5.2.1 A primeira etapa: em que consiste e o que foi realizado

A "revisão da literatura e diagnóstico da realidade" é a fase em que o pesquisador faz um recorte dos fundamentos teóricos no âmbito da Teoria Histórico-Cultural, destacando os principais conceitos para embasar o estudo, segundo Aquino (2017). Nesta pesquisa, esse recorte foi feito por meio de pesquisa bibliográfica, a partir de fichamentos dos autores clássicos, considerando a THC e teorias a elas associadas, a Teoria da Atividade e a Teoria da Atividade de Estudo, o qual foi apresentado na seção 2.

Na primeira etapa, Aquino (2017) sugere, também, o levantamento de estudos prévios relacionados à temática e ao objeto de estudo. Nesta pesquisa, essa fase incluiu a revisão do já produzido, por meio de pesquisa ao Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, apresentada na seção 3. Com o objetivo de contextualizar o objeto de estudo e de mapear necessidades, na seção 3, apresentamos, ainda, os resultados da análise de documentos legais, que regem o Ensino Médio, e análise dos que dispõem sobre os aspectos curriculares relacionados ao ensino da matemática no Brasil e no estado de Minas Gerais. Procuramos investigar o movimento lógico-histórico do conceito da função seno no campo dos ângulos planos e no campo dos números reais, destacando seus nexos conceituais internos e externos, conteúdo da seção 4.

Conforme recomenda Aquino (2017), realizamos, também a caracterização da escola e fizemos observações de aulas na turma em que o experimento seria realizado.

5.2.1.1 A escola campo de estudo

Propusemo-nos a caracterizar o *lócus* da pesquisa, ou seja, conhecer melhor a organização, o funcionamento, os instrumentos normativos e os sujeitos que compõem a escola campo, por ser, conforme nosso entendimento, requisito fundamental para as investigações e reflexões que emergirão ao longo desse trabalho. Evidenciamos que as informações foram obtidas em conversa com a diretora em uma reunião realizada no início de fevereiro/2020 e construídas a partir da vivência da autora que trabalha na escola há 18 anos.

A Escola Estadual Loren Rios Feres, que é o campo da pesquisa, está localizada na cidade de Araxá/MG, na rua Onésimo Simões Borges, nº 35, no Bairro Alvorada, porém possui um segundo endereço na zona rural (Itaipú). Sua fonte de recursos é, exclusivamente, proveniente do governo do estado de Minas Gerais. Situada na periferia da cidade, sua comunidade é formada por alunos de baixa renda.

Fundada em 1986, atualmente funciona em três turnos, manhã e tarde no endereço urbano e noite no endereço rural, oferecendo as séries finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) e o Ensino Médio (1º ao 3ª ano). Ao todo são 45 funcionários, dentre professores, especialistas, direção e assistentes e 365 alunos distribuídos: 1 turma de 6º ano; 1 turma de 7º ano; 1, de 8º ano; 2 turmas de 9º ano; 3, de 1º ano; 3, de 2º ano; e 2, de 3ª ano.

A escola, especialmente a direção, contribui para a formação continuada dos professores por oferecer participação em cursos e oficinas em diferentes áreas do conhecimento as quais ocorrem normalmente nos horários de Módulo II[67].

O prédio possui boas condições físicas, com acessibilidade para portadores de necessidades especiais, salas equipadas com ventiladores, duas quadras para as atividades fora da sala de aula, uma biblioteca bem organizada, um sistema de câmeras de segurança, cantina espaçosa e cardápio preparado por nutricionistas. A escola conta também com três laboratórios, um de informática, um de ciências e um de matemática, sendo o último projetado pela autora desse estudo e é um diferencial da escola.

O seu Projeto Político Pedagógico[68] (PPP) foi construído e é constantemente atualizado com a participação de toda comunidade acadêmica por meio de reuniões que acontecem periodicamente na própria escola, as quais são comunicadas via bilhete e pelas redes sociais da escola, nele são apresentados metas e gerenciamento de ações de todo ano letivo.

Nele consta a missão da escola, a caracterização da comunidade, dados sobre a aprendizagem dos alunos, as diretrizes pedagógicas e o plano de ação. Apoiada nesse projeto pedagógico, a escola desenvolve vários outros projetos interdisciplinares, com objetivo de promover o ensino de maneira a despertar a criatividade e o interesse discente.Um desses

[67] Nome atribuído a carga horária de 2h semanais que devem ser cumpridas pelos professores na escola em forma de reuniões (cursos, palestras, troca de experiências), na busca da formação continuada.

[68]O projeto pedagógico é um instrumento teórico-metodológico que visa ajudar a enfrentar os desafios do cotidiano da escola, só que de uma forma refletida, consciente, sistematizada, orgânica e, o que é essencial, participativa. E uma metodologia de trabalho que possibilita ressignificar a ação de todos os agentes da instituição. (VASCONCELOS, 1995, p. 143)

projetos é o “FestLoren”, um festival de talentos, que ocorre no segundo semestre de cada ano e conta com a participação ativa dos alunos e principalmente do grêmio estudantil.

Em relação ao ensino-aprendizagem de matemática, a escola possui três professoras, incluindo a pesquisadora deste estudo que se mostraram disponíveis em contribuir com esse estudo. A pesquisa seria desenvolvida em duas turmas do 2º ano do Ensino Médio diurno.

5.2.1.2 Diagnóstico: a observação

Segundo Novaes (1968, p. 01), “o diagnóstico escolar consiste na utilização de recursos, meios e processos técnicos com o objetivo de localizar e avaliar os problemas e dificuldades dos alunos, determinando suas causas, para preveni-las e corrigi-las.”As dificuldades de um aluno relacionado a um determinado conteúdo podem estar ligadas a fatores como: ausência de interesse pela escola, falta de apoio familiar, deficiência física, intelectual e emocional, métodos de ensino inadequados, condições inadequadas dos espaços e ambientes escolares, dentre outros.

Neste estudo, o diagnóstico é uma maneira de oferecer condições para orientar as tomadas de decisões na busca de entender “como” o aluno e “o que” o aluno já sabe a respeito da função seno para planejamento do experimento de ensino, lembrando que o conteúdo já foi trabalhado pelo professor em sala de aula. Portanto, nesse procedimento não se focam os erros, o que interessa é conseguir dados e informações concretas, seja por meio dos registros dos alunos e do professor no quadro, ou pelos diálogos e perguntas, sobre o que o aluno já sabe fazer sozinho sem intervenções e o que ainda precisa avançar, cabendo ao experimento didático-formativo que desenvolvemos, possibilitar oportunidades para a promoção efetiva da aprendizagem do aluno, respeitando sua individualidade e incentivando suas potencialidades.

O primeiro momento do diagnóstico foi a observação da sala de aula. Como afirmado na introdução deste relatório, tal pesquisa foi desenvolvida na escola em que a autora trabalha como professora de Matemática há dezoito anos. Optamos por realizá-la no mesmo ambiente de trabalho, por já conhecermos a realidade e, principalmente, por buscarmos, por meio da formação continuada, contribuir com o contexto escolar, como também com a organização do ensino de matemática nesta escola.

Mesmo conhecendo o ambiente escolar, a observação foi fundamental para o desenvolvimento da pesquisa, pois a autora nesse momento, atuou como pesquisadora, pois não era professora das turmas investigadas, em 2020. Essa observação buscou conhecer melhor os alunos, a professora, o planejamento, a organização e as metodologias adotadas no ensino de matemática no 2º ano do Ensino Médio.

Antes do início das observações em sala de aula, conversamos com a professora em uma das reuniões de módulo da escola para apresentar o projeto, explicar como seria o seu desenvolvimento na busca de obter o seu consentimento para assistir suas aulas e aproveitamos a oportunidade para coletar algumas informações sobre o seu perfil. Ela tem 35 anos, possui 15 anos de experiência, sempre atuando nas escolas estaduais de Araxá, tanto no Ensino Fundamental, como no Ensino Médio. É graduada em Matemática e possui especialização em Ensino de Matemática, é designada (contrato temporário), atualmente atua em dois cargos (36 aulas semanais) em duas escolas estaduais da cidade, sendo a escola Loren uma delas.

Após essa conversa inicial, concordou com a nossa participação em suas aulas. Perguntei sobre o interesse e gosto dos seus alunos pela matéria, ela comentou que a maioria diz não gostar de matemática desde o ensino fundamental por não compreender a importância dos conteúdos desenvolvidos na sua vida, o que dificulta o desenvolvimento do processo ensino-aprendizagem.

As observações foram realizadas no mês de fevereiro de 2020, antes da pandemia e do decreto de isolamento social, seguindo o seguinte roteiro:

1) A professora valoriza a formação de conceitos, ou seja, ela vai além do uso e aplicação de fórmulas, traz o movimento lógico-histórico do conceito?
2) Como são as relações entre professor/aluno e entre aluno/aluno?
3) Como é o comportamento dos alunos nas aulas de matemática em relação à matemática?
4) A professora utiliza diferentes metodologias de ensino?
5) A professora valoriza a participação dos alunos?201
6) De que forma o conteúdo é desenvolvido?

As salas dos segundos anos do Ensino Médio da escola não são lotadas, apesar de nas listas de chamada ter, em média trinta alunos, verificamos que os discentes faltam muito. Em conversa com a professora, ela afirmou que muitos trabalham e, às vezes, não conseguem acordar cedo para ir à escol, sendo um dos motivos das salas vazias. No entanto, segundo a docente, a falta de participação e incentivo das famílias em relação aos estudos contribui nas ausências.

A relação entre professor/aluno e aluno/aluno são positivas, com alguns poucos momentos de conflitos e discussões. Os alunos têm liberdade de fazer perguntas para a professora, no entanto observamos pouco interesse em participar das aulas, quase não existem dúvidas, muitos estavam dispersos, outros mexendo no celular e alguns até dormindo apoiados na carteira.

O conteúdo de trigonometria, especificamente da função seno, é o primeiro tópico desenvolvido no segundo ano, conforme o planejamento anual (Anexo I) disponibilizado pela professora. Assim, conseguimos acompanhar, durante o mês de fevereiro, as aulas destinadas ao conceito. Como são duas turmas, fizemos a observação em ambas, totalizando dez aulas observadas e intercalamos as turmas, um dia de observação em cada, o que foi possível, pois a professora desenvolveu a mesma aula e os mesmos exercícios[69] em ambas.

A docente iniciou as aulas com exercícios no triângulo, desenhou um triângulo retângulo no quadro e "relembrou", pois, segundo a professora, foi conteúdo desenvolvido com eles no 9º ano, o que é o seno (cateto oposto sobre a hipotenusa), o cosseno (cateto adjacente sobre a hipotenusa) e a tangente (cateto oposto sobre o cateto adjacente), a docente explicou como encontrá-los no triângulo retângulo e não a definição. Em seguida, passou alguns exercícios para que os alunos resolvessem e os corrigiu, cerca de duas aulas foram usadas. Não falou de semelhança (essência do seno no conjunto dos ângulos planos, ou seja, nexo interno do conceito) e nem do Teorema de Tales.

Essa metodologia de breve explicação do conteúdo, seguida da resolução de exercícios adotada pela professora, vai ao encontro do chamado "paradigma do exercício" discutido por SKOVSMOSE (2000), conforme tratamos na seção anterior.

Na terceira aula, a professora iniciou a trigonometria no círculo, "explicou" a relação entre graus e radianos, usando a regra de três, em que π rad = 180º. Passou vários exercícios, para que os alunos fizessem a transformação de radianos para graus e vice-versa. Não explicou o que é ângulo, o que é arco e nem o significado real do radiano, o porquê de usar o π e sua relação com a reta numérica.

Na quarta aula, iniciou desenhando o círculo no quadro e mostrou a divisão dos quatro quadrantes, o 1º quadrante com ângulos entre 0º e 90º, o segundo quadrante com os ângulos entre 90º e 180º, o 3º quadrante, entre 180º e 270º e o quarto quadrante com ângulos compreendidos entre 270º e 360º. Apresentou a tabela com o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 0º, 90º, 180º, 270º e 360º, mas não detalhou a origem desses valores e sua relação com os eixos. Na sequência, explicou as fórmulas de conversão ao primeiro quadrante (180º - x, x – 180º e 360º - x), ao final da aula passou alguns exercícios e os corrigiu.

[69] Ao usarmos o termo exercícios estamos nos referindo a um conjunto de atividades que se pratica para desenvolver um tema, no caso, é um conjunto de atividades repetidas, apenas mudando valores, que foram desenvolvidas nas aulas com foco no uso de fórmulas, sem aguçar a criatividade e o raciocínio do aluno.

Na quinta aula, explicou o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos maiores que 90º usando as fórmulas de conversão apresentadas na aula anterior. Não se referiu à função de Euler, que é um nexo importante do conceito da função seno cujo domínio é o conjunto dos números reais. Mostrou uma regra SETACO (+) 12/13/14 para memorizarem os sinais em cada quadrante. Na sequência, passou mais exercícios e os corrigiu.

Na sexta aula, a professora mostrou a relação fundamental da trigonometria ($sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$) e passou exercícios para os alunos resolverem.

Na sétima aula, a professora iniciou o estudo das funções trigonométricas, desenhou no quadro negro os gráficos das funções seno e cosseno e explicou o que é período e amplitude, mas não trouxe nenhum exemplo de sua aplicação prática e nem seu movimento lógico-histórico.

Na oitava aula, iniciou explicando a diferença entre uma equação e uma inequação trigonométrica mostrando um exemplo de cada, falou dos símbolos da igualdade (=) que refere-se a equação e das desigualdades ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) referindo-se às inequações e as representou no círculo trigonométrico por meio dos exemplos sen x = 1/2 e sen x > 1/2, gastou o horário todo nessa explicação.

Na nona aula, passou uma atividade de revisão com dez exercícios baseados nos exercícios técnicos que ela havia realizado nas aulas anteriores, e, na décima aula aplicou uma avaliação com cinco questões retiradas da lista de revisão (ANEXO II).

Coletei com a professora as notas obtidas pelos alunos das duas turmas e calculamos a média que foi de 7,1 pontos. Perguntamos à professora se estava satisfeita com a aprendizagem dos alunos em relação a esse conteúdo, respondeu que sim, pois a média de 7,1 pontos é considerada satisfatória e entende que os alunos aprenderam o conceito. Analisando os exercícios propostos, não se trata de apropriação do conceito, dado que não foram explorados os nexos conceituais da função seno, nem no triângulo e nem no círculo trigonométrico.

Apesar de a escola possuir um Laboratório de Matemática, não foi utilizado, também nenhuma metodologia diferente foi desenvolvida para a explicação e desenvolvimento do conteúdo.

Em síntese, observamos que: não existe nas aulas a preocupação com a formação de conceitos, com o movimento lógico-histórico da função seno; a relação professor/aluno e aluno/aluno são positivas considerando a empatia e o respeito entre ambos; não houve a utilização de diferentes metodologias de ensino; e nem estímulo à participação dos alunos; o conteúdo foi desenvolvido de maneira técnica, com foco nas fórmulas e no "paradigma do exercício".

5.2.1.3 Perfil dos participantes e seu contexto socioeducativo

Analisar o contexto socioeducativo dos participantes, suas interações sociais e sua condição de vida é base para compreendermos o seu desenvolvimento, amparado no MHD, Vigotski destaca sempre em seus trabalhos, que o homem não pode ser estudado desligado de suas condições históricas e sociais.

Com a pandemia de COVID-19 no estado de Minas Gerais, as aulas foram suspensas no dia 18 de março de 2020, e, apenas, no dia 18 de maio, as atividades retornaram de forma não presencial, ou seja, à distância. Para o desenvolvimento das aulas, o governo estadual adotou três ferramentas, a primeira é a transmissão de aulas pela televisão, intitulado "Se liga na educação" transmitido pela Rede Minas, cada dia da semana foi destinada a um conteúdo, na segunda-feira é aula de Linguagens, na terça-feira de Ciências Humanas, na quarta-feira de Matemática, na quinta-feira de Ciências da Natureza e na sexta-feira revisão para o ENEM. As aulas online aconteceram das 7h30 às 12h30, de acordo com os horários apresentados na Tabela 6:

Tabela 6: Horários das aulas na Rede Minas

Horários	**Ano escolar**
7h30 às 7h50	1º ano do Ensino Médio
7h52 às 8h12	2º ano do Ensino Médio
8h14 às 8h56	3º ano do Ensino Médio
8h58 às 9h18	6º ano
9h20 às 9h40	7º ano
9h42 às 10h02	8º ano
10h04 às 10h24	9º ano
10h28 às 10h48	4º ano
10h50 às 11h10	5º ano
11h15 às 12h30	Tira dúvidas

Fonte: Elaborado pela autora

A segunda ferramenta elaborada e adotada pelo governo para o desenvolvimento das aulas foi o PET (Plano de Estudo Tutorado), que consiste em apostilas mensais de orientação de estudo e atividades por ano de escolaridade (1º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ao 3º ano do Ensino Médio). Os conteúdos foram baseados no CBC e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A terceira ferramenta usada é o aplicativo "Conexão Escola", que é uma das ferramentas complementares ao Plano de Estudo Tutorado (PET). Nele, os estudantes têm acesso às tele aulas do programa "Se Liga na Educação", aos *slides* apresentados nessas aulas, aos PETs e a um *chat* com contato direto com o professor de cada disciplina. O objetivo dessas ferramentas é o aluno assistir as aulas pela televisão e resolver semanalmente as atividades do Pet, e, em caso de dúvidas, utilizar o *chat* para conversar com seu professor, e em seguida, enviar-lhe as atividades para correção registro de sua carga horária de estudo em documentos elaborados pelo governo, chamados "Anexos". Uma das orientações é o recebimento das atividades enviadas pelos alunos via e-mail institucional, que foi criado para todos os servidores da educação do estado. Porém, na prática, na escola campo da pesquisa, o *WhatsApp*[70] está sendo a ferramenta mais usada para a comunicação professor/aluno e aluno/professor com a criação de grupos específicos de cada turma com seus professores, quase não existe participação pelo *chat* do aplicativo.

No entanto, apesar de todas essas ferramentas, muitos alunos não possuem acesso à internet e alguns também não conseguem conexão com a rede de TV, o que dificulta o processo ensino-aprendizagem principalmente dos discentes mais carentes.

Como previsto inicialmente, os participantes da pesquisa são os discentes do 2° ano do Ensino Médio (pois é nessa etapa que normalmente o conteúdo, função seno, é desenvolvido), porém, nesse processo de aulas remotas, não foi possível trabalhar com a turma toda, foi necessário fazer uma seleção. O critério utilizado para tal foi a participação do aluno no envio das atividades do PET, pois entendemos que aqueles que estão enviando regularmente suas atividades, possuem um maior acesso à internet.

A escola possui três turmas de 2º ano, duas no diurno na zona urbana e uma no noturno na zona rural (Anexo-Itaipú), optamos por trabalhar com os alunos na zona urbana em função do melhor acesso à internet. Vale lembrar que não só, neste momento de pandemia, em que o uso da internet está sendo o apoio para as escolas e professores no desenvolvimento de suas atividades, mas também antes dela, os alunos da zona rural sempre foram prejudicados por terem dificuldades de obtenção e acesso à rede, seja pela ausência de conexão, seja pela velocidade lenta da internet. Isso ocorre, muitas vezes, por falta de suporte da iniciativa pública, o que vem a limitar suas possibilidades de pesquisas e buscas por novos conhecimentos, informações essas constatadas por Bimbati (2020) em sua reportagem para a Revista Nova Escola.

[70] É um aplicativo gratuito de mensagens de texto, imagens, vídeos, documentos em PDF e chamadas de voz e vídeo para smartphones por meio de uma conexão com a internet.

Assim, das duas turmas do 2º ano na zona urbana, selecionamos doze alunos mediante o critério exposto anteriormente e criamos um grupo de WhatsApp intitulado "Pesquisa Professora Aline". Após adicionar os doze alunos, iniciamos explicando a pesquisa, o critério usado para a seleção dos participantes, ressaltamos a importância da disciplina, do conteúdo e do projeto na formação integral discente, procurando motivar a participação deles. Falamos dos Termos de Consentimento e de Assentimento que deveriam ser assinados, também foi esclarecido que, em nenhum momento, o estudante ficaria prejudicado, caso optasse por não participar da proposta em seguida, conforme previsto na Resolução 510/2016 do Conselho Nacional de Saúde, solicitamos que confirmassem a disponibilidade em participar no próprio grupo do *WhatsApp*. Todos os doze selecionados aceitaram fazer parte do experimento.

Nessas conversas, verificamos que o *WhatsApp*, para os participantes, é a melhor ferramenta de comunicação, bem como os encontros por videoconferências[71] realizadas pelo *Google Meet*[72], as quais podem ser gravadas com intuito de construir o *corpus* de análise da pesquisa, por meio dos diálogos e produções escritas.

Segundo Sforni (2014, p. 10), no experimento didático-formativo

> As aulas são videogravadas para posterior análise de modo que permitam acompanhar as interações discursivas entre professor-estudantes e estudantes-estudantes. Também se constituem em fontes de pesquisa materiais escritos e outros tipos de produção realizados pelos estudantes durante a intervenção. Na análise dos dados a atenção do pesquisador volta-se, concomitantemente, para o ensino e para a aprendizagem, e não apenas para a aprendizagem, já que a intenção é a de identificar modos de organização do ensino e modos de ação docente que potencializam o desenvolvimento dos estudantes durante a aprendizagem de determinados conteúdos escolares.

Nesse sentido, adotamos tais ferramentas para o desenvolvimento do experimento didático-formativo. Pelo grupo do *WhatsApp*, verificamos que, para os alunos, o melhor horário para realizarmos os encontros seria no final da tarde, pois muitos trabalham durante o dia.

A caracterização inicial desses participantes foi coletada via *WhatsApp* (Figura 35), na busca de conhecer o perfil dos participantes. Lembramos que os nomes escolhidos são fictícios para resguardar os sujeitos da pesquisa, conforme previsto nos documentos

[71] É uma tecnologia que permite o contato visual e sonoro entre pessoas que estão em lugares diferentes, dando a sensação de que os interlocutores encontram-se no mesmo local.
[72] É um serviço de comunicação desenvolvido pelo Google.

apresentados ao CEP, e foram escolhidos pela pesquisadora de maneira aleatória, sem nenhuma regra.

Figura 35: Caracterização dos participantes

-	Nome fictício	Sexo*	Idade	Maior escolaridade do responsável**	Gosta de matemática	Tem facilidade em matemática	Sempre estudou em escola pública
1	Joaquim	M	17	EM	Sim	Sim	Sim
2	Juca	M	17	EF	Sim	Não	Sim
3	Raimundo	M	17	EF	Sim	Não	Sim
4	Manoel	M	17	EF	Sim	Não	Sim
5	Joana	F	16	EM	Sim	Não	Sim
6	Maria	F	17	EF	Sim	Não	Sim
7	Antônia	F	17	EF	Sim	Sim	Sim
8	Lurdes	F	17	EM	Sim	Sim	Sim
9	Sebastiana	F	17	EF	Sim	Sim	Sim
10	Tereza	F	16	EF	Sim	Sim	Sim
11	Dora	F	17	EM	Sim	Não	Sim
12	Aparecida	F	16	EM	Não	Não	Sim

* M – masculino; F - feminino
** EM – Ensino Médio; EF – Ensino Fundamental

(Continuação)

-	Nome fictício	Já foi reprovado	Mora com os pais	Possui smartphone	A família possui carro	A família possui casa própria	Você trabalha	Possui internet em casa
1	Joaquim	Não	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Não
2	Juca	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Sim
3	Raimundo	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não
4	Manoel	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não
5	Joana	Não	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não
6	Maria	Não	Não	Sim	Não	Não	Não	Não
7	Antônia	Não	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Não
8	Lurdes	Não	Sim	Sim	Não	Não	Sim	Não
9	Sebastiana	Não	Não	Sim	Não	Não	Não	Não
10	Tereza	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
11	Dora	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não
12	Aparecida	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Não

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, verificamos que dos doze participantes, quatro são do sexo masculino e oito do sexo feminino, como a seleção dos alunos foi baseada na participação e envolvimento nas atividades on-line, constatamos que as mulheres possuem maior participação nas aulas virtuais.

Em relação à idade, nove tem dezessete anos e três com dezesseis anos, todos estão dentro da faixa etária esperada para o ano escolar que cursam. Predominou a escolaridade dos pais com Ensino Fundamental completo sendo sete ao todo, demonstrando uma baixa escolaridade dos responsáveis.

Ao perguntarmos se gostam de matemática, apenas um falou que não, os demais onze afirmaram gostar da disciplina, no entanto, ao perguntarmos se tem facilidade na disciplina, sete afirmaram que não possuem, apenas cinco responderam positivamente.

Todos os participantes afirmaram que sempre estudaram em escola pública, sendo que nenhum deles foi reprovado. Em relação a morar com pais, apenas dois não moram, residem com os avós. Sobre possuir smartphone, todos afirmaram que possuem, no entanto dez não possuem internet em casa, apenas plano de internet móvel para celular.

Se a família possui carro, apenas três afirmaram possuir, já em relação à casa própria apenas dois possuem, o restante mora de aluguel. Dos doze participantes, três já trabalham fora, os demais possuem dedicação exclusiva para as atividades escolares.

Em síntese, predominou a idade de 17 anos, o sexo feminino, a maioria dos pais, apenas, com Ensino Fundamental completo, a maioria gosta de matemática, mas alega que possui dificuldade. Todos afirmaram que sempre estudaram em escola pública, nenhum foi reprovado, moram com os pais, utilizam smartphone, mas não tem internet em casa, carro e casa própria e não trabalham. Esse é o perfil dos participantes dessa pesquisa e vários desses dados coincidem com o perfil dos alunos do Ensino Médio em grande parte das escolas públicas estaduais de Minas Gerais, como mostra o trabalho de Pereira (2016).

Após a primeira fase do experimento didático-formativo, segundo Aquino (2017), passamos à segunda, que é a elaboração do experimento didático-formativo, destacando que os dados coletados foram fundamentais na elaboração das tarefas, pois conseguimos identificar lacunas no processo ensino-aprendizagem fundamentais para a construção do pensamento teórico discente, como o enfoque no movimento lógico-histórico do conceito e o resgate à sua essência (nexos conceituais).

Em síntese, essa fase permitiu a apropriação dos elementos teóricos para o desenvolvimento da pesquisa, a contextualização legal e conceitual do objeto de estudo, o diagnóstico do já produzido. Esses elementos foram essenciais para a construção do objeto de pesquisa, para a elaboração das tarefas e situações de ensino-aprendizagem, ou seja, para a modelação de um experimento que fosse ao encontro das necessidades do professor-pesquisador e dos alunos envolvidos. Assim como subsidiou a análise e a produção do relatório.

5.2.2 A segunda etapa: Elaboração do sistema didático experimental

Na etapa de construção do experimento, segundo Aquino (2017), é necessário a elaboração de um plano de ensino que contenha a "organização didática superior" e a articulação da essência do conteúdo, ou seja, dos nexos conceituais com os objetivos, os métodos, os recursos, os prazos e as tarefas adotados em cada unidade do programa, critérios esses que têm como aporte os estudos de Davidov.

De acordo com Sousa, Panossian, Cedro (2014, p. 63), "tanto o conteúdo quanto os procedimentos metodológicos estarão articulados para que os estudantes se apropriem teoricamente dos conhecimentos matemáticos", em outras palavras eles complementam,

> Por meio de atividades adequadas e orientadas, o professor terá condições de perceber o movimento do pensamento algébrico de seus estudantes expresso por meio de diferentes representações das linguagens. Dessa forma e tendo consciência do processo de desenvolvimento de conceitos, procurará elaborar atividades ou questões que gerem nos estudantes a necessidade de aprender o conceito e assim, conduzam à formação de conceitos. (SOUSA, PANOSSIAN, CEDRO, 2014, p. 137)

Nesse momento de organização do experimento didático-formativo, é importante associarmos a abordagem histórico-cultural e a teoria da atividade com o ensino escolar, para isso é necessário recorrermos às contribuições dos três autores que fornecem a base do experimento: Leontiev, na determinação dos elementos constituintes das atividades: a necessidade, o motivo (objeto), a ação (objetivos) e as operações (condições); Vigotski, com a Zona de Desenvolvimento Proximal ou imediata, que será o espaço de atuação do experimento para atingir o nível potencial; e Davidov, que considera, em síntese, as seguintes ações de aprendizagem no experimento: transformação do objeto, criação e transformação de modelos, criação de problemas concretos e práticos, controle de ações e a Avaliação da aquisição da forma geral.

Para Davidov(2019, p. 172),

> Formular para o aluno, uma tarefa de estudo significa colocá-lo em uma situação que requer uma orientação para um modo generalizado de ação, desde o ponto de vista do conteúdo de sua solução em todas as variantes particulares e concretas possíveis das condições.

A elaboração das tarefas de estudo deveria ser realizada com a participação da professora, mas, conforme já afirmamos, a pandemia, o isolamento social e o acúmulo de atividades decorrentes deste contexto, a impossibilitou de participar. Assim, essa elaboração, a partir dos elementos analisados na primeira fase da pesquisa, resultou de intensas discussões entre a pesquisadora e a orientadora. Desse trabalho resultou o planejamento de todo o experimento (Apêndice A) e o Material de Estudo, contendo as tarefas e as situações (Apêndice B), que foi encaminhado aos alunos e serão detalhadas na seção 6, no momento da análise.

Importante frisar que tanto o planejamento, quanto a atividade de estudo estavam sujeitos a alterações no decorrer do desenvolvimento do experimento, dependendo do diagnóstico e da constante preocupação em atuar na Zona de Desenvolvimento Proximal dos alunos.

Iniciamos pela elaboração do planejamento do experimento “Atividade de estudo – função seno”, incluindo os seguintes aspectos: necessidades históricas e lógicas, conteúdos, as ações, segundo Davidov, as tarefas, os objetivos específicos das tarefas, as situações, os objetivos específicos das situações, as ações do professor, as ações do aluno, os objetivos específicos das ações e a quantidade de aulas para cada tarefa.

Foram planejados dois grupos de Tarefas (1 e 2) e as situações de aprendizagem, que somam ao todo 12 situações, um diagnóstico e a avaliação final, realizados em 10 encontros *online.* Adotamos o termo “situações”, apoiados em Davidov (2019, p 172), ao explicar que, para promover o desenvolvimento de uma Atividade de Estudo com o aluno, “significa colocá-lo em uma **situação** que requer uma orientação para um modo generalizado de ação, desde o ponto de vista do conteúdo de sua solução em todas as variantes particulares e concretas possíveis das condições”, ou seja, estamos colocando os alunos em situação, a partir de uma orientação a caminho de um modo generalizado de ação. A situação contém as ações enquanto proposta e as operações que serão executadas.

Após organizarmos o planejamento, passamos para a elaboração das tarefas e das situações. Nesta etapa, a preocupação foi sempre pensar em situações de estudo, que estivessem alinhadas com os fundamentos teóricos, com o diagnóstico e, especialmente, com o objetivo da pesquisa de organizar o processo ensino-aprendizagem da função seno, visando ao desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, o que implica ir em busca da essência do conceito, no seu movimento lógico-histórico, focando a abstração e generalização substantivas. Assim, a preocupação não foi com a originalidade das situações propostas, mas com os objetivos de cada uma e a sua contribuição para a totalidade do planejado.

A Tarefa 1[73] tinha como objetivo a apropriação pelo aluno do conceito da função seno no conjunto dos ângulos planos e foi desenvolvida a partir de quatro situações. O objetivo da Tarefa 2 era a apropriação pelo aluno do conceito da função seno no conjunto dos números reais, com seis situações. Esse conjunto de tarefas e situações foi organizado numa brochura a que chamamos de Material de Estudo (Apêndice A), que foi enviado aos alunos.

5.2.3 A terceira etapa: Desenvolvimento do experimento didático-formativo

Segundo Aquino (2017, p. 347), essa é a fase de desenvolvimento do planejado na etapa anterior. Sugere que a coleta de dados e monitoramento da situação experimental seja feita por meio da observação, gravando em vídeo e/ou de maneira presencial, ainda, há a sugestão de aplicação de entrevistas a professores e alunos e a aplicação de avaliação escrita, ao final do experimento. Essa fase inclui a preparação dos dados coletados para sua análise.

Optamos inicialmente e mantivemos a opção pelo experimento didático formativo como processo de investigação e análise do objeto, porque poderíamos colocar em movimento dialético os princípios teóricos e metodológicos da Teoria da Atividade de Estudo de Davidov, mesmo sem as condições em função da pandemia. Dentre elas um tempo maior para o desenvolvimento do experimento, que na experiência russa era longitudinal, durando décadas. Aquino sugere o tempo de 2 a 3 meses, o que não foi possível.

Como explicado anteriormente, em função da pandemia de COVID-19, a realização do experimento didático-formativo foi *online*, por meio de 10 encontros síncronos de forma remota gravados via *Google Meet*. Se, por um lado, é uma forma mais complicada de fazer um experimento, por outro, estamos aprendendo e pode ser uma opção para pesquisas com grupos distantes geograficamente. As videogravações geradas logo após o término do encontro, foram fundamentais para construir o *corpus* de análise da pesquisa.

A partir das gravações, pudemos ter acesso aos diálogos, às produções escritas dos alunos, enfim realizar a observação do desenvolvimento do experimento, o que permitiu, na

[73] Optamos por apresentar de modo mais detalhado cada uma das tarefas e as situações que as compõem no próximo capítulo, próximo da análise, visando facilitar para o leitor.

análise, identificar a apropriação dos alunos dos conceitos desenvolvidos, bem como analisar a organização do ensino.

Assim, o experimento foi desenvolvido durante duas semanas com encontros diários, totalizando 10 encontros com duração de aproximadamente 1 hora cada, conforme apresentado na figura 36:

Figura 36: Planejamento dos horários das reuniões online

Encontros	Data	Horário	Atividade desenvolvida
1	03/11/20(terça-feira)	17h30 às 18h30	Processo de obtenção dos termos de assentimento e do PCRE e Diagnóstico
2	04/11/20(quarta-feira)	17h30 às 18h30	Tarefas 1 e 2
3	05/11/20(quinta-feira)	17h30 às 18h30	Tarefa 3
4	09/11/20(segunda-feira)	17h30 às 18h30	Tarefa 4
5	10/11/10(terça-feira)	17h30 às 18h30	Tarefas 5 e 6
6	11/11/20(quarta-feira)	17h30 às 18h30	Tarefas 7 e 8
7	12/11/20 (quinta-feira)	17h30 às 18h30	Tarefa9
8	14/11/20 (sábado)	14h às 15h	Tarefa10
9	16/11/20 (segunda-feira)	17h30 às 18h30	Tarefas 11 e 12
10	17/11/20 (terça-feira)	17h30 às 18h30	Avaliação do experimento

Fonte: Elaborado pela autora

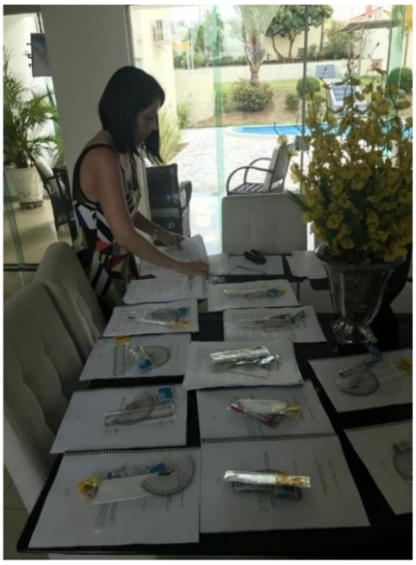
As datas e os horários dos encontros foram discutidos com os participantes pelo *WhatsApp*. Eles pediram para fazermos em dias seguidos em função do pacote de internet, pois muitos alegaram que possuem internet apenas no início do mês. Apesar de ser um curto espaço de tempo para trabalhar tantas relações conceituais, buscamos no desenvolvimento do experimento, tirar o máximo de proveito, dentro das condições objetivas impostas a sua realização.

Para o início da atividade de campo, combinamos com os alunos, pelo *WhatsApp*, que enviaríamos, via motoboy para as suas residências[74], os Termos de Assentimento (Apêndice C) e de Consentimento (Apêndice D) para recolher as devidas assinaturas deles e dos responsáveis, juntamente com o Planejamento dos horários das reuniões online (Figura 36), o Material de Estudo (Apêndice A), um compasso, um transferidor, uma régua e um pedaço de linha, vale lembrar que todo o material foi esterilizado com álcool em gel[75] e organizado pela

[74] Os endereços dos alunos foram coletados via whatsapp conversando com cada um deles no privado, tais endereços também serão mantidos em sigilo pela pesquisadora.
[75] Uma recomendação em tempos de pandemia do Covid 19.

pesquisadora (Figura 37), ficando definido o prazo de entrega dos termos assinados em dois dias, em que o motoboy passou novamente para recolher.Tais entregas aconteceram entre os dias 25 de outubro e 02 de novembro e todas as despesas envolvidas (xerox, materiais, entregas), foram pagas pela pesquisadora desse estudo.

Figura 37 - Organização do material



Fonte: Elaborado pela autora

Após as entregas, iniciamos o experimento no dia e horário agendados, dados que serão apresentados e analisados na próxima seção.

5.2.4 A quarta etapa: Análise dos dados e elaboração do relatório

A "Análise dos dados e elaboração do relatório" é o ápice do experimento, instante em que o pesquisador consegue construir e materializar a organização do ensino com vistas a consolidar o desenvolvimento integral do aluno. A divulgação do relatório junto à escola e aos participantes da pesquisa não pode deixar de acontecer, pois pode contribuir diretamente na prática dos professores.

Segundo Aquino (2017), a fase de análise requer mais trabalho e dedicação por parte do pesquisador,

> A análise se realiza tendo em vista um conjunto de categorias elaboradas previamente e com apoio nas evidências da aprendizagem e do

> desenvolvimento integral da personalidade dos alunos. Essas *evidências* aparecem nas falas dos alunos e dos professores, nos comportamentos dos sujeitos da pesquisa, nos registros que fazemos sobre as condições em que se realiza o processo de aprendizagem, nas atitudes, hábitos, habilidades e valores manifestados pelos sujeitos participantes. (AQUINO, 2017, p. 347, grifo nosso)

Em se tratando de uma pesquisa que visa ao desenvolvimento do pensamento teórico do aluno, é necessário trabalhar com indícios, com métodos indiretos, pois não é possível observar de forma direta os processos mentais (AQUINO, 2017).

Nos experimentos desenvolvidos por Vigotski fica evidente a influência do Materialismo Histórico e Dialético como método de pesquisa, pois nas suas investigações preocupou-se em analisar os processos de construção das funções e as mudanças psíquicas superiores dos indivíduos (percepção, memória, generalização, abstração, raciocínio) em um movimento de contradições, indo além da genética, ao considerar a experiência histórica e as influências do meio e as condições de vida do sujeito, tendo como objeto de análise a mediação e o papel dos signos e instrumentos.

Vigotski, segundo Aquino (2017), utiliza o método analítico-objetivo que é adequado ao experimento, para a busca das relações essenciais, baseando-se na indução e ao tempo guiando-a. Parte da "observação dos fatos, passa pela abstração do essencial e logo elabora a generalização, é o que permite a elaboração das conclusões do experimento didático-formativo". (p. 349).

Um dos processos adotados por Vigotski que relaciona teoria e método e permite a integração dos elementos contraditórios (fala, ação e percepção), foi o das "unidades de análise". As unidades de análise são caracterizadas por possuírem propriedades do todo e pela relevância dos acontecimentos históricos nesse movimento de construção e reconstrução,

> Com o termo unidade queremos nos referir a um produto de análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades básicas do todo, não podendo ser dividido sem que as perca. A chave para a compreensão das propriedades da água são as suas moléculas e seu comportamento, e não seus elementos químicos. A verdadeira unidade para a análise biológica é a célula viva, que possui as propriedades básicas do organismo vivo." (VIGOTSKI, 1991a, p.4l)

Entendemos a preocupação de Vigotski na análise das informações em não separar o todo da parte e a parte do todo, pois as "unidades", diferentes dos elementos, possuem todas as propriedades e características do todo. O exemplo da molécula de água foi usado por ele em vários trabalhos para explicar sua ideia de divisão em unidades e não em elementos, pois os elementos possuem características fragmentadas, reforça que os átomos de oxigênio e hidrogênio, separadamente, não possuem as mesmas características da água, já as unidades preservam a essência do fenômeno.

Porém, no desenvolvimento de uma pesquisa, no momento de análise dos dados em unidade, uma das grandes dificuldades é a construção das unidades de análise. Nesse sentido, Cedro (2008, p. 112) afirma que aparecem em situações do experimento que apresentam "coerência, consistência, originalidade, objetivação e são reveladoras da natureza e da qualidade das ações do indivíduo".

Na fase de análise, consideramos que as Atividades de Estudo são compostas por tarefas de estudo, que estabelecem a relação entre o objetivo da ação e as condições para alcançá-lo. Elas precisam exigir dos alunos: a análise do material factual, a dedução baseada na abstração e na generalização substantivas e o domínio do procedimento geral de construção do objeto de estudo. (DAVIDOV,1988). Esses movimentos realizados pelo aluno foram fundamentais para a análise.

Assim, neste estudo, a análise dos dados foi realizada por tarefas e em cada uma delas, analisando as situações, pois possuem seus objetivos específicos direcionados ao desenvolvimento do pensamento teórico a respeito da função seno. É importante explicar que essa análise dos dados considerou a densidade e a riqueza do material empírico construído com os adolescentes, o qual determinou as seguintes unidades de análise: a *Tomada de consciência da ação*, que é o estado supremo do homem que passa a ter consciência da consciência que possui, os seus atos deixam de serem mecânicos e passam a envolver a sua psique, dando origem ao desenvolvimento das funções superiores; o *Movimento de abstração teórica*; que é a redução do concreto ao abstrato e a *Síntese ou generalização teórica*, que é o movimento de ascensão do abstrato ao concreto pensado que é a apreensão da essência do objeto, indo ao encontro do objetivo da pesquisar que é a busca da construção do pensamento teórico. E fechando esse movimento, a partir desse concreto pensado, voltar ao individual, que são as aplicações do conceito.

> Ao final dos experimentos realizados, após o trabalho sistematicamente orientado pelo professor, com a intenção de captar esses indícios de aprendizagem, levamos os estudantes a analisar novas situações empíricas. Procuramos verificar se eles interagiam com essas situações de um modo teórico, mediado pelos conceitos, ou se as entendiam apenas como um fenômeno particular, novo, sem estabelecer relação com os conceitos estudados. Concluímos que essas atividades de avaliação são ferramentas

> importantes para verificar se o aluno realiza a ascensão do abstrato ao concreto. (SFORNI, 2015, p. 18)

A análise se debruçou sobre afirmações dos envolvidos (pois na puberdade a comunicação ganha destaque) e nas suas representações escritas, com objetivo de compreender a construção do pensamento teórico do conceito da função seno.

Vale destacar que as unidades de análise foram elaboradas após a construção de todo a parte teórica desse estudo e da realização do experimento com alunos, sendo elaborados nas discussões ocorridas nas inúmeras reuniões on-line entre a pesquisadora e sua orientadora em análise ao material empírico.

Na próxima seção, apresentaremos as análises feitas.

6 O EXPERIMENTO: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo dessa seção é apresentar e analisar os dados obtidos durante o a fase experimental, cujos fundamentos teóricos e metodológicos foram estudados nessa investigação. Corresponde à quarta etapa do experimento didático-formativo, segundo Aquino (2017).

O planejamento do experimento possui duas tarefas, a Tarefa 1 denominada “O conceito do seno com domínio nos ângulos planos”, que tem como objetivo desenvolver o conceito do seno com domínio nos ângulos planos pelo seu movimento lógico-histórico, sendo composto por quatro situações, cada uma com seu objetivo específico e elaboradas com vistas aos nexos conceituais: fluência, interdependência, variável, campo de variação, semelhança e proporcionalidade.

A Tarefa 2 intitulada “Explorando o conceito da função seno no conjunto dos números reais” tem como objetivo desenvolver o conceito da função seno com domínio no conjunto dos números reais por meio da exploração da função de Euler e seu movimento lógico-histórico. Possui oito situações também com objetivos específicos bem definidos e elaboradas com vistas aos nexos conceituais movimento (fluência), interdependência, variável, campo de variação, periodicidade e simetria.

No entanto, descrevemos e analisamos apenas as situações do experimento que apresentaram indícios (relações e assimilações de conceitos) presentes nas reações, nos diálogos, nos questionamentos, na escrita, da apropriação dos conceitos e do desenvolvimento do pensamento teórico a partir das ações e operações realizadas pelo aluno no desenvolvimento das tarefas, considerando as unidades de análise: **Tomada de consciência da ação**; **Movimento de abstração teórica** e **Sínteses (generalizações teóricas)**, com destaque também aos momentos contraditórios. São elas: Situações 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11 e 12. As situações 5, 6 e 7, não foram descritas, pois envolvem conceitos e procedimentos importantes para que o aluno pudesse compreender o movimento lógico-histórico de construção do conceito, no entanto elas aparecerão ao longo das demais situações.

Além das doze situações acima citadas, o experimento é composto e iniciado pelo “Diagnóstico”, pois por meio dele foi possível compreender o que os alunos eram capazes de realizar sozinhos sobre a função seno, isto é, fazer a identificação do desenvolvimento real, para posterior atuação na ZDP. A partir desse diagnóstico, pudemos realizar intervenções para que o desenvolvimento do experimento e a formação do pensamento teórico se concretizasse e os alunos pudessem aproximar da zona de desenvolvimento potencial.

6.1 O primeiro encontro pelo Google Meet: esclarecimentos e "Diagnóstico"

O primeiro encontro do experimento foi realizado no dia 03 de novembro às 17h30min, via *Google Meet* sendo que o link foi enviado via *WhatsApp,* com a participação dos doze participantes que se dispuseram a participar. Foi dividido em duas partes, a primeira parte, com duração de aproximadamente 30 minutos, foi destinada à explicação para os alunos e seus responsáveis do objetivo do trabalho, dos benefícios para os alunos, dos termos de consentimento e assentimento e dos horários de realização. Consideramos que esse primeiro contato foi fundamental para criarmos as condições propícias para o desenvolvimento do trabalho, com vistas a uma participação efetiva e significativa dos sujeitos. Em seguida perguntamos individualmente para cada participante e responsável presente se gostariam de participar, todos afirmaram que sim.

Após o esclarecimento de todas as dúvidas e perguntas, iniciamos a segunda parte do encontro, que foi destinada ao desenvolvimento do diagnóstico na busca de identificar a Zona de Desenvolvimento Real dos alunos a respeito da função seno, conhecer o que o aluno é capaz de fazer sozinho sem ajuda do professor ou dos colegas e o que ele ainda precisa para atingir o objetivo da tarefa. Teve a duração de, aproximadamente, 25 minutos. Em outras palavras, o objetivo desse diagnóstico foi entender "o que" e o "como" o aluno sabe a respeito da função seno, ou seja, identificar apropriações de conceitos, dificuldades e os interesses, a fim de considerá-las no desenvolvimento das tarefas e suas situações.

Cabe destacar que a pesquisadora, no desenvolvimento desse experimento, possui o papel de organizadora do ensino, de interventora, de criadora de motivos, ações necessárias ao desenvolvimento das funções psíquicas superiores, ao atuar na ZDP de modo a contribuir para viabilizar os processos que estão em fase de amadurecimento.

O planejamento foi realizado considerando os elementos estruturais da atividade, segundo Leontiev (1978), objetivos, objeto, necessidade, motivos, ação, operações. Apresenta as ações do professor e as dos alunos, conforme se vê a seguir.

Figura 38—Planejamento do diagnóstico

Necessidades: Histórica e lógica	**Conteúdos**	**Situação**	**Objetivos específicos do diagnóstico**
Medir distâncias inacessíveis e analisar movimentos periódicos	A função seno com domínio nos ângulos planos e no conjunto dos números reais	Avaliação diagnóstica	Entender "como" o aluno e "o que" o aluno sabe a respeito da função seno. Buscar indícios de apropriação dos nexos conceituais da função seno.

Ações (do professor)	**Ações (do aluno)**
Propor questões relacionadas à História da Trigonometria e dialogar com os alunos. Solicitar a eles que resolvam os dois problemas propostos e após um tempo, que eles apresentem o que pensaram individualmente.	Responder as questões propostas pelo professor. Resolver os dois problemas. Registrar o seu raciocínio no material. Discutir em grupo.

A segunda parte do encontro foi organizada em três momentos, sendo o primeiro, uma conversa com os alunos. seguindo o roteiro:

1) Vocês já estudaram Trigonometria?
2) Escreva uma palavra que lembra os assuntos estudados sobre Trigonometria.
3) E sobre a Trigonometria no círculo, de que vocês lembram?
4) A expressão função seno é entendida como sendo o que?

6.1.1 Análise do primeiro momento

Observamos que dos dozes sujeitos, todos confirmaram que já estudaram trigonometria. Na segunda pergunta, quando pedimos para escreverem uma palavra que lembrasse os assuntos estudados em trigonometria, tivemos as seguintes respostas:

Tabela 7 – Palavras evocadas[76]pelos alunos em relação ao estudo de trigonometria

Palavras	Quantidade
Triângulo	7
Círculo	1
Hipotenusa	1
Seno	1
Não lembro	2

Fonte: Elaborado pela autora

A palavra triângulo é a que mais apareceu, remetendo assim à trigonometria cujo domínio são os ângulos planos, bem como a palavra hipotenusa, que é relacionada aos triângulos retângulos. Apesar de a trigonometria na circunferência, cujo domínio é o conjunto dos números reais, ter sido estudada neste ano escolar de 2020 antes da pandemia, a palavra círculo apareceu apenas uma vez. Dois dos participantes disseram que não lembravam de nenhuma palavra relacionada ao estudo da trigonometria. Apenas um participante falou a

[76] O termo “evocadas” está sendo usado nesse trabalhado como sinônimo de lembrado, falado, não tendo nenhuma relação com as representações sociais.

palavra seno, que é parte do objeto de estudo, nesse momento perguntamos o que lembrava sobre o seno, falou que nada, só lembrava o nome.

Ao perguntamos sobre o que lembravam em relação à trigonometria no círculo, algumas palavras sobre o assunto foram mencionadas (Tabela 8).

Tabela 8 – Assuntos lembrados pelos alunos em relação à trigonometria no círculo

Assuntos	Quantidade
Quadrantes	3
Seno	5
Cosseno	3
Tangente	3
SETACO	1
Medir os ângulos	1
Lembro de fazer conta	1
Não lembro de nada	1

Fonte: Elaborado pela autora

Observamos que as palavras que mais apareceram foram “seno” com cinco citações, “quadrantes”, “cosseno” e “tangente”, com três cada. Quando o aluno falou a palavra SETACO, perguntamos se lembrava o que significava essa palavra, afirmou que se relacionava aos sinais, mas não lembrava como era.

A quarta pergunta é sobre o que entendem pela expressão “função seno”, as respostas foram as seguintes:

Tabela 9 – Significado da expressão “função seno” atribuído pelos participantes

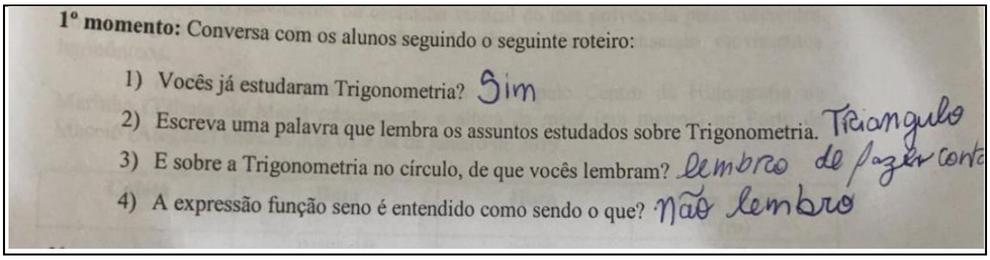
Respostas	Quantidades
Cateto oposto e a hipotenusa	2
Eixo y	2
Cateto oposto	1
Imagem dentro do intervalo	1
Não lembro	6

Fonte: Elaborado pela autora

Três alunos associaram o seno com os lados do triângulo retângulo (cateto oposto e hipotenusa; cateto oposto), um a relacionou com o eixo y, porém 50% não conseguiram lembrar nada sobre a função seno.

Abaixo seguem algumas imagens dos registros dos alunos.

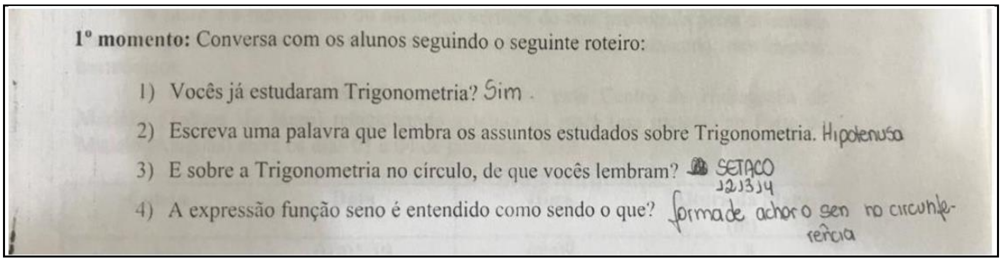
Figura 39 – Respostas de Raimundo



1º momento: Conversa com os alunos seguindo o seguinte roteiro:

1) Vocês já estudaram Trigonometria? Sim
2) Escreva uma palavra que lembra os assuntos estudados sobre Trigonometria. Triangulo
3) E sobre a Trigonometria no círculo, de que vocês lembram? lembro de fazer conta
4) A expressão função seno é entendido como sendo o que? Não lembro

Figura 40 – Respostas de Lurdes



1º momento: Conversa com os alunos seguindo o seguinte roteiro:

1) Vocês já estudaram Trigonometria? Sim
2) Escreva uma palavra que lembra os assuntos estudados sobre Trigonometria. Hipotenusa
3) E sobre a Trigonometria no círculo, de que vocês lembram? SETACO
4) A expressão função seno é entendido como sendo o que? forma de achar o sen no circunferência

Quando o adolescente fala que "não lembra", apesar de já ter estudado determinado assunto, sentimos a necessidade de discutir o papel da memória. Recorremos a Vigotski, quando trata a memória no contexto do desenvolvimento psicológico, "A verdadeira essência da memória humana está no fato de os seres humanos serem capazes de lembrar ativamente com a ajuda de signos" (VIGOTSKI, 2007, p. 49)". Na escola, vários conceitos são desenvolvidos com os alunos nas diferentes disciplinas que compõem o currículo escolar. O aluno se apropria de muitos deles, quando a aprendizagem ocorre, porém percebemos nas respostas dadas a essas questões, que apelavam para a memória, que eles precisavam de signos para ativar o pensamento acerca do conceito – a palavra fora de um contexto parece não ser suficiente. Vigotski (2007) concluiu que o papel da memória no sistema das funções psicológicas na criança é diferente do papel que desempenha para os adolescentes.

> Do ponto de vista do desenvolvimento psicológico, a memória, mais do que o pensamento abstrato, é característica definitiva dos primeiros estágios do desenvolvimento cognitivo. Entretanto, ao longo do desenvolvimento ocorre uma transformação, especialmente na adolescência. Pesquisas sobre a memória nessa idade mostraram que no final da infância as relações interfuncionais envolvendo a memória invertem sua direção. Para as crianças, pensar significa lembrar; no entanto, para o adolescente, lembrar significa pensar. Sua memória está tão "carregada de lógica" que o processo de lembrança está reduzido a estabelecer e encontrar relações lógicas; o reconhecer passa a considerar em descobrir aquele elemento que a tarefa exige que seja encontrado. (VIGOTSKI, 2007, p. 49)

Assim, a memória para os adolescentes está vinculada ao pensamento, “lembrar significa pensar”, isto é, estabelecer relações lógicas. A palavra seno, isolada de um contexto mediador não faz sentido para o aluno, não provoca o pensar. A metade dos participantes diz não lembrar. Podemos questionar, inclusive, a forma da pergunta feita, que não contextualiza o conceito, que não traz signos mediadores.

Nessa linha de raciocínio e recorrendo a esse mesmo autor, o desenvolvimento dos conceitos, dos significados das palavras (signos linguísticos) pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar. (VIGOSTSKI, 1987)

Instigá-los a pensar e falar palavras relacionadas ao conceito é compreender a sua formação, pois o processo de formação dos conceitos científicos, que tem a palavra como signo, se inicia com uma definição verbal e operações mentais de abstração e generalização. Segundo Davidov (1982), a abstração, a generalização e o conceito são processos básicos da aprendizagem escolar.

Nesse momento indagamos: Até que ponto podemos dizer que o aluno tem domínio ou não de um conceito científico aprendido na escola, após passar um tempo de estudo do assunto? Na tarefa proposta, não fica evidente dizer que sabem ou não.

6.1.2 Análise do segundo momento

O segundo momento foi a aplicação de uma situação-problema sobre a função seno com domínio no conjunto dos ângulos planos. Foi elaborada tratando das queimadas do Pantanal, assunto esse que estava sendo altamente discutido nos diferentes meios de comunicação naquele momento. Nessa situação, os nexos conceituais *fluência* (movimento) e *interdependência* estão presente, pois a trigonometria, especificamente a função seno, são instrumentos de leitura da realidade..

Problema: O exército brasileiro recebeu a missão de ajudar a controlar as queimadas do Pantanal. Em um determinado trecho até chegar aos focos de incêndio, precisaram construir uma tirolesa para atravessar com os equipamentos, para isso usariam duas árvores que estavam em diagonal em relação ao rio Paraguai, conforme figura 1, uma em cada lado da margem para amarrar o cabo de aço. No entanto, precisavam descobrir quantos metros de cabo de aço usariam, para isso fizeram algumas marcações. A árvore do lado onde estavam chamaram de ponto A, a árvore do outro lado do rio chamou de B. Como tinham em mãos um teodolito portátil (aparelho usado para medir ângulos), marcaram um ponto C na margem onde estavam, formando um ângulo de 90º ACB. Tinham a informação que a largura do rio naquele ponto era de aproximadamente 250m e novamente usando o teodolito conseguiram medir o ângulo BAC de 30º.

Figura 1

A partir dessas informações, qual o comprimento do cabo de aço (AB) que será necessário para construir a tirolesa?

Você tem alguma ideia para a resolução dessa situação-problema? Se sim, qual é?

Essa situação-problema mostra ao aluno a necessidade pessoal de saber medir distâncias inacessíveis, lembrando Leontiev que defende a importância da necessidade e do motivo para o estudo de um conceito. Nela, estão presentes, o conceito de variável independente, o comprimento da tirolesa, que depende da largura do rio e do ângulo formado por dois segmentos, a distância da árvore ao ponto C e o comprimento da tirolesa, portanto, a ideia de interdependência, nexo interno do conceito de função. Envolve o conhecimento do movimento lógico-histórico desse conceito, pois a ideia de seno está ligada historicamente à medida de distâncias inacessíveis e exige o conhecimento do significado do seno no triângulo retângulo, ou seja, essa situação-problema foi elaborada com a intenção de gerar um motivo interior nos estudantes, a partir de uma necessidade.

A intenção com esse problema era identificar como os alunos “organizam” o seu pensamento algébrico e quais as suas dificuldades e facilidades no processo de resolução desse problema, de modo especial em relação à aplicação do conceito teórico de seno.

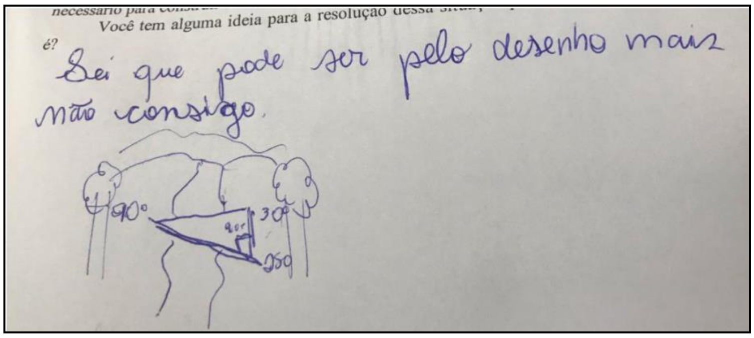
Junto com os alunos, fizemos a leitura do problema e seguida de algumas perguntas: Do que trata o problema? O que tem que ser feito? Como vocês iniciariam a resolução desse problema?

Falaram que se fizessem um desenho facilitaria a resolução. Perguntamos como seria esse desenho. Alguns falaram que não sabiam, fomos instigando: Seria uma figura geométrica? Responderam que sim, e surgiu a palavra triângulo. Foi dado um tempo para que desenhassem o triângulo e compartilhassem o desenho.

Esse é um momento do experimento que merece destaque, pois, segundo Vigotski (2001), esses novos conceitos surgem no processo de execução de uma tarefa, quando os alunos são desafiados, instigados, saem da sua zona de conforto, das situações cotidianos corriqueiras. O intelectual, ou seja, as funções psíquicas superiores articulam-se com a comunicação (palavra, linguagem, escrita, desenhos) como uma forma de expressar a organização psicológica na busca de formar novos conceitos no desenvolvimento do pensamento teórico. Nesse sentido, Davidov (1999, p. 5), afirma "depende o desenvolvimento nos alunos das capacidades criativas, do ativismo, da independência".

O participante Raimundo afirmou que sabia que teria que fazer o desenho de um triângulo, mas não estava conseguindo. (Figura 41).

Figura 41 – Representação de Raimundo



As participantes, Aparecida e Dora, apresentaram os desenhos abaixo. Neles observamos que buscam aplicar o Teorema de Pitágoras, porém usando as medidas dos lados misturadas com as dos ângulos, demonstrando falta de conhecimento teórico sobre o assunto.

Figura 42 – Representação de Aparecida

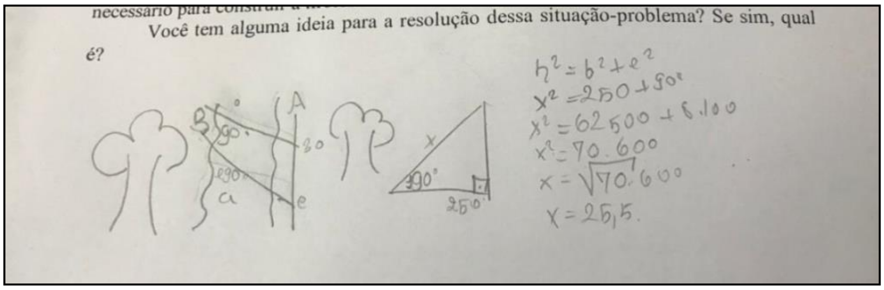
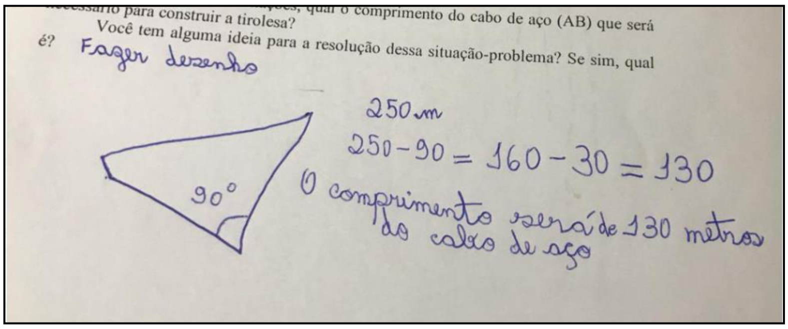


Figura 43 – Representação de Dora



Verificamos que as apropriações não chegam aos nexos internos, pois não identificam o campo de variação das variáveis envolvidas. Não são construções teóricas. Indicamos que a construção do pensamento foi feita de forma fragmentada ou, até mesmo não foi feita. No ensino atual, foca-se na resolução dos exercícios, não se discutem os conceitos, o objetivo central é achar o resultado, independente do que ele possa representar e de como isso será feito.

A construção de um conceito em matemática envolve uma rede conceitual, isto é, há um movimento de conceitos mais simples, para conceitos mais complexos. Por exemplo, para chegarmos ao conceito da função seno no conjunto dos ângulos planos, existem outros conceitos que estão envolvidos: o de ângulos, o de triângulo, lados do triângulo, o de medidas de lados e ângulos, com uma função específica no interior dessa figura que se chama triângulo, o de proporcionalidade, além de outros. Há elementos de natureza diferentes, lado é uma medida linear e ângulo não o é, por isso não podemos somá-los ou subtraí-los. Ao somar lados com ângulos, há uma falta de apropriação desses elementos, que são importantes. Cada um dos conceitos envolvidos está relacionado a outros conceitos, cada um com seus nexos internos e externos.

Nesse sentido, percebemos que o aluno não consegue compreender as suas ações na execução do problema. Essa análise vai ao encontro das afirmações de Serconek (2018, p. 163) ao dizer, “no processo de organização e de formação do pensamento teórico, a reflexão é um componente por meio do qual o sujeito constata e compreende as razões de suas ações em conformidade com as circunstâncias do problema dado em situação de ensino”, indo ao encontro do “paradigma do exercício” de SKOVSMOSE (2000).

6.1.3 Análise do terceiro momento

O terceiro e último momento desse primeiro encontro foi o desenvolvimento da situação-problema, cujo domínio é o conjunto dos números reais, voltados para a análise do gráfico da função seno. Vale lembrar que o objetivo com esse diagnóstico é entender “como” o aluno e “o que” o aluno sabe a respeito da função seno. Essa situação-problema está diretamente ligada aos nexos conceituais internos da função seno, como o movimento (fluência), a interdependência, a variável e o campo de variação, além do movimento do tipo periódico.

A maré é o movimento ou oscilação vertical do mar provocada pelas diferentes atrações gravitacionais da Lua e do Sol sobre a Terra, causando movimentos harmônicos.A tabela abaixo apresenta a previsão feita pelo Centro de Hidrografia da Marinha (Tábuas de Maré) relacionando a altura da maré (em metros) no Porto de Maceió (Alagoas) entre os dias 01 e 04 de janeiro de 2019.

Coleta	Data	Hora	Altura da Maré(m)
1	01/01/19	00:09	1,8
2	01/01/19	06:36	0,5
3	01/01/19	12:38	1,7
4	01/01/19	18:56	0,5
5	02/01/19	01:06	1,8
6	02/01/19	07:24	0,5
7	02/01/19	13:24	1,8
8	02/01/19	19:45	0,4
9	03/01/19	01:56	1,9
10	03/01/19	08:08	0,4
11	03/01/19	14:08	1,9
12	03/01/19	20:28	0,4
13	04/01/19	02:38	1,9
14	04/01/19	08:49	0,4
15	04/01/19	14:49	2,0
16	04/01/19	21:06	0,3

A partir dessas informações, construa o gráfico relacionando a coleta, em x, e a altura das marés (m), em y e encontre a altura da maré na 20ª coleta.

Iniciamos fazendo a leitura do problema junto com os alunos. Falamos um pouco sobre o movimento das marés, como é causado. Solicitamos a construção do gráfico, discutimos quais informações seriam colocadas em cada eixo e concluímos que seria a coleta, no eixo x, porque se refere a variação de tempo, independente, a altura das marés, no eixo y. Em seguida, pedimos que compartilhassem os seus desenhos. Importante entendermos, segundo Serconek (2018, p. 154), que, “os modelos literais ou gráfico-espaciais têm função preponderante na formação dos conceitos matemáticos, assim como a transformação deles no estudo e na abstração de relações”. Essas são etapas da construção do pensamento teórico, segundo Davidov (1982).

Figura 44 – Representação de Joana

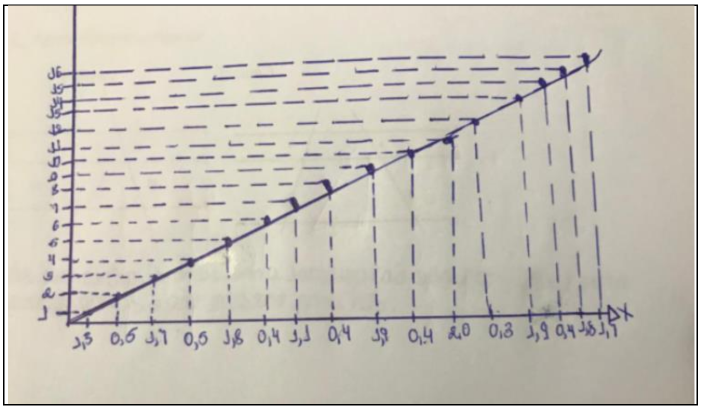
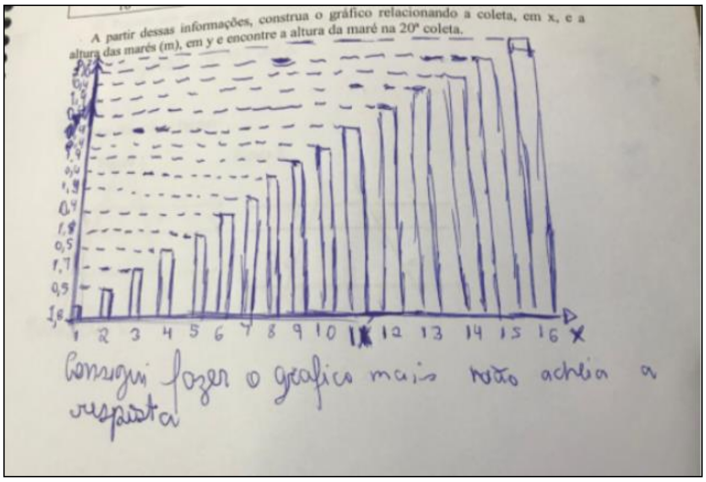


Figura 45 – Representação de Raimundo 2

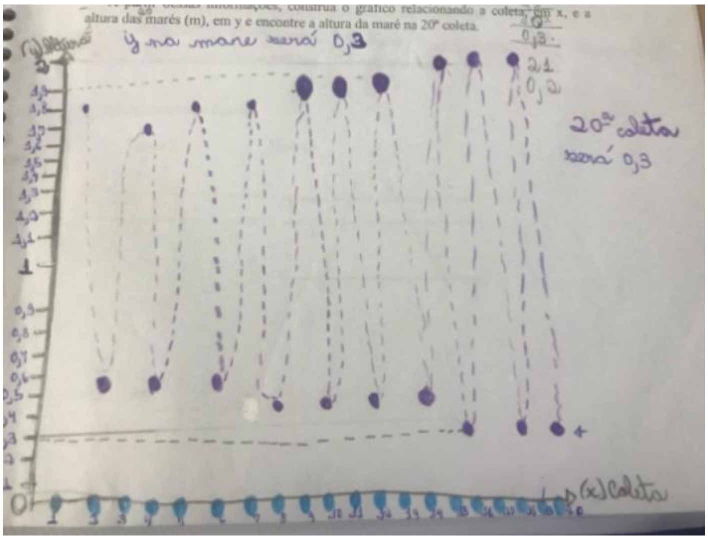


Transcrição: “Consegui fazer o gráfico mais não achei a resposta”

Nestas representações de Joana e Raimundo, verificamos a troca das informações dos eixos, no entanto o que mais nos chama atenção é a disposição dos valores nos eixos x (Joana) e y (Raimundo), sem observar a ordem crescente dos dados, o que demonstra uma falta de conhecimentos básicos da reta numérica. O gráfico de Joana se transformou em uma reta crescente, sem nenhum destaque à oscilação dos dados relacionados à altura das marés. Já o gráfico do Raimundo resultou em colunas, também, sem nenhum destaque à oscilação. Novamente fica evidente a falta de apropriação de conceitos básicos como os da reta numérica e seus nexos conceituais internos e externos. Isso se constitui em evidências de um ensino em que a representação não tem uma ligação com o pensamento.

O único gráfico que foi construído, obedecendo às informações dos eixos e que conseguiu expressar a oscilação, bem como a movimentação na altura das marés foi o gráfico construído pela participante Dora, demonstrando que essa aluna, de fato, tem domínio de que os eixos são ordenados, o que contribuiu para a representação correta dos dados.

Figura 46 – Representação de Dora 2



Concluímos que, tanto no segundo momento dessa fase de diagnóstico do experimento, quando os alunos misturaram as medidas lineares com as medidas de ângulo, quanto, nesse terceiro momento, em que houve a falta de ordenação dos eixos na construção do gráfico, há indícios escritos de que não há aprendizagem conceitual, visando ao desenvolvimento teórico dos alunos, ou seja, relação entre os conceitos de medidas. Prepondera o paradigma do exercício, ou seja, o objetivo é apenas resolver os exercícios, o que nos leva a concluir que nem mesmo o pensamento empírico é desenvolvido, pois não há o domínio de nexos externos, próprios desse tipo de pensamento, como a classificação, a sua expressão por meio de palavras e as representações.

Na análise dos gráficos com foco nos nexos conceituais, variável e campo de variação, fica claro para a pesquisadora que os alunos que trabalharam em um campo de variação que não era o dos números reais, considerando a variável tempo, não traduziram devidamente essa situação, não perceberam que a variável independente é o tempo. Por exemplo, o gráfico da participante Joana resultou em uma reta, o campo de variação que ela considerou foi o do conjunto dos números inteiros, para um experimento cujo campo de variação é o dos números reais. A aluna Dora conseguiu expressar o gráfico corretamente porque considerou que esse tempo é contínuo.

Assim, segundo Davidov (1999), para a realização de uma atividade de estudo completa é necessária a execução das ações e operações de maneira correta pelos alunos, e, para que isso ocorra, precisam buscar métodos diferentes dos já conhecidos. Por exemplo, em uma atividade de matemática, poderia usar formas gráficas ou simbólicas na sua solução, nesse caso, o gráfico, como uma forma de linguagem. Porém, nesse momento, indagamos como o aluno conseguirá fazer essas representações se é educado no paradigma do exercício?

Após a análise dos dados obtidos nesses três momentos do "Diagnóstico", confirmamos a necessidade de desenvolvermos um experimento didático que organize o processo ensino-aprendizagem da função seno, visando ao aprimoramento da aprendizagem e ao desenvolvimento do pensamento teórico, com foco nos nexos conceituais da função seno. Verificamos também que foi necessário, no decorrer do experimento, trazer para a discussão conceitos básicos e preliminares à função seno, como a importância de não operar (somar e subtrair) valores de grandezas diferentes e a importância da ordenação da reta numérica.

Nesse sentido, embora tivéssemos feito um planejamento anterior das tarefas, procuramos no seu desenvolvimento ficar atentos ao revelado no diagnóstico, procurando atuar na ZDP.

A seguir, faremos a apresentação e análise das duas tarefas por meio das situações propostas com foco nas unidades de análise da atividade de estudo definidas~~.~~

6.2 Tarefa 1 - O conceito do seno com domínio nos ângulos planos

A Tarefa 1 é composta por um conjunto de quatro situações, cada uma com um objetivo específico, porém com o objetivo geral de desenvolver o conceito do seno no domínio dos ângulos planos, no seu movimento lógico-histórico, cujo planejamento está no Figura 47.

Figura 47 – Planejamento da Tarefa 1

Necessidades: Histórica e lógica	**Conteúdos**	**Ações (DAVIDOV)**	**Objetivos específicos das Tarefas**
Medir distâncias inacessíveis	O seno com domínio nos ângulos planos: Semelhança Proporcionalidade Teorema de Tales	Transformação do objeto Criação de modelos Transformação de modelos Criação de problemas concretos e práticos Controle de ações	Desenvolver o conceito do seno com domínio nos ângulos planos pelo seu movimento lógico-histórico.

Ações (do professor)	**Ações (do aluno)**	**Objetivos específicos das situações propostas**
Propor questões relacionadas ao assunto e dialogar com os alunos. Incentivá-los a	Responder as questões propostas pelo professor. Pesquisar na internet. Discutir em grupo.	* Assimilar aspectos do movimento histórico-lógico da trigonometria. *Apreender na situação proposta o que é geral, ou seja, a existência de uma razão constante entre os segmentos determinados pelas retas transversais

pesquisar na internet e responder aos questionamentos.		num feixe de retas paralelas. * Assimilar a essência do conceito de semelhança * Apropriar-se da essência do seno (razão constante que existe entre lados em triângulos retângulos, independentemente do tamanho do triângulo, dependendo do ângulo).

6.2.1 Análise da Situação 1

A Situação 1 tem como objetivo específico que o aluno seja capaz de assimilar aspectos do movimento histórico-lógico da trigonometria, por meio das perguntas, das discussões e pesquisas realizadas. Para isso, as ações da pesquisadora foram voltadas a propor questões relacionadas ao assunto e dialogar com os alunos, incentivá-los a pesquisar na internet e responder aos questionamentos, buscando atuar na Zona de Desenvolvimento Proximal. As ações dos alunos foram voltadas a responder as questões propostas pela pesquisadora, a pesquisar na internet, a registrar o seu raciocínio no material e a discutir em grupo.

Na perspectiva do materialismo histórico dialético e ao seu requisito fundamental que é estudar os fenômenos como processo, e, não, como fatos isolados da realidade histórica, é que propusemos essa situação.

Nesse primeiro momento do segundo encontro pelo *Google Meet*, trouxemos algumas indagações para as nossas discussões:

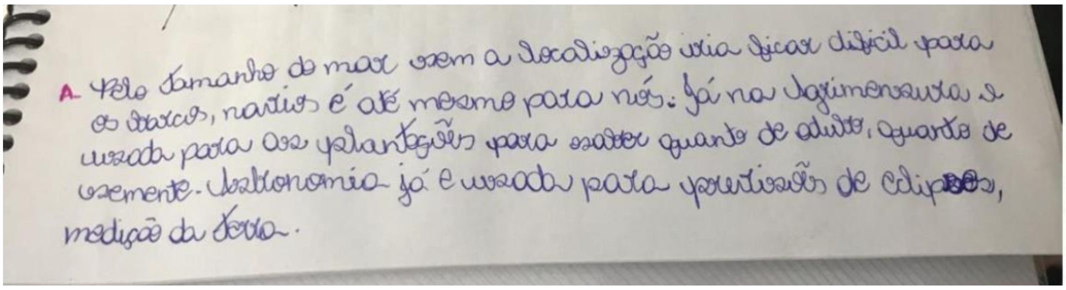
1_Vamos falar um pouco de história?
• O que é a Trigonometria? • Como surgiu? • Quais os principais matemáticos ligados ao desenvolvimento da trigonometria?

Para iniciar:
a) Quase tudo que usamos ou fazemos no nosso dia a dia necessita de conceitos de matemática, seja um simples olhar as horas até o momento de ir ao supermercado fazer as compras. No entanto, às vezes, não damos a ela (Matemática) a importância que realmente tem, quer ver? Discuta com seus colegas se eles sabem o que é Astronomia, Agrimensura e Navegações. Como você acha que a Matemática contribuiu no desenvolvimento desses estudos? b) Uma área da matemática é muito usada nesses estudos, vamos pesquisar qual é, usando o Google.
c) Pesquise, usando o Google, alguns exemplos de situações em os homens aplicavam conhecimentos trigonométricos. E os registros, como faziam?Vamos buscar um dos principais nomes da Trigonometria? E qual foi a primeira obra escrita? d) Pensem nos estudos de Matemática, até aqui, e dê exemplos de nomes de grandes estudiosos a ela ligados, dos quais vocês se lembram.

Sobre o que sabem a respeito da Astronomia, Agrimensura e Navegações, responderam que a Astronomia era relacionada ao espaço e aos astros, a agrimensura à plantação e as navegações aos mares. Porém, ao perguntarmos as contribuições da

Matemática no seu desenvolvimento, responderam que foi "através de cálculos". Nesse momento perguntamos que tipo de cálculos, falaram "cálculos de localização". Instigamos um pouco mais, perguntamos como achavam que faziam esses cálculos, falaram que seria "por meio de desenhos". Perguntamos o que precisavam nesses desenhos, disseram que seriam "medidas de ângulos e distâncias", porém muitos alunos ficaram calados e, apenas, ao final Raimundo falou "A matemática está em tudo mesmo, não é professora?". Nesse momento destacamos a unidade *tomada de consciência da ação*, pois foi possível mostrar ao aluno situações do movimento lógico-histórico do conceito que propiciaram o seu desenvolvimento. Davidov afirma que a consciência é o guia das ações do homem, que busca entender as suas próprias ações cognitivas, ou seja, a consciência teórica dirige a atenção do homem para o entendimento de suas próprias ações cognitivas, para a análise do próprio conhecimento.

Figura 48 – Resposta de Tereza

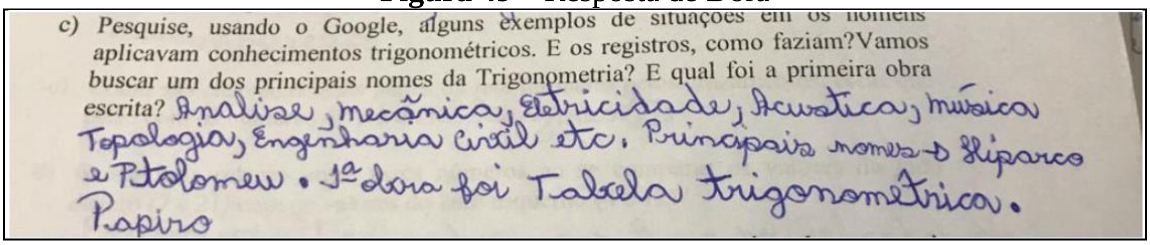

A. Pelo tamanho do mar sem a localização iria ficar difícil para os barcos, navios é até mesmo para nós. Já na Agrimensura e usada para as plantações para saber quanto de adubo, quanto de semente. Astronomia já é usada para previsões de eclipses, medição da terra.

Transcrição: "Pelo tamanho do mar sem a localização iria ficar difícil para os barcos, navios e até mesmo para nós. Já na Agrimensura e (é) usada para as plantações para saber quanto de adubo, quanto de semente. Astronomia já é usada para previsões de eclipses, medição da terra."

Na pesquisa solicitada na letra b, pesquisarem no Google. Nove deles responderam a "Trigonometria", e um, a "Estatística", dois não encontraram.

Já na pesquisa da pergunta c sobre exemplos de situações em os homens aplicavam conhecimentos trigonométricos, dos registros, principais nomes e primeira obra, sugerimos realizarem a busca no Google. Destaco as respostas da participante Dora.

Figura 49 – Resposta de Dora


c) Pesquise, usando o Google, alguns exemplos de situações em os homens aplicavam conhecimentos trigonométricos. E os registros, como faziam? Vamos buscar um dos principais nomes da Trigonometria? E qual foi a primeira obra escrita? Analise, mecânica, Eletricidade, Acustica, musica Topologia, Engenharia civil etc. Principais nomes → Hiparco e Ptolomeu. 1ª obra foi Tabela trigonométrica. Papiro

Em sua resposta traz algumas áreas que usam a trigonometria como a análise, a mecânica, a eletricidade, a acústica, a música e a engenharia civil. Em relação aos registros comentaram a respeito dos Papirus. Nas pesquisas, o principal nome que citaram foi o de Hiparco, o aluno Manoel falou que é considerado o "pai da trigonometria". Nesse momento, intervimos e falamos que usar o termo "pai" não é muito apropriado, pois foram vários os estudiosos que construíram os conceitos trigonométricos, Ptolomeu também foi citado. A principal obra foi citada por Lurdes o "Almagesto" e Dora comentou da "tabela trigonométrica". Após essas pesquisas e respostas, trouxemos um pouco da história do desenvolvimento da Trigonometria explicando o seu movimento lógico-histórico.

O último questionamento foi sobre nomes de grandes estudiosos ligados à Matemática de que lembrassem. Nesse momento, surgiram vários nomes, os quais foram registrados na tabela abaixo.

Tabela 10 – Nomes de grandes estudiosos ligados à Matemática

Respostas	Quantidades
Renê Descartes	3
Newton	6
Pitágoras	10
Hiparco	4
Bháskara	7
Euclides	1
Ptolomeu	1

Fonte: Elaborado pela autora

Observamos que Pitágoras foi o nome mais citado, seguido por Bháskara e Newton, perguntamos por que citaram várias vezes esses três nomes, comentaram que seria em função dos estudos do Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos retângulos, da Fórmula de Bháskara na resolução de equações do 2º grau e as leis de Newton, da física.

Como apresentado anteriormente, o objetivo dessa situação era "assimilar aspectos do movimento histórico-lógico da trigonometria", assim verificamos que as discussões levaram os participantes a assimilar a *fluência*, ou seja, o movimento lógico –histórico da formação dos conceitos trigonométricos. Davídov e Márkova (1981) defendem a assimilação no sentido de "tornar próprio", de "apoderar-se", de "assenhorar-se" e não de reprodução e para haver o desenvolvimento é necessário conduzir ao domínio das formas gerais da atividade psíquica, que, por sua vez, contribuirão para novas assimilações.

6.2.2 Análise da Situação 2

Ainda, nesse segundo encontro, trabalhamos a Situação 2, que tem como objetivo específico, apreender, na situação proposta, o que é geral, ou seja, a existência de uma razão constante entre os segmentos determinados pelas retas transversais num feixe de retas paralelas. Embora, esse tipo de situação seja comum nos livros didáticos, o que a diferencia nesta pesquisa, é exatamente essa busca pela essência do conceito de seno, sabendo que semelhança e proporcionalidade são nexos conceituais, que compõem a sua rede conceitual. Partimos de um concreto real, buscando verificar se os alunos percebem não o que é comum nas aparências das figuras, mas a relação peculiar dentro do sistema integral, o que pode conduzir à essência.

Agora observe as figuras:

Figura 2

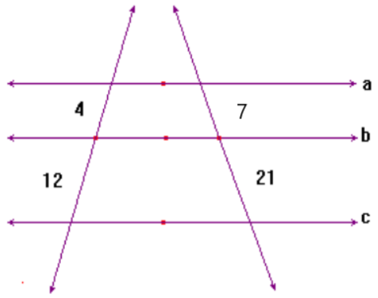


Figura 3

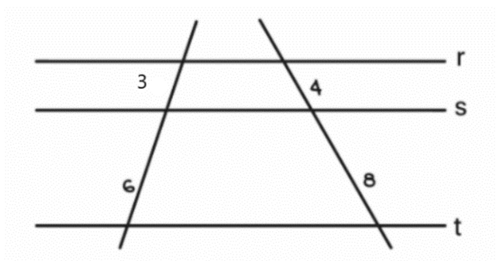


Figura 4

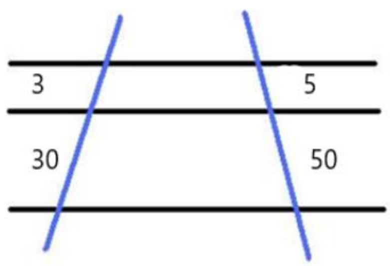
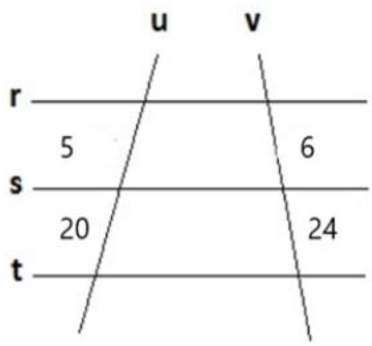


Figura 5



As retas na horizontal são r,s e t nessa ordem

a) Qual a posição relativa entre elas as retas a,b e c da figura 2?
b) E as outras retas da figura 2? Tem essa mesma característica das anteriores?
c) Como são chamadas essas partes da reta formadas pelos cruzamentos, essas que estão com os números 4,7,12 e 21?
d) Existe uma relação entre esses números ao se comparar os valores do lado direito (7 e 21) com os valores do lado esquerdo (4 e 12)?
e) Vamos observar a figura 2, qual a posição relativa entre as retas r,s e t? E as outras retas, tem essa mesma característica? Compare os valores em cada lado, (3 e 6) e (4 e 8), qual a relação entre eles?

f) Agora analise as figuras 4 e 5, a posição das retas seguem o mesmo padrão das figuras anteriores? E os valores?
g) Que conclusão chegaram analisando as figuras?
h) Agora vamos escrever isso de uma maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática.
i) Vamos pesquisar, usando o Google, o nome que recebe esse Teorema?

Para iniciarmos, pedimos aos alunos que observassem as quatro figuras e fizemos os seguintes questionamentos na busca de iniciarmos com a primeira ação de Davidov (1988), a transformação dos dados da tarefa de aprendizagem, ou seja, "[...] descobrir e distinguir uma relação completamente definida de certo objeto integral, constitui sua relação universal" (p.174).

Pesquisadora: Qual a posição relativa entre elas as retas a,b e c da figura 2?
Juca: Congruentes.
Pesquisadora: A palavra congruente em matemática refere-se a mesma medida, elas têm as mesmas medidas?
Joaquim : Não, elas são paralelas.
Pesquisadora: Isso Joaquim, são paralelas, e qual o significado de retas paralelas?
Joaquim: Elas não se cruzam.
Juca: É mesmo, lembro que a rua da escola é paralela com a rua de cima.
Pesquisadora: Isso mesmo Juca! Elas não se cruzam.

Após os diálogos, todos concordaram que a posição relativa das retas era "paralelas". Aproveitamos para relembrar o conceito de retas paralelas, explicando que duas retas são ditas paralelas quando mantêm sempre uma mesma distância uma da outra. Nesse momento há a *tomada de consciência da ação,* a identificação de retas paralelas, pois fica evidente na afirmação de Juca o resgate e o entendimento de retas paralelas, quando ele traz o exemplo da posição das ruas. Esse momento pode ser relacionado com uma das ações na busca da formação do conceito, segundo Davidov (1988), a criação de um modelo, ou seja, os alunos passaram a compreender as posições relativas das retas e suas definições relacionando-as com a posição das ruas.

Pesquisadora: E as outras retas da figura 2? Tem essa mesma característica das anteriores?
Maria: Elas são perpendiculares.
Pesquisadora: Vamos buscar o significado de perpendiculares no Google?
Joaquim: Achei! São retas que formam o ângulo de 90º
Pesquisadora: Podemos falar que elas formam o ângulo de 90º?
Joaquim: Não.

Pesquisadora: Então volto a perguntar, elas têm a mesma característica das retas anteriores, paralelas?
Maria: Não, porque elas estão inclinadas.
Pesquisadora: Mas elas recebem um nome quando relacionadas às retas paralelas.
Maria: São retas que se cruzam.
Lurdes: São transversais
Pesquisadora: Isso mesmo Lurdes! São retas transversais.
Joaquim: Não lembrava desse nome professora!
Pesquisadora: Agora não vão esquecer mais!

Buscamos ressaltar para os alunos que nem sempre retas transversais são perpendiculares. Na sala de aula, observamos, muitas vezes, os alunos dizerem que duas retas são perpendiculares quando querem dizer que elas são concorrentes[77] ou transversais. Essa também é uma passagem importante do papel mediador do diálogo da pesquisadora, que busca resgatar esses conceitos preliminares que sustentam a formação do pensamento teórico da função seno. As discussões continuaram.

Pesquisadora: Como são chamadas essas partes da reta formadas pelos cruzamentos, essas que estão com os números 4,7,12 e 21?
Lurdes: Segmento.
Pesquisadora: Isso Lurdes! Existe uma relação entre esses números ao se comparar os valores do lado direito (7 e 21) com os valores do lado esquerdo (4 e 12)?
Lurdes: Divisores.
Juca: Múltiplos.
Pesquisador: Sim. Porém quero que vocês pensem, para você passar do 7 para o 21 e do 4 para o 12 o que tem que acontecer?
Aparecida: Raiz.
Juca: Par e ímpar
Pesquisadora: Pensem mais um pouco.
Maria: São multiplicados por três.
Pesquisadora: Isso mesmo Maria! Então podemos afirmar que os segmentos do lado esquerdo foram multiplicados por 3 e do lado direito também?
Juca: Sim.

Nesse momento buscamos criar condições determinadas para o desenvolvimento dos alunos, ao conduzir à apropriação do nexo interno, a proporcionalidade, pois independentemente do número a ser multiplicado, a relação existe entre os segmentos. Nessa linha de raciocínio, Elkonin (1960) discute a importância da influência do adulto na relação ensino-desenvolvimento, ao afirmar que os adultos transmitem a experiência acumulada pela humanidade às crianças/adolescentes.

Pesquisadora: Agora vamos observar a figura 3, qual a posição relativa entre as retas r,s e t? E as outras retas, tem essa mesma característica? Compare os valores em cada lado, (3 e 6) e (4 e 8), qual a relaç ão entre eles?

---

[77] Retas que possuem um único ponto em comum, em outras palavras, retas que se cruzam.

Juca: Sim. Possuem as mesmas posições da figura anterior, paralelas e transversais.
Pesquisadora: Todos concordam?
Aparecida: Sim.
Lurdes: Sim.
Pesquisadora: Vamos comparar as medidas dos segmentos então, de um lado 3 e 6 e do outro 4 e 8.
Joaquim: Foram multiplicados por 2.
Pesquisadora: Isso mesmo! Agora analise as figuras 4 e 5, a posição das retas seguem o mesmo padrão das figuras anteriores? E os valores?
Sebastiana: As posições das retas são iguais
Pesquisadora: Agora analise as medidas dos segmentos, 3 e 30, 5 e 50.
Maria: Multiplicados por 10.
Pesquisadora: Isso mesmo Maria! Agora na figura 5, compare as posições relativas das retas e as medidas dos segmentos.
Dora: Possuem as mesmas posições das anteriores sim.
Pesquisadora: E em relação às medidas dos segmentos?
Dora: Foram multiplicados por 4.

Aqui procuramos um movimento para fomentar a busca pelo geral, um movimento de redução do concreto ao abstrato. Segundo Serconek (2018, p. 166-167), “nos momentos em que consideramos necessário, restabelecemos ações de estudo em um fluxo dialético: concreto/abstrato ou abstrato/concreto, particular/geral ou geral/particular.

Nesse sentido, Libâneo e Freitas (2015, p. 344) afirmam que desenvolver o pensamento teórico é criar situações para “desenvolver processos mentais pelos quais se chega aos conceitos, transformando-os em ferramentas para fazer generalizações conceituais e aplicá-las a problemas específicos”. Já, Vigotski não apresenta uma única definição para generalização, no entanto, analisando seus estudos, entendemos que generalizar é processo para formar conceitos, é entender os diferentes significados de uma palavra empregada em vários contextos, para ele o desenvolvimento dos conceitos científicos ocorre do geral para o específico.

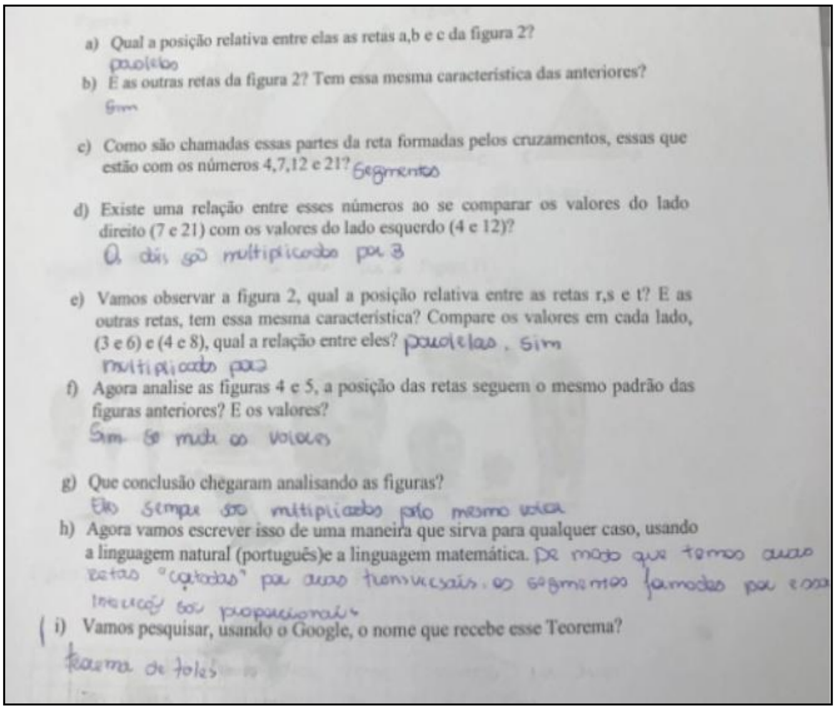
Na continuidade dos diálogos, instigamos os alunos a pensarem a que conclusão chegariam com aquelas informações, buscando as “*sínteses (generalizações teóricas)*”, que representam outra unidade de análise desse trabalho. O objetivo era dar continuidade ao movimento do pensamento, agora em uma direção oposta: a da dedução, ou seja, de ascensão do abstrato ao concreto. Esse movimento ocorreu em condições específicas de estudo, pois o estudante, tendo abstraído e generalizado os conceitos científicos de proporcionalidade, tornou-os como base para deduzir as relações particulares das tarefas dadas.

Pesquisadora: Exatamente! Que conclusão vocês chegaram analisando as figuras?

Juca: Elas sempre serão multiplicadas pelo mesmo número.
Pesquisadora: Isso mesmo! Agora vamos pesquisar no Google que palavra podemos usar para expressar isso? Ou seja, esses segmentos são chamados de ?
Lurdes: Proporcionais?
Pesquisadora: Isso mesmo, Lurdes!
Pesquisadora: Agora vamos escrever isso de uma maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática.
Juca: De modo que temos duas retas “cortadas” por duas retas transversais, os segmentos formados por essa “interseção” são proporcionais.
Pesquisadora: Bem pensado, Juca! Mais alguém gostaria de comentar?
Manoel: Quando temos duas retas paralelas cortadas por duas transversais, os segmentos são proporcionais.
Pesquisadora: Perfeito, Manoel! Então podemos concluir que toda vez que tivermos retas paralelas cortadas por transversais, formamos segmentos proporcionais, ou seja, ser proporcional significa manter a razão, se de um lado é multiplicado por três, do outro também será, se um lado é multiplicado por dois, o outro também será e assim por diante.
Pesquisadora: Vamos pesquisar, usando o Google, o nome que recebe esse Teorema?
Lurdes: Teorema de Tales
Pesquisadora: Parabéns Lurdes!

Abaixo apresentamos as anotações do participante Juca frente aos diálogos e discussões expostos.

Figura 50 - Anotações do Juca


a) Qual a posição relativa entre elas as retas a,b e c da figura 2?
paralelas
b) E as outras retas da figura 2? Tem essa mesma característica das anteriores?
Sim

c) Como são chamadas essas partes da reta formadas pelos cruzamentos, essas que estão com os números 4,7,12 e 21? Segmentos

d) Existe uma relação entre esses números ao se comparar os valores do lado direito (7 e 21) com os valores do lado esquerdo (4 e 12)?
O dois são multiplicados por 3

e) Vamos observar a figura 2, qual a posição relativa entre as retas r,s e t? E as outras retas, tem essa mesma característica? Compare os valores em cada lado, (3 e 6) e (4 e 8), qual a relação entre eles? paralelas. Sim multiplicado por 2

f) Agora analise as figuras 4 e 5, a posição das retas seguem o mesmo padrão das figuras anteriores? E os valores?
Sim. Se muda os valores

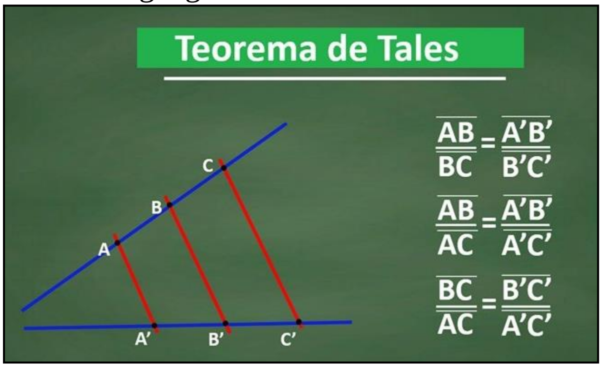
g) Que conclusão chegaram analisando as figuras?
Eles sempre são multiplicados pelo mesmo valor

h) Agora vamos escrever isso de uma maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português)e a linguagem matemática. De modo que temos duas retas “cortadas” por duas transversais, os segmentos formados por essa interseção são proporcionais

i) Vamos pesquisar, usando o Google, o nome que recebe esse Teorema?
Teorema de tales

Pesquisadora: Vou buscar aqui no Google e mostrar para vocês que o Teorema de Tales é uma lei da geometria, que é expressa pelo enunciado, “a interseção por duas retas transversais e um feixe de retas paralelas formam segmentos proporcionais”. Aproveito para mostrar também uma figura que representa o que chamamos de linguagem matemática desse teorema.

Figura 51 – Linguagem matemática do Teorema de Tales



Pesquisadora: Aqui temos as retas paralelas em vermelho, cortadas pelas transversais em azul formando os segmentos, AB, BC, A’B’, B’C’, então podemos estabelecer as razões entre eles, verificando que são iguais, portanto os segmentos são proporcionais.
Lurdes: Nossa!!! Nunca havia entendido o que seria esse Teorema de Tales.
Pesquisadora: Agora você conseguiu entender Lurdes?
Lurdes: Totalmente.

No final do diálogo, observamos que Lurdes se assusta ao conseguir assimilar o Teorema de Tales, uma propriedade que não fazia muito sentido. Esse momento de *“síntese”,* de generalização substantiva, ou seja, de compreender a essência do Teorema de Tales foi evidenciado. Para esse entendimento, buscamos destacar as conexões essenciais e universais do objeto, indo ao encontro de Serconek (2018, p. 156) quando diz,

> Apoiados em conceitos científicos, as análises e transformações promovidas recriam e modelam as propriedades internas do objeto, as quais se convertem em conteúdo do conceito. As ações que explicitam e reconstroem as conexões essenciais e universais do objeto servem de base para as abstrações, generalizações e conceitos teóricos.

É necessário assimilar essa propriedade interna, relacionada às retas paralelas cortadas por transversais, a proporcionalidade dos segmentos determinados, que vai se converter em uma conexão essencial para a abstração e a generalização do conceito de seno.

Nesse sentido, por meio das operações e com base nos argumentos, os estudantes formaram as primeiras abstrações do Teorema de Tales, sendo ele uma “lei” científica em que recriaram e modelaram essa propriedade, a proporcionalidade.

Por meio do desenvolvimento do experimento, os participantes foram percebendo a importância da pesquisa, nesse caso usando o Google, um elemento mediador, além das ações da pesquisadora, ao buscar estimular o pensamento, atuando na ZDP dos alunos, para que eles pudessem chegar a uma generalização substantiva, ou seja, conhecer o todo para o entendimento das partes, fazer a síntese.

6.2.3 Análise da Situação 3

O objetivo da Situação 3 é a assimilação da essência do conceito de semelhança, sendo a semelhança um nexo conceitual que ganha destaque nesse momento.

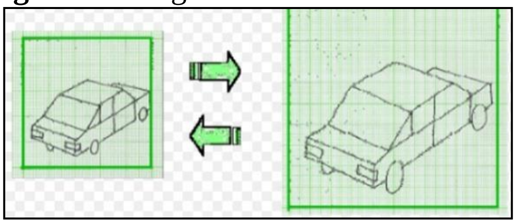
Iniciamos o desenvolvimento da situação, solicitando aos participantes que analisassem a figura 6 do material de estudo.

Figura 52 - Figura 6 do material de estudo

Perguntamos a eles se são fotos iguais. Sete falaram que são iguais e acrescentaram, que só mudava o tamanho. Os outros quatro apenas falaram que não são iguais.

Na sequência, solicitamos que observassem a figura 7 do material e fizemos a mesma pergunta: "são iguais?".

Figura 53 - Figura 7 do material de estudo



Dora: Uma foto é maior que a outra.

Nesse mesmo sentido, pedimos que comparassem os pentágonos da figura 8 e os triângulos da figura 9 do material de estudo.

Figura 54 – Figura 8 do material de estudo

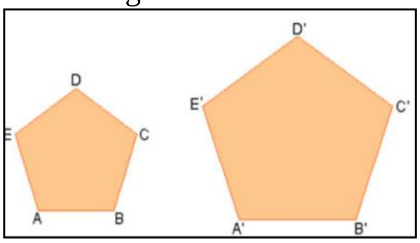
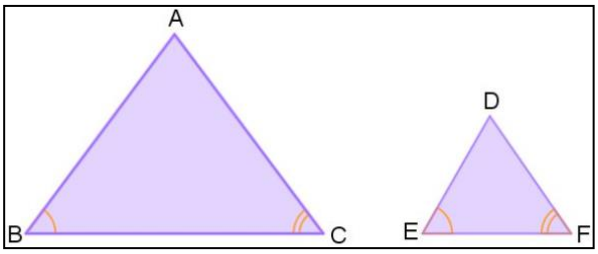
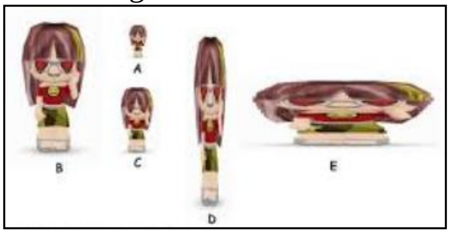


Figura 55 – Figura 9 do material de estudo



Dora: São iguais, porém de tamanhos diferentes.
Pesquisadora: Agora, observem a bonequinha da figura 10, a imagem A é a original, mas à medida que ela foi ampliada (imagens B, C, D e E), o que aconteceu?

Figura 56 - Figura 10 do material de estudo



Dora: Foi se modificando, ficando em diferentes tamanhos e formatos.
Sebastiana: A imagem ficou distorcida
Aparecida: Perdeu a forma original.
Pesquisadora:E na figura 11? Observe a figura original e a compare com as demais, o que você percebeu?

Figura 57 - Figura 11 do material de estudo

Dora: É a mesma imagem só que em diferentes tamanhos, mudou o formato original.
Aparecida: A imagem foi ficando desfocada.
Raimundo: Não ficou igual à original.
Pesquisadora: Então, o que vocês concluem, quando eu pergunto se as figuras são iguais?
Dora: Que elas são parecidas, mas não são iguais.
Pesquisadora: Isso mesmo, Dora! Todos concordam?

Aparecida: Ah sim, professora! Poderia falar que elas são iguais se tivessem o mesmo tamanho?
Pesquisadora: Sim, Aparecida! Temos que tomar cuidado com a palavra "igual[78]", na matemática, quando relacionamos figuras, elas serão iguais quando mantiverem as mesmas características, inclusive o tamanho.
Aparecida: Agora entendi.

Nessa última fala da participante Dora, destacamos que houve *tomada de consciência da ação* em relação ao entendimento de empregar a palavra igual em situações matemáticas.

Assim continuamos as discussões.

Pesquisadora: Nas figuras 12, 13, 14 e 15, teremos ampliações e reduções, usando o papel quadriculado. Observe-as atentamente.

Figura 58 – Figura 12 do material de estudo

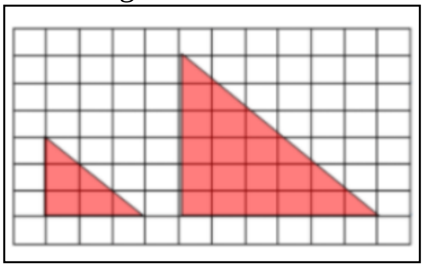


Figura 59 – Figura 13 do material de estudo

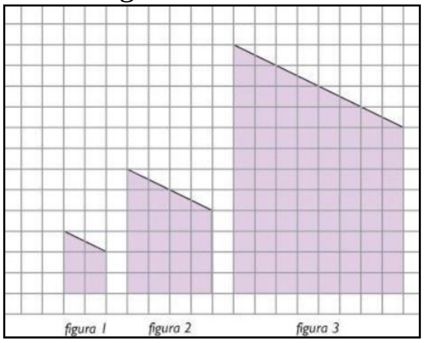
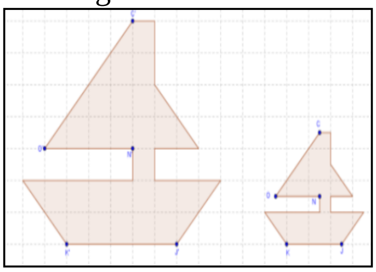
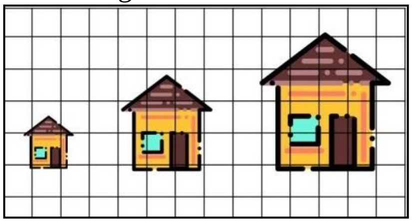


Figura 60 – Figura 14 do material de estudo



[78]No ponto de vista mais formal da geometria, a relação de igualdade não é a mesma que a relação de congruência, uma figura só é igual a ela mesma, por ser constituída pelo mesmo conjunto de pontos, no entanto, na linguagem coloquial é muito comum a utilização da palavra igual.

Figura 61 – Figura 15 do material de estudo



Pesquisadora: Agora volte na figura 12, vamos comparar as medidas (em quadradinhos) dos lados correspondentes dos triângulos, ou seja, os lados que estão na mesma posição? Vocês vão contar os quadradinhos para medir cada lado da figura.
Antônia: O menor possui lados 3 e 3 e o maior 6 e 6.
Joana: Foi multiplicado por 2?
Dora: Os lados de um é o dobro do outro.
Pesquisadora: Sim! Meça agora, usando o transferidor, os ângulos dessa figura. Quais resultados encontraram?
Raimundo: “Icha”, não sei nem como pegar isso, professora!

Nesse momento, reconhecemos uma limitação da pesquisa, uma das contradições, pois no planejamento estava programado medir os catetos e a hipotenusa dos triângulos, seria uma discussão interessante, no entanto no desenvolvimento dessa situação nem a pesquisadora, nem os alunos se atentaram para isso, envolveria a diagonal do quadradinho e não a medida do lado.

Na sequência do experimento, abrimos um parêntese para esclarecer que alguns procedimentos, como a utilização do transferidor, foram retomados, pois compõem um complexo sistema de conceitos, propriedades e procedimentos, que são necessários ao ensino da função seno. Embora constasse no currículo dos anos anteriores, os estudantes demonstraram que não haviam se apropriado deles. É importante ter como norteador o pressuposto do ensino desenvolvimental: os conceitos genuínos pressupõem interconexão entre conceitos científicos que compõem um sistema. (Davidov, 1982).

O transferidor nesse caso tem o papel de mediador, um instrumento que se interpõe na relação do sujeito com o objeto. Seria, segundo Vigotski (1982), um tipo de instrumento físico criado pelo homem para contribuir e facilitar algumas práticas cotidianas, tais instrumentos físicos já são usados pelo homem desde a idade da pedra na busca da sua relação direta com a natureza.

Assim, paramos para explicar como usar o transferidor, pois muitos alegaram que não sabiam como medir. Para isso compartilhamos a tela do Word e desenhamos um ângulo e inserimos um transferidor para melhor entenderem. Após a explicação, continuamos a atividade.

> **Raimundo:** Nossa, professora! Todo ano eu comprava esse transferidor e nunca havia usado, não entendia para que servia.
> **Pesquisadora:** Agora você conseguiu entender?
> **Raimundo:** sim.

Esse momento merece destaque, pois tanto o papel da professora como organizadora do ensino, como o papel do objeto (transferidor), contribuíram para a apropriação do conceito de ângulo e para o processo prático de medição. Isso confirma que o instrumento só tem sentido por meio da mediação cultural de sua significação. Seria novamente um momento de *tomada de consciência da ação.*

Retomamos à situação, solicitando novamente que medissem os ângulos da figura 12.

> **Raimundo:** Professora o meu deu 40º, 90º e 50º nas duas figuras.
> **Lurdes:** Os meus também.
> **Pesquisadora:** Todos encontraram esses mesmos valores?
> **Joana:** Sim.
> **Antônia:** Sim
> **Pesquisadora:** Então concluímos que na figura 12 os lados foram multiplicados por 2, porém os ângulos continuaram os mesmos.

Continuamos as discussões, partimos para a análise da figura 13 do material de estudo.

> **Pesquisadora:** Agora vamos fazer a mesma coisa na figura 13, compare as medidas dos lados correspondentes de cada imagem, o que você conclui?
> **Manoel:** O lado "debaixo" das figuras, as medidas são 2 na figura 1; 4 na figura 2; e 8, na figura 3.
> **Antônia:** Os lados dobraram não foi?
> **Pesquisadora:** Dobraram sim, Antônia!
> **Pesquisadora:** Agora meçam também os outros lados, as alturas.
> **Tereza:** Deu 3,6 e 12 de um lado e 2,4 e 8 do outro. Dobraram novamente.

Mais uma vez a medida de um dos lados das figuras não apareceu, exatamente o lado que seria medido usando a diagonal do quadradinho, seria uma discussão interessante, no entanto ela não aconteceu, um novo momento de contradição do experimento.

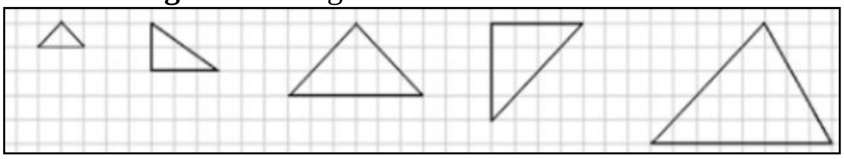
> **Pesquisadora:** Meça agora, usando o transferidor, os ângulos dessas figuras. Quais resultados encontraram?
> **Tereza:** 90º, 90º, 30º e 60º nas três.
> **Dora:** Isso! Todos têm as mesmas medidas.

Pesquisadora: Então, na figura 13, também, concluímos que os lados foram multiplicados por 2 comparando de um para outro, porém os ângulos continuaram os mesmos.
Manoel: Sim.

Com esses dois exemplos, estamos buscando o "*movimento de abstração teórica*" em relação ao nexo conceitual semelhança, ou seja, fazer com que os alunos cheguem à abstração substantiva. Davidov (1988), em seus estudos, salientava a importância da atividade na relação do sujeito com o meio externo, ao tratar da relação mediatizada pelo processo de transformação e modificação desta realidade externa. Segundo ele, a forma universal desta relação são as transformações e mudanças instrumentais dirigidas a uma finalidade. Indícios estes presentes na afirmação do participante Manoel, a seguir.

Pesquisadora: Então podemos afirmar que essas figuras não são iguais, elas são semelhantes, o termo usado é exatamente esse, semelhantes, pois elas são "parecidas", possuem algumas características iguais, como as medidas dos ângulos, porém possuem tamanhos diferentes.
Manoel: Sempre, quando eu ouvia falar a palavra "semelhante" na matemática, eu achava que era igual, acho que agora eu entendi.
Pesquisadora: Não, Manoel! Não podemos dizer que semelhante é a mesma coisa que igual. Vamos continuar que vocês entenderão isso melhor. Na figura 16, temos cinco triângulos, enumere-os da esquerda para a direita (1,2,3,4 e 5), analise os triângulos 1 e 5, são "iguais"?

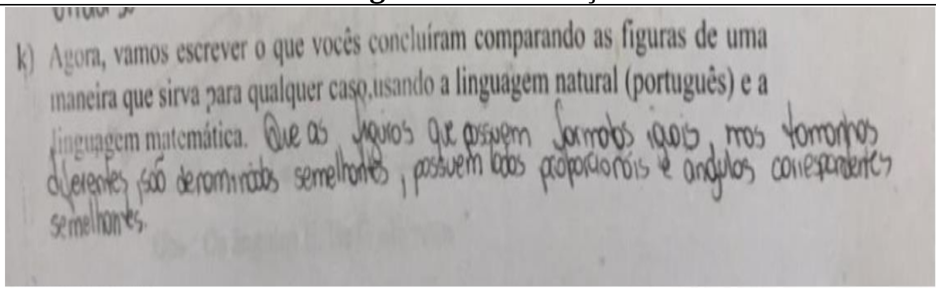
Figura 62 – Figura 16 do material de estudo



Manoel: Acho que não.
Pesquisadora: Meça (em quadradinhos) a base de cada um.
Antônia: Deu 2 e 8.
Pesquisadora: Agora meça a altura.
Antônia: 1 e 5.
Pesquisadora: Existe uma relação entre elas?
Antônia: Não, pois uma foi multiplicada por 4 e a outra por 5.
Dora: Não tem nada a ver um com o outro, só são parecidos.
Pesquisadora: Agora usando o transferidor, meça os ângulos correspondentes.
Lurdes: O ângulo da esquerda do triângulo menor é 50º e do maior é 60º.
Pesquisadora: Todos conseguiram encontrar esses valores?
Manoel: Sim.
Pesquisadora: Então vocês acham que eles são semelhantes?
Lurdes: Acho que eles não são semelhantes.
Pesquisadora: Porque você acha isso Lurdes?

Lurdes: Uai, professora! Porque a senhora falou que para serem semelhantes, os ângulos têm que ser iguais, e aqui eles não são.
Pesquisadora: Isso mesmo Lurdes! Mas e as medidas dos lados?
Manoel: Tem que olhar as medidas dos ângulos e lados para saber se são semelhantes?
Pesquisadora: Sim, Manoel! Lembra das figuras 12 e 13 que vimos agora há pouco?
Manoel: Ah, os lados não são proporcionais.
Pesquisadora: E isso quer dizer o que, Manoel?
Manoel: Que é outro motivo para não serem semelhantes.
Pesquisadora: Perfeito!Agora, vamos escrever o que vocês concluíram comparando as figuras de uma maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática.
Antônia: As figuras com ângulos correspondentes iguais e os lados correspondentes proporcionais, ou seja, são semelhantes.

Figura 63 – Anotações de Lurdes


k) Agora, vamos escrever o que vocês concluíram comparando as figuras de uma maneira que sirva para qualquer caso,usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática. Que as figuras que possuem formatos iguais, mas tamanhos diferentes são denominados semelhantes, possuem lados proporcionais e ângulos correspondentes semelhantes.

Transcrição: Que as figuras que possuem formatos iguais, mas tamanhos diferentes, são denominadas semelhantes, possuem lados proporcionais e ângulos correspondentes semelhantes.

Esse é o momento em que a unidade de análise "*síntese*" está evidenciada, pois os alunos foram levados à *generalização teórica* do conceito de semelhança, à sua essência, sendo capazes de escrever, ou seja, de modelar o conceito porque se tratavam de movimentos regulares. É uma das ações propostas por Davidov (1986), indo além das percepções sensoriais, em busca de algo que pudesse traduzir o geral, independentemente do tipo de figuras, da posição das figuras.

Apesar de termos comentado sobre a linguagem matemática relacionada à semelhança, optamos, durante o experimento, em não detalhar, pois verificamos que talvez poderia causar confusão nos alunos visto que já haviam conseguido sintetizar o conceito.

6.2.4 Análise da Situação 4

O objetivo da Situação 4 é apropriar-se da essência do seno, que é a razão constante que existe entre dois lados em triângulos retângulos, o cateto oposto ao ângulo considerado e a hipotenusa, independentemente do tamanho do triângulo, dependendo, apenas do ângulo. Essa razão constante tem a sua justificativa na semelhança de triângulos, tratada anteriormente.

Pesquisadora: Observem os três triângulos das figuras

Figura 64 - Figura 19 do material de estudo

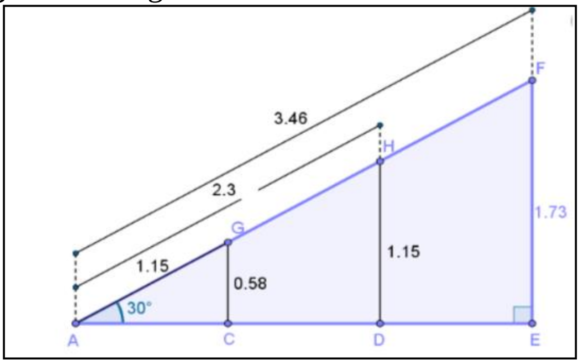


Figura 65 – Figura 20 do material de estudo

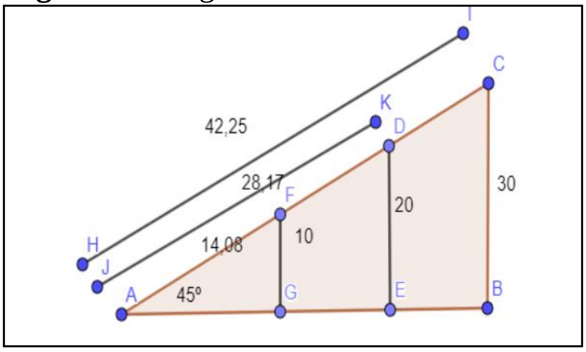
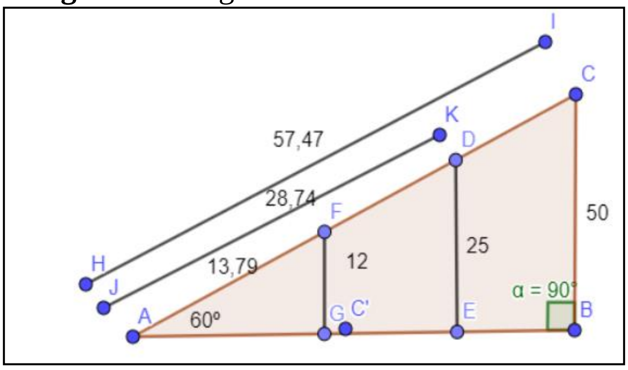


Figura 66 - Figura 21 do material de estudo



Pesquisadora: O que há em comum nessas 3 figuras?
Joana: São triângulos.
Lurdes: São triângulos retângulos.
Pesquisadora: E todos sabem o que é triângulo retângulo que a Lurdes comentou?
Juca: Já ouvi muito falar, mas esqueci o que é.

Esse é mais um momento em que a pesquisadora retoma conceitos preliminares fundamentais para a compreensão do pensamento teórico da função seno, atuando na ZDP do aluno. Explicamos o significado de triângulo retângulo, tendo como referência a discussão feita nas situações anteriores sobre perpendicularismo.

> **Pesquisadora:** Agora vamos continuar nossas discussões. Vocês fizeram muitas observações importantes, são, sim, triângulos retângulos. Mas observem especificamente a figura 19, analise as posições relativas das retas que passam pelos pontos C e G, D e H, E e F. Como podemos chamá-las quanto a essa posição?
> **Maria:** Elas não se cruzam
> **Pesquisadora:** Isso! Então como elas são chamadas?
> **Manoel:** São paralelas.
> **Pesquisadora:** Agora, analise as posições relativas das retas que passam pelos pontos A e F, e A e E. Como podemos chamá-las quanto à posição em relação às outras?
> **Lurdes:** Não são paralelas.
> **Pesquisadora:** Por que?
> **Lurdes:** Porque elas se cruzam.
> **Pesquisadora:** Alguém sabe me dizer então o nome que elas recebem?
> **Antônia:** Nós já vimos isso antes, são transversais?
> **Pesquisadora:** Certo, Antônia! Agora nas figuras 20 e 21, analise as posições relativas das retas que passam pelos pontos B e C, D e E, e F e G. Analise também as posições das retas que passam por A e B, e A e C, em relação às outras.
> **Tereza:** É a mesma coisa do desenho anterior, paralelas e transversais.
> **Pesquisadora:** Essas análises lembram a vocês algo que já vimos como você comentou Antônia, o que é?
> **Tereza:** "Peraí" professora, vou voltar aqui no material, lembra o Teorema de Tales que estudamos.
> **Manoel:** É o Teorema de Tales, professora?

Identificamos nessa passagem uma das ações de Davidov (1988) na busca da formação do conceito, *a transformação de modelos*, que consiste em estudar as propriedades da relação universal que foi identificada no objeto: os alunos nos modelos apresentados (as figuras) identificam a relação universal, que é traduzida pelo Teorema de Tales. Podemos observar que há um *movimento da síntese* produzido para uma situação particular, pois as ações propostas e as operações desenvolvidas nas situações anteriores possibilitaram a apropriação do Teorema de Tales.

> **Pesquisadora:** É exatamente isso, Manoel! Podemos usar o Teorema de Tales também no estudo dos triângulos. Nessa mesma linha de raciocínio, vamos observar a figura 19, quantos triângulos você observa?
> **Manoel:** Um triângulo grande.
> **Pesquisadora:** Mas dentro desse triângulo maior você consegue enxergar triângulos menores?

Antônia: Sim, tem três triângulos um dentro do outro.
Pesquisadora: Vamos desenhá-los, separadamente, registrando todas as suas medidas de ângulos e lados?

Figura 67 - Desenho da Antônia

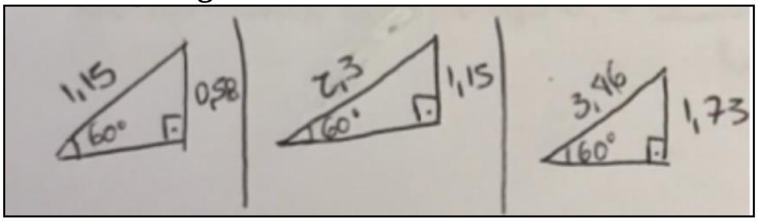
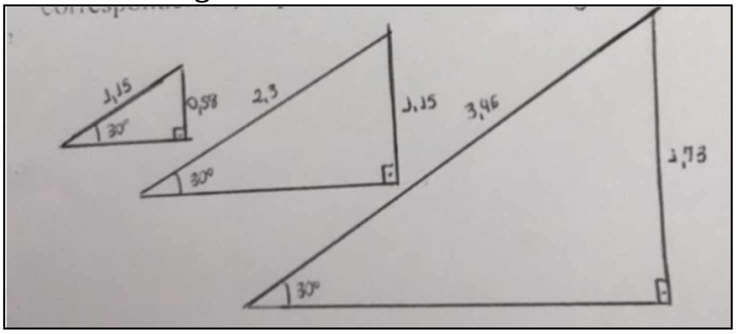


Figura 68 - Desenho da Lurdes

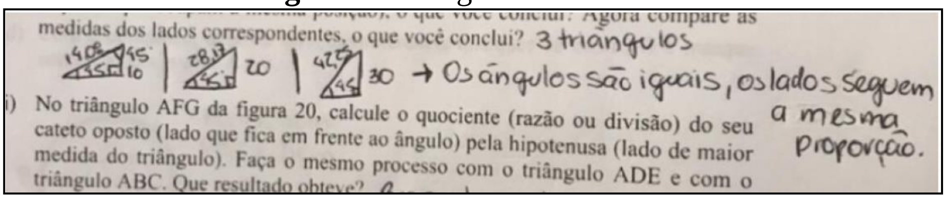


Esse foi um momento de diálogo vivo e intenso do experimento. Pelo fato de não estarmos presentes, de ser online, não existiu diálogo entre os alunos, o que compromete o experimento de certa forma, pois o jovem, nessa idade psicológica, tem como atividade principal, a comunicação íntima pessoal, segundo Davidov (2019). Na adolescência a atividade socialmente útil está aflorada, eles querem ser reconhecidos pelos pares, ser valorizados, possuem um código de companheirismo que aqui não foi possível explorar. No entanto, houve uma intensa comunicação entre os alunos e a pesquisadora, o que significa um compartilhamento no nível interpsicológico, que vai para o intrapsicológico, quando eles começam a pensar, a abstrair.

Pesquisadora: Analise as medidas dos ângulos correspondentes (aqueles que ocupam a mesma posição), o que vocês concluíram?
Lurdes: Os ângulos são iguais.
Pesquisadora: Certo! Agora compare as medidas dos lados correspondentes.
Antônia: Os lados têm medidas diferentes, mas um é o dobro e o outro o triplo.
Manoel: Dá uma pequena "diferencinha" professora.
Pesquisadora: Mas seria bem próximo, não é?
Manoel: Sim.
Pesquisadora: Então podemos dizer que os triângulos são semelhantes, não são?

Joana: Sim.
Pesquisadora: Vocês observaram que todos os triângulos são retângulos, ou seja, possuem o ângulo que mede 90º. Agora vamos pesquisar no Google para ver que eles recebem nomes específicos.
Joana: Hipotenusa, o lado maior.
Raimundo: Catetos, os lados menores.
Pesquisadora: Isso mesmo! Mas os catetos recebem um "sobrenome" dependendo da posição do ângulo sem ser o de 90º, os outros dois, por exemplo, o cateto que fica em frente ao ângulo é chamado de cateto oposto e aquele que fica encostado, do lado do ângulo, é chamado de cateto adjacente. Na figura 19 no triângulo ACG, 1,15 é a medida hipotenusa, pois é o maior lado do triângulo; 0,58 é a medida do cateto oposto, pois está em frente ao ângulo de 60º e o cateto adjacente seria esse do lado debaixo AC. Entenderam?
Lurdes: Acho que sim.
Pesquisadora: Agora, no triângulo ACG da figura 19, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (lado de maior medida do triângulo).
Lurdes: Dividir o 0,58 por 1,15? Achei 0,5 professora.
Pesquisadora: Faça o mesmo processo com o triângulo ADH.
Raimundo: Também deu 0,5 no triângulo do meio.
Pesquisadora: E com o triângulo AEF. Que resultado obtiveram?
Antônia: 0,5 também.
Pesquisadora: Usando o mesmo processo, vamos analisar a figura 20, quantos triângulos vocês observam?
Manoel: A mesma coisa da figura anterior, três triângulos um dentro do outro.
Pesquisadora: Vamos desenhá-los, separadamente, registrando todas as suas medidas de ângulos e lados? Analise as medidas dos seus ângulos correspondentes (aqueles que ocupam a mesma posição) e as medidas dos lados correspondentes, o que você conclui?
Antonia: Os ângulos são iguais, os lados seguem a mesma proporção.

Figura 69 – Registros da Antônia

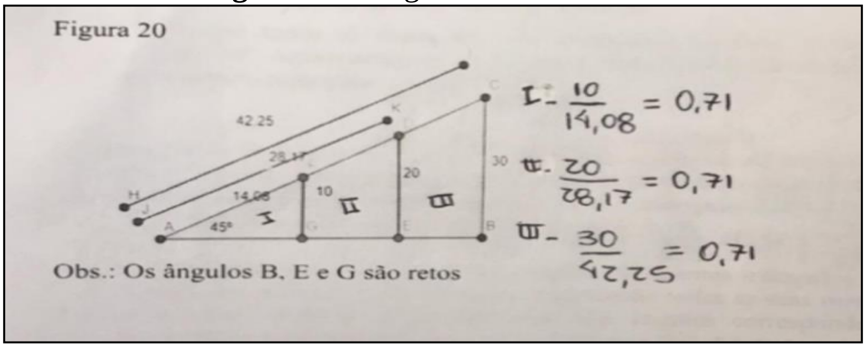

medidas dos lados correspondentes, o que você conclui? 3 triângulos

14,08 45 35 10 | 28,17 45 20 | 42,25 45 30 → Os ângulos são iguais, os lados seguem a mesma proporção.

i) No triângulo AFG da figura 20, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (lado de maior medida do triângulo). Faça o mesmo processo com o triângulo ADE e com o triângulo ABC. Que resultado obteve?

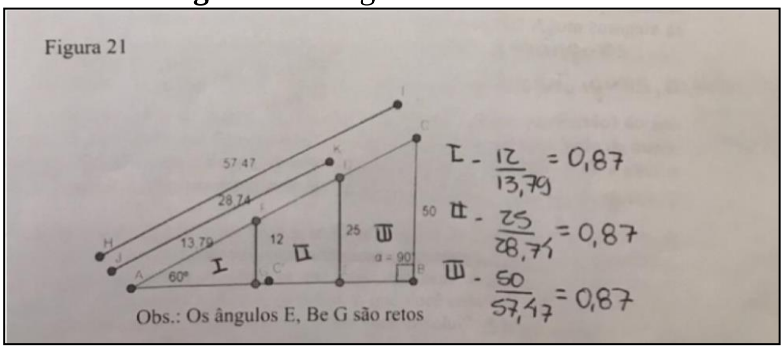
Pesquisadora: No triângulo AFG da figura 20, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (lado de maior medida do triângulo). Faça o mesmo processo com o triângulo ADE e com o triângulo ABC. Que resultados obtiveram?
Antônia: Professora, encontrei 0,71 em todas as divisões.

Figura 70 – Registros da Antônia 2



Dora: Achei 0,70 neles.
Pesquisadora: Certo! Praticamente o mesmo valor, não é?
Dora: sim.
Pesquisadora: Usando o mesmo processo, vamos analisar a figura 21, quantos triângulos você observa? Vamos desenhá-los, separadamente, registrando todas as suas medidas de ângulos e lados? Analise as medidas dos ângulos correspondentes (aqueles que ocupam a mesma posição), o que você conclui? Agora compare as medidas dos lados correspondentes, o que você conclui?
Manoel: Três triângulos também, os ângulos correspondentes são iguais e os lados seguem proporcionais.
Pesquisadora: Perfeito, Manoel! No triângulo AFG da figura 21, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (maior medida do triângulo). Faça o mesmo processo com o triângulo ADE e com o triângulo ABC. Que resultado obteve?
Antonia: Todos os meus resultados foram 0,87

Figura 71 - Registros da Antônia 3



Pesquisadora: Será que isso vale sempre? O que é geral nesta situação?

Nesse momento, a pesquisadora busca levar os alunos ao "*movimento de abstração teórica*", ou seja, que eles sejam capazes de assimilar que, independentemente do tamanho do triângulo, essa razão será a mesma, dependendo apenas da medida do ângulo.

Manoel: Acho que sim.

Pesquisadora: Será que não depende de nada? Ou seja, vou mudar a minha pergunta, o que tinha em comum nos triângulos quando vocês fizeram as divisões?
Manoel: Será que é o ângulo? Porque todos que deram o mesmo resultado são aqueles que possuem ângulos iguais.
Pesquisadora: Isso, Manoel! Perfeito o seu raciocínio!
Antônia: Então, quer dizer que se os ângulos forem iguais, esse resultado da divisão é sempre o mesmo?
Lurdes: Vale somente quando os ângulos são iguais?
Pesquisadora: Isso mesmo! Independentemente do tamanho do triângulo retângulo, essa razão (divisão) será a mesma se os ângulos forem iguais. E essa razão recebe um nome, vamos pesquisar, usando o Google, qual o nome que esse quociente (divisão do cateto oposto pela hipotenusa) recebe na matemática?
Tereza: Como que eu pesquiso isso professora?
Pesquisadora: Digita no Google "cateto oposto pela hipotenusa".
Tereza: Achei! Seno?
Raimundo: Encontrei seno também.
Pesquisadora: Isso! Seno é o nome que essa razão recebe.
Antônia: Nunca tinha entendido o que significava esse seno, professora!

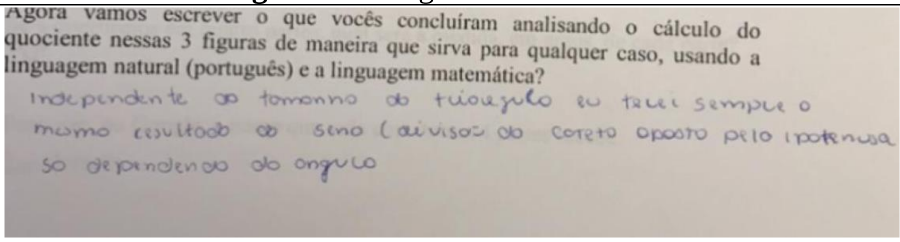
Na afirmação de Antônia, a *tomada de consciência da ação* volta a se manifestar, além de ser possível identificar *a avaliação*, uma das ações descritas por Davidov (1988), na formação de conceitos. Essa organização do ensino e a mediação realizada possibilitaram que os estudantes compreendessem a essência do conceito de seno que, em muitas situações, é ensinado apenas para a resolução de exercícios de maneira técnica, por meio de fórmulas sem significado, ficando, apenas, nos nexos externos do conceito, ou seja, no conceito empírico.

Ao fazermos uma avaliação das tarefas do experimento, percebemos que, na proposta dessa situação, poderíamos ter omitido os valores. Seria uma oportunidade de discutirmos a aplicação do Teorema de Tales, ou seja, após o movimento do concreto real para a abstração, em seguida da ascensão do abstrato para o concreto pensado, nas outras situações, se não aparecessem as medidas, nesse processo dialético, eles usariam a lei formulada, caminhariam do geral ao particular. Com as medidas, foram induzidos a usá-las indo para outro raciocínio, mais um ponto contraditório no movimento da pesquisa.

Pesquisadora: Agora vamos escrever o que vocês concluíram, analisando o cálculo do quociente nessas 3 figuras, de maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática?
Manoel: Como assim, professora?
Pesquisadora: Escreva o que vocês concluíram dessa discussão com as palavras de vocês.
Lurdes: Conclui que, se os ângulos dos triângulos forem iguais, o seno é igual, pode ser um triângulo grande ou pequeno.
Antônia: Eu escrevi assim: "Independente do tamanho do triângulo, o seno será o mesmo, devido à igualdade do ângulo".

Pesquisadora: Importante destacar que essa relação é válida apenas quando o triângulo retângulo.

Figura 72 - Registros da Antônia 4


Agora vamos escrever o que vocês concluíram analisando o cálculo do quociente nessas 3 figuras de maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática?

Independente do tamanho do triangulo eu terei sempre o mesmo resultado do seno (divisão do cateto oposto pelo ipotenusa so dependendo do angulo

Transcrição: "Independente do tamanho do triângulo, eu terei sempre o mesmo resultado do seno (divisão do cateto oposto pela hipotenusa) só dependendo do ângulo".

Nesse momento há novamente indícios tanto nos diálogos como na escrita de Antônia de *"síntese",* ou seja, de *generalização teórica* do conceito de seno, pois os alunos conseguiram assimilar e expressar a essência do conceito e o desenvolvimento do pensamento teórico. Desenvolver o pensamento teórico, de acordo com Libâneo e Freitas (2015, p. 344), é criar situações para "desenvolver processos mentais pelos quais se chega aos conceitos, transformando-os em ferramentas para fazer generalizações conceituais".

Ao final dessa tarefa trouxemos uma discussão sobre as operações (adição e subtração) envolvendo as medidas de lados e ângulos de um triângulo, consideramos importante essa discussão em função do diagnóstico realizado no início do experimento, em que alguns alunos somaram medidas de grandezas diferentes na busca de encontrar o resultado da situação-problema. Esse foi um momento de atuação da pesquisadora na ZDP do aluno.

Pesquisadora: Analisando a figura 19, vocês acham que podemos somar a medida do lado 1,15m (considerando o metro como unidade de medida) com o ângulo 30º? Falar que o resultado seria 31,15?
Juca: Acho que pode.
Antônia: Não pode, professora.
Pesquisadora: Por que você acha que pode Juca?
Juca: Porque tudo faz parte do triângulo.
Pesquisadora: Por que você acha que não pode, Antônia?
Antônia: Porque uma está em metros e a outra em graus.
Pesquisadora: Exatamente Antônia! Não podemos somar e/ou subtrair valores com grandezas diferentes, mesmo fazendo parte da mesma figura, Juca. É como se você pudesse somar o seu peso e a sua altura para saber uma informação sua, posso fazer isso?
Juca: Ah, pode não. Peso é em quilos e altura em metros.
Pesquisadora: Então no triângulo é a mesma coisa, a medida do lado é linear, pode ser em metros, centímetros, decímetros, já a medida do ângulo é normalmente em

> graus, são grandezas diferentes, não pode somar ou subtrair. Estou parando para discutir essa situação, aproveitando que estamos falando em triângulos, porque observei que alguns alunos no diagnóstico do nosso primeiro encontro, quando foram descobrir o comprimento do cabo que ligava as duas árvores, somou e subtraiu a medida do ângulo e do lado do triângulo. Ficou claro agora?
> **Juca:** Ficou sim.
> **Lurdes:** OK!

Ao final dos diálogos, a pesquisadora trouxe para a discussão a seguinte relação que se estabelece em um triângulo retângulo: existe um ângulo, uma variável independente, cujo campo de variação é o conjunto dos ângulos planos, variando entre 0º e 90º, e, para cada ângulo, corresponde um valor fixo, resultado da razão entre o cateto oposto a ele e a hipotenusa, que independentemente do tamanho do triângulo,é constante, à qual damos o nome de seno.

Ao falarmos dessa função, temos elementos essenciais, o domínio que nesse caso é o conjunto dos ângulos planos, o contradomínio que é o conjunto dos números reais e a forma de associá-los, que é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, ou seja, há uma interdependência de duas variáveis. Esse momento foi fundamental para que os alunos apropriassem do conceito de função seno, no conjunto dos ângulos planos.

Retomamos também nesse final, à situação-problema das queimadas do Pantanal, proposta inicialmente. A pesquisadora fez o desenho usando o Word e mostrou como ficaria o cálculo para medir o comprimento do cabo que liga as duas árvores, esse foi um momento muito enriquecedor, pois vários alunos riram dos seus próprios desenhos e comentaram que agora haviam entendido como calcular.

Em síntese, ao voltarmos ao objetivo dessa tarefa “desenvolver o conceito do seno com domínio nos ângulos planos com referências ao seu movimento lógico-histórico”, organizando o ensino de modo a levar o aluno à apropriação desse conceito por meio das quatro situações propostas, podemos afirmar que há indícios nos diálogos, nas escritas e nos questionamentos de que os alunos caminharam para essa apropriação, alguns chegando à síntese, outros, ainda, necessitando de outras aproximações.

Na continuidade do experimento, iniciaremos a transição do estudo do campo dos ângulos planos para o campo dos números reais, mudando, assim, o *campo de variação*.

6.3 Tarefa 2 –Explorando o conceito da função seno no conjunto dos números reais

A Tarefa 2 visava conduzir os alunos a desenvolver o conceito da função seno no conjunto dos números reais, observando os seguintes nexos conceituais internos: fluência (movimento), interdependência, variável, campo de variação, periodicidade e simetria por meio da exploração da função de Euler e seu movimento lógico-histórico. Foram organizadas oito situações de ensino, cada uma com seus objetivos próprios, porém todos eles, visando ao objetivo final da tarefa, conforme se vê na Figura 73, a seguir.

Figura 73 – Planejamento da Tarefa 2

Necessidades: Histórica e lógica	**Conteúdos**	**Ações (DAVIDOV)**	**Objetivos específico da Tarefa 2**
Analisar fenômenos periódicos	A circunferência de raio 1 e a reta numérica Arcos e ângulos O grau e o radiano A função seno com domínio no conjunto dos números reais: Função de Euler Sinais Simetrias A função seno e sua relação com os movimentos periódicos Função seno e suas representações (algébrica, geométrica e numérica	Transformação do objeto Criação de modelos Transformação de modelos Criação de problemas concretos e práticos Controle de ações	Desenvolver o conceito da função seno com domínio no conjunto dos números reais por meio da exploração da função de Euler e seu movimento lógico-histórico.

Ações (do professor)	**Ações (do aluno)**	**Objetivos específicos das situações propostas**
Propor questões relacionadas ao assunto e dialogar com os alunos. Incentivá-los a pesquisar na internet e responder aos questionamentos.	Responder as questões propostas pelo professor. Pesquisar na internet. Discutir em grupo.	*Assimilar o conceito de circunferência e seus elementos. *Apreender a relação entre o raio e o comprimento do arco. *Apropriar-se do conceito de radiano. *Apreender a função de Euler e o conceito de arcos côngruos. *Assimilar o conceito lógico da função seno no conjunto dos números reais, com foco em seus nexos internos. * Assimilar as simetrias na circunferência. * Assimilar a periodicidade da função seno. * Modelar, a partir do conceito, a função seno com foco em suas representações (geométricas, algébrica e numérica).

Selecionamos, para análise, as situações que mais estavam ligadas ao objetivo dessa Tarefa.

6.3.1 Análise da Situação 8

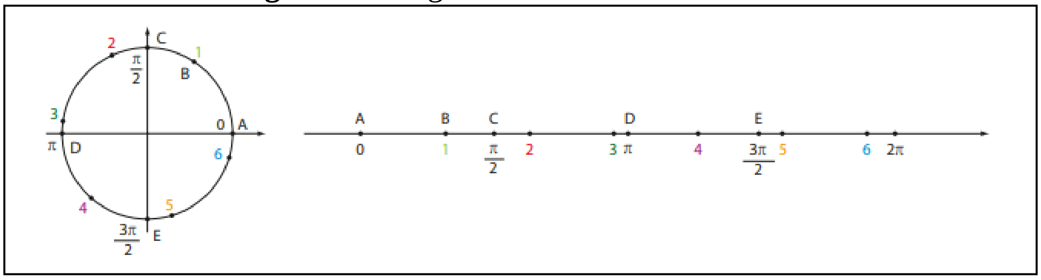
O objetivo da Situação 8 é apreender a função de Euler, ou seja, que compreender que é possível estabelecer uma função entre os números reais e pontos de uma circunferência e o conceito de arcos côngruos.

A função de Euler faz corresponder a cada número real *x*, um ponto de uma circunferência de raio unitário e com centro na origem do sistema cartesiano, E(t). Lima *et al.* (1996, p. 214) afirmam que esse processo pode ser pensado como "um processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel), de modo que o ponto 0 ∈IR caia sobre o ponto (1,0)∈C". Cada vez que o ponto percorre um intervalo na reta de comprimento *x*, percorrerá sobre a circunferência C, um arco de comprimento *x*, obtendo-se a imagem, E(t), que é um ponto P dado pelas coordenadas (x, y).

Essa é uma tarefa que os livros didáticos não trazem, sendo um diferencial no experimento, pois por meio dela é possível compreender como acontece a passagem do estudo da trigonometria, especificamente da função seno, do conjunto dos ângulos planos para o conjunto dos números reais.

Pesquisadora: Pessoal, iniciaremos observando a figura 23.

Figura 74 – Figura 23 do material de estudo



Obs.:
π / 2 vale aproximadamente 1,57
π vale aproximadamente 3,14
3π/2 vale aproximadamente 4,71
2π vale aproximadamente 6,28

Pesquisadora: As medidas da circunferência acima estão em radianos, que estudamos na Situação 7, vamos imaginar que tivéssemos esticado, como se fosse uma linha, conforme a figura ao lado da circunferência, o seu comprimento.O que lembra vocês essa linha?
Sebastiana: Lembra uma reta.
Pesquisadora: Mas é uma reta qualquer?
Manoel: A reta dos números?
Pesquisadora: Isso mesmo Manoel! A reta numérica.

Nesse momento paramos para explicar a reta numérica, sua composição a partir do conjunto dos números reais e a importância da ordenação dos valores, sendo crescente da esquerda para a direita. Essa explicação se mostrou necessária a partir do diagnóstico que realizamos no início do experimento, pois percebemos que os alunos, ao construírem o gráfico solicitado, não respeitaram a ordenação dos eixos x e y, o que dificultou a sua correta construção. Foi um momento de atuação na ZDP desse grupo de alunos, para que atingissem o nível potencial, sendo capazes de realizar a atividade de modelação proposta, sozinhos. Após a explicação, continuamos com a tarefa do experimento.

Pesquisadora: Essa "linha", a reta numérica, na figura, parou no 2π. Vocês acham que nela pode ser marcado um número maior que 2π?
Lurdes: Pode.
Pesquisadora: Porque Lurdes?
Lurdes: Por causa da seta que indica que ela continua.
Pesquisadora: Isso mesmo! Nessa reta está representada a volta completa da circunferência, o A é o ponto onde ela começa, que representa o zero, o ponto onde ela teoricamente para, seria o 2π ou 6,28. Vamos imaginar como se a linha correspondesse a 3π, ela coincidiria com qual valor na reta?
Raimundo: Não sei.
Pesquisadora: Vamos pensar! Se a volta completa é 2π, onde estaria o 3π?
Lurdes: Em cima do 180º?
Pesquisadora: Como você concluiu isso, Lurdes?
Lurdes: Porque o 180º é a metade, precisa de 2π mais a metade, para dar 3π.
Pesquisadora: Mas qual seria o valor da reta numérica?

A pesquisadora buscou destacar a correspondência entre a reta e a circunferência, no entanto ninguém respondeu, assim completamos.

Pesquisadora: Seria aproximadamente 9,42, a soma do 6,28 (volta completa) + 3,14 (metade). Entenderam?
Raimundo: Agora sim.

Destaque nesse momento para a fala de Raimundo ("agora sim"), seria uma nova *tomada de consciência da ação* em relação à circunferência trigonométrica, pois foi possível compreender as voltas que a reta numérica pode fazer em torno da circunferência, o que não permite afirmar que tenha feito uma abstração e uma generalização substantivas.

A partir da análise do material empírico, os dados mostram que, embora as tarefas estivessem, justamente, separando os dois campos de variação, o conjunto dos ângulos planos e o conjunto dos números reais, e a pesquisadora sempre focar na importância de usar as medidas em radianos, o aluno ainda remete muito mais ao campo de variação dos ângulos planos, ou seja, da medida em graus. Entendemos que seja ao fato de terem aprendido inicialmente as medidas em graus, sendo, às vezes difícil, evitar tal situação.

Pesquisadora: E se a linha correspondesse a 4π? Seria qual valor na reta?
Raimundo: No zero.

Pesquisadora: Mas esse zero na reta corresponde a 12,56, Raimundo, e não, ao zero, porque seriam duas voltas completas na circunferência (6,28+6,28).Agora, vamos fazer o movimento contrário, o número 2,5 cairia em qual quadrante?
Lurdes: No segundo quadrante.
Pesquisadora: Porque Lurdes?
Lurdes: Porque, no desenho, o 2,5 está entre o 2 e o 3, que estão no segundo quadrante.
Pesquisadora: E o número 7?
Tereza: Não sei se estaria no final do quarto ou no início do primeiro.
Pesquisadora: Mas ele não pode estar nos dois lugares, tem que ser somente em um, em qual deles você acha que ele está Tereza?
Tereza: Não sei.

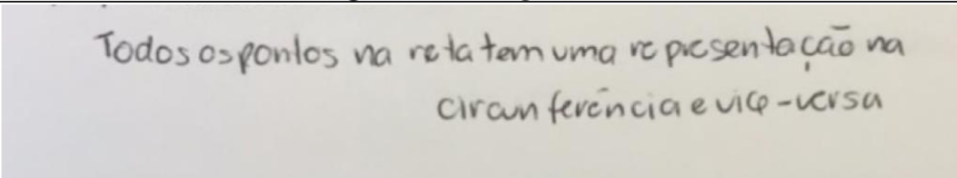
Momento importante de mediação da pesquisadora, na busca de incentivar os alunos a pensarem e discutir os conceitos, nesse *"movimento de abstração teórica",* para a construção do pensamento teórico e a compreensão da circunferência trigonométrica.

Pesquisadora: Vamos pensar? Vocês estão vendo o símbolo do π? Onde ele está?
Tereza: Em cima do 180º.
Pesquisadora: Então, podemos verificar que a medida do segmento de reta que corresponde a π que vale aproximadamente 3,14 está sobre o 180º, que é a metade da circunferência. Então, a circunferência completa mede 2π, que número da reta estaria sobre o 2π?
Antônia: O dobro, seria então 6,28, aproximadamente.
Pesquisadora: Isso mesmo! Agora Antônia, vamos voltar na pergunta. O 7 está em qual quadrante?
Tereza: No primeiro, porque ele é maior que 6,28.
Pesquisadora: Excelente! Porque o 2 ficou no segundo quadrante?
Lurdes: Porque a medida é em radianos.
Pesquisadora: Isso! Como estudamos lá na Situação 7, é a medida de dois raios. Então será que todo número da reta terá uma correspondência na circunferência, ou seja, um ponto na circunferência?
Tereza: Uai professora, eu acho que sim.
Lurdes: Sim, porque ambos são infinitos.

Esse foi um momento em que tivemos a oportunidade de discutir os nexos conceituais presentes na função de Euler e na função seno. Buscamos explicar, usando uma linguagem que eles entendessem, falamos em variável, na oscilação dos diferentes valores usados, discutimos campo de variação, nessa transição dos ângulos planos para o conjunto dos números reais.

Pesquisadora: Agora vamos escrever a relação que podemos estabelecer entre os pontos da reta numérica (números reais) e a circunferência de maneira que sirva para qualquer circunferência de raio 1 unidade, usando linguagem matemática?

Figura 75 – Registros de Lurdes


Todos os pontos na reta tem uma representação na circunferência e vice-versa

Transcrição da aluna Lurdes: Todos os pontos da reta têm sua representação na circunferência e vice-versa.

> **Pesquisadora:** Isso mesmo, Lurdes! Pessoal, chamamos essa relação de Função de Euler, ou seja, um processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel), de modo que o ponto 0 ∈IR caia sobre o ponto (1,0)∈C". Cada vez que o ponto percorre um intervalo na reta de comprimento *x*, percorrerá sobre a circunferência C, um arco de comprimento *x*, obtendo-se a imagem, E(t), que é um ponto P dado pelas coordenadas (x, y).

Destacamos mais uma vez a presença do nexo conceitual fluência (movimento), o próprio ato de enrolar a reta na circunferência representa uma metáfora desse movimento. Outro destaque emerge ao falarmos que "o ponto percorre um intervalo", seria o campo de variação da variável, nexos presentes e importantes de serem discutidos. Falamos da própria continuidade, um nexo conceitual que não havíamos pensado anteriormente, mas que surgiu no decorrer do processo, mediante os dados empíricos.

A afirmação de Lurdes nessa situação sinaliza o processo de superação do pensamento concreto caótico para um pensamento teórico, que não se baseia em evidências, mediante a intervenção realizada pela pesquisadora. De fato, a finalidade era evidenciar aspectos essenciais do conceito. A superação desse tipo de pensamento, observada mais claramente na fala de Lurdes, não foi observada em todos. Alguns acompanharam as discussões sem se pronunciar.

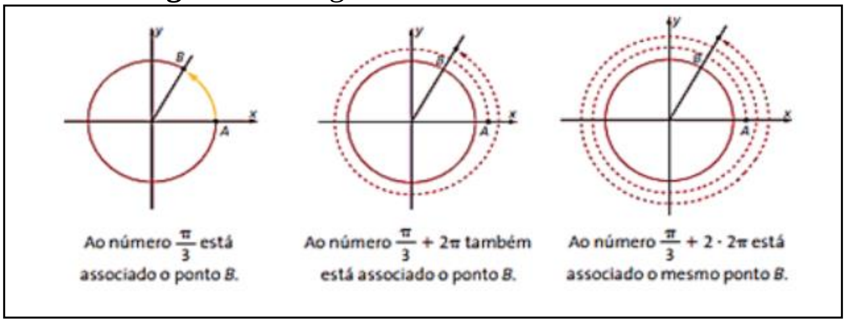
Essa conclusão de Lurdes evidencia um momento de *síntese"* ou *"generalização teórica",* pois foi capaz de generalizar, por meio da fala e da escrita, superando os aspectos visíveis, sensoriais, na apreensão da relação da reta numérica e da circunferência, compreendendo a Função de Euler.

O desenvolvimento da situação continua nas discussões, agora com enfoque nos arcos côngruos. Nessa situação evidenciamos o nexo conceitual campo de variação, pois para o estudo dos arcos côngruos há a variação dos arcos com intuito de assimilar o seu pensamento teórico.

Pesquisadora: Agora analise a figura 24. Nela, estão destacadas as extremidades dos arcos:π/3,

$\pi/3 + 2\pi = 7\pi/3$,
$\pi/3 + 4\pi = 13\pi/3$.

Figura 76 – Figura 24 do material de estudo



Pesquisadora: O que vocês verificaram?
Manoel: Que no primeiro desenho, tem uma volta, no segundo tem mais duas e no terceiro mais três.
Pesquisadora: Sim, isso acontece! Mas observe novamente, o que mais vocês enxergam?
Lurdes: Tem essas linhas pontilhadas.

Lurdes destaca aqui um nexo externo, que são as linhas pontilhadas que relacionam os pontos, não entramos nessa discussão por não fazer parte dos nexos desejados. Assim continuamos o desenvolvimento do experimento.

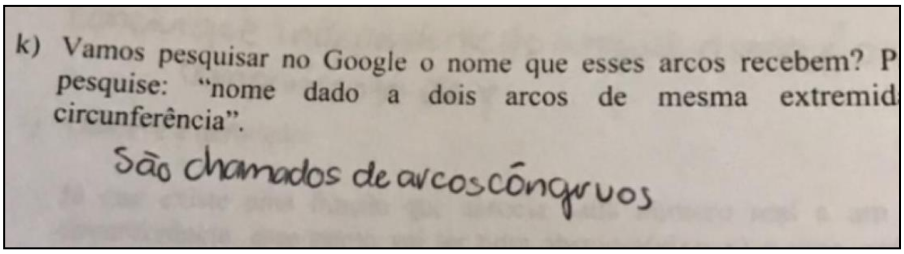
Pesquisadora: Sim, elas representam as voltas. Mas, olhem onde param as linhas pontilhadas.
Lurdes: Que elas param no mesmo lugar.
Pesquisadora: Exato! O primeiro $\pi/3$, no primeiro desenho, parou no ponto B; no segundo, foi dada uma volta completa (2π), mais um arco que mede $\pi/3$,o que corresponde a $7\pi/3$ e parou em B; no terceiro desenho,foram dadas duas voltas (o que corresponde a 4π), mais um arco que mede $\pi/3$, totalizando o que corresponde a $13\pi/3$ parou exatamente no ponto B. Mas vocês acham que isso é verdadeiro apenas para $\pi/3$?
Antônia: Não sei.

Nesse diálogo é possível percebermos que Antônia ainda não fez uma abstração substantiva. Ao recorremos aos estudos de Anjos (2017), compreendemos que o adolescente ao conhecer o pensamento conceitual e abstrato, é levado a conhecer a realidade na sua essência, indo além da aparência, mas para que isso aconteça são necessárias condições, para que a internalização aconteça, por isso a pesquisadora continua as discussões na busca de criar tais condições.

Pesquisadora: Não é! Vale para qualquer ponto, por exemplo se tivéssemos o $\pi/4$ na primeira volta; na segunda volta, ele seria $\pi/4 + 2\pi = 9\pi/4$; na terceira volta, ele seria $\pi/4 + 4\pi = 17\pi/4$. Mas, em que condições isso ocorre?

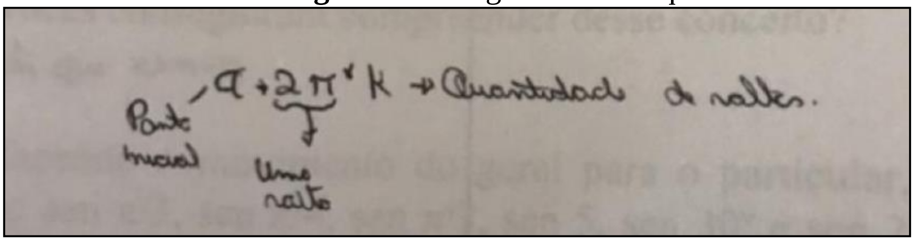
Manoel: Condições?
Pesquisadora: Sim, quando falo condições estou perguntando como e quando esses pontos vão parar no mesmo lugar?
Manoel: À medida que formos dando voltas na circunferência?
Antônia: Mas tem que falar a quantidade de voltas que vai dar na circunferência, não tem?
Pesquisadora: Sim! Corretamente! Para você ir somando os valores, uma volta soma 2π, duas voltas somam 4π e assim por diante. Esses arcos, que param em um mesmo ponto como foi o caso do $\pi/3$, $7\pi/3$ e $13\pi/3$ recebem nomes, vamos pesquisar no Google o nome que esses arcos recebem? Para isso pesquise: "nome dado a dois arcos de mesma extremidade na circunferência".
Lurdes: São chamados de arcos côngruos.

Figura 77 – Registros de Lurdes 2


k) Vamos pesquisar no Google o nome que esses arcos recebem? P
pesquise: "nome dado a dois arcos de mesma extremid
circunferência".
São chamados de arcos côngruos

Pesquisadora: Parabéns, Lurdes! São os arcos côngruos. Vamos escrever na linguagem matemática, uma expressão geral que traduza esses arcos?
Manoel: Expressão é uma fórmula?
Pesquisadora: Sim, como se fosse uma fórmula, é uma representação matemática usando símbolos, números e letras, conhecemos por fórmulas mesmo.
Joaquim: Professora, encontrei essa fórmula na internet, é isso?

Figura 78 – Registros de Joaquim



Pesquisadora: É isso sim Joaquim! Mas você consegue entender o que isso quer dizer?

Esse é o momento de *"síntese",* em que o aluno é levado a generalizar a teoria, ou seja, é uma ação de modelação de acordo com Davidov (1988), em que constrói uma representação algébrica para o conceito.

Joaquim: Anotei o que estava escrito lá, esse primeiro símbolo é o ponto inicial.

> **Pesquisadora:** Esse símbolo chama "alfa", é uma letra do alfabeto grego que usamos muito em matemática, ele é o ponto inicial, se voltássemos na figura 24 que ponto vocês acham que seria ele?
> **Lurdes:** O π/3?
> **Pesquisadora:** Exato! E o que vem depois dele na sua anotação Joaquim?
> **Joaquim:** O + e o 2π vezes k, anotei que o k é a quantidade de voltas.
> **Pesquisadora:** Sim, o k é a quantidade de voltas dadas na circunferência, por exemplo, do π/3 para o 7π/3, somamos 2π, não foi? Então o k=1. Agora do π/3 para o 13π/3 tivemos que dar duas voltas, ou seja, π/3 somamos com 4π (2.2π), e assim por diante. Vocês conseguiram compreender a representação, a fórmula?
> **Lurdes:** No início eu achei um pouco confuso, mas agora eu entendi.

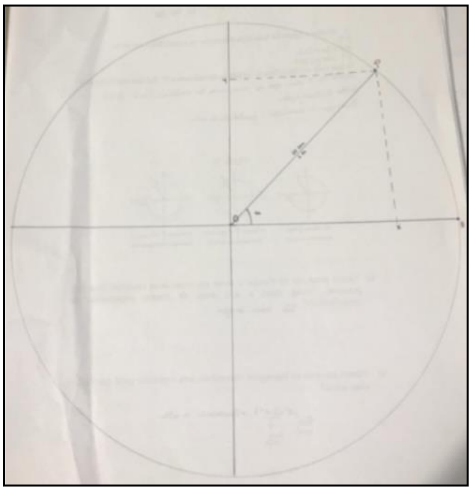
Na fala de Lurdes há evidências da *tomada de consciência da ação,* pois ela estava achando um pouco confuso a fórmula, no entanto, depois da mediação da pesquisadora, foi possível assimilá-la.

6.3.2 Resultados e análise da Situação 9

O objetivo foi assimilar o conceito lógico da função seno no conjunto dos números reais com foco nos seus nexos internos. Para isso, o aluno foi orientado a construir, usando compasso, uma circunferência de 1 dm (10 cm) de raio e a partir dela foram trabalhados os quadrantes, o ponto de partida da circunferência, as medidas de ângulos e arcos e as projeções nos eixos x e y. Nessa orientação, a pesquisadora foi construindo e explicando por meio do *Word* todo processo.

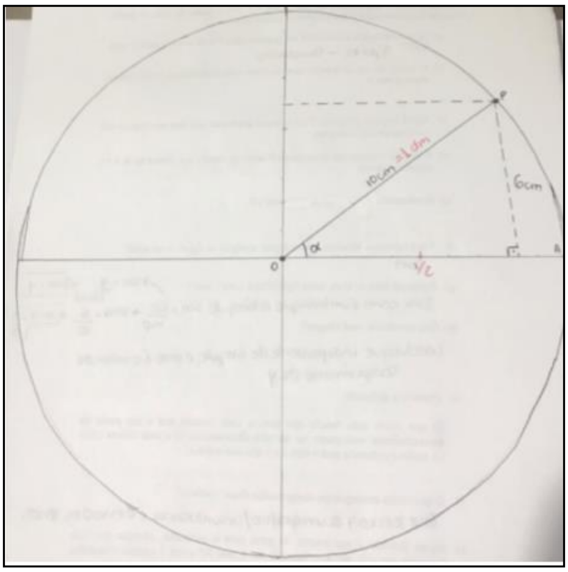
> **Pesquisadora**: Vocês conseguem enxergar um triângulo retângulo na figura construída?
> **Dora**: Sim, consigo.
> **Lurdes**: O meu ficou assim professora.

Figura 79 – Desenho de Lurdes 2



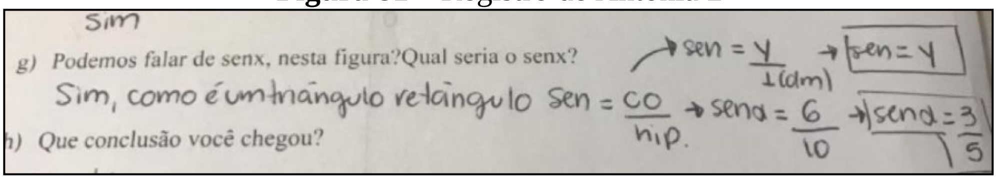
Pesquisadora: Mais alguém gostaria de mostrar como o seu desenho ficou?
Antônia: Olha o meu.

Figura 80 – Desenho de Antônia 2



Pesquisadora: Antônia, você colocou a medida de um cateto do triângulo, como você fez isso?
Antônia: Medi com a régua professora.
Pesquisadora: E esse ½ que você colocou no eixo x?
Antônia: É a metade do raio.
Pesquisadora: Certinho! Então se temos um triângulo retângulo, conseguimos encontrar o seno do ângulo que chamamos de α, não é?
Lurdes: Sim, é só fazer o cateto oposto dividido pela hipotenusa.
Pesquisadora: Isso mesmo, Lurdes! Vamos encontrar então?
Antônia: Sim, como é triângulo retângulo sen= CO/H, fiz o cálculo usando a medida em dm e cm, em dm ficou sen = y/1 que é y, em cm ficou 6/10 ou 3/5.

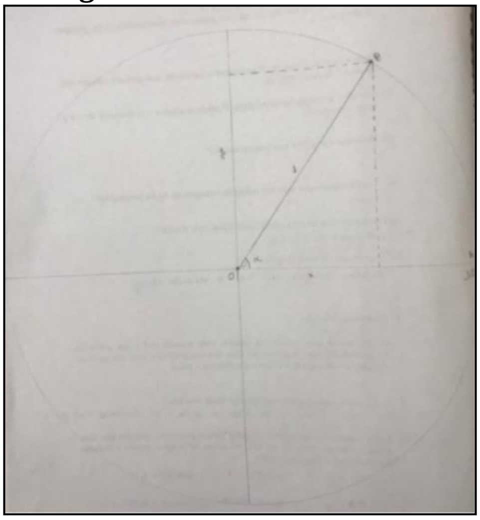
Figura 81 – Registro de Antônia 2



Pesquisadora: Isso mesmo! Mas vamos considerar a medida em decímetro, você encontrou que o sen α é y, todos encontraram esse mesmo valor?
Sebastiana: Sim, professora.
Juca: Eu também encontrei isso.
Pesquisadora: Certo! O ângulo α usado por vocês é o mesmo? Ou seja, o desenho do triângulo de todos vocês é parecido?

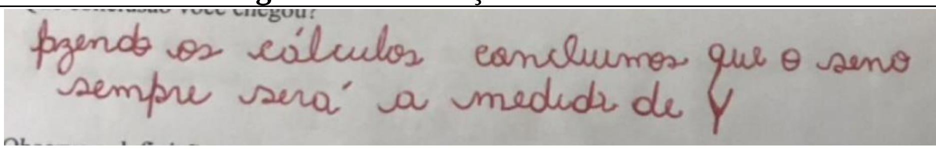
Juca: Não é não professora, o meu triângulo ficou mais comprido que o triângulo da Antônia.
Pesquisadora: Mostra o seu desenho para nós, por favor, Juca.

Figura 82 – Desenho do Juca



Pesquisadora: O seu desenho está correto também, porém o ângulo α do seu triângulo é maior que o ângulo do desenho da Antônia, mesmo assim, você encontrou que o seno de α é dado por y.
Juca: Sim.
Pesquisadora: Então que conclusão podemos retirar desse cálculo?
Antônia: Que o seno será sempre y?

Figura 83 – Anotações da Sebastiana



Transcrição da Sebastiana: Fazendo os cálculos concluímos que o seno sempre será a medida de y.

Pesquisadora: Excelente! Podemos concluir então que independente da medida do ângulo α, o seno será sempre o valor do comprimento projetado no eixo y, todos entenderam?
Juca: Acho que sim professora.
Pesquisadora: Então vamos pensar! Já que existe uma função que associa cada número real a um ponto da circunferência, esse ponto vai ter uma abscissa que é o nome dado ao valor do eixo x e uma ordenada que o nome dado ao valor do eixo y, então a ordenada que é o y, será sempre o valor do seno e complementando o valor de x seria o valor do cosseno, no entanto não vamos aqui detalhar o cosseno, certo?
Antônia: Certo! Então a medida do eixo y é o seno do ângulo.

Nesse movimento de construção da circunferência até chegarmos ao cálculo do seno, foi possível levar os alunos à *abstração e generalização teórica* de que o seno é encontrado no eixo y no sistema de eixos cartesianos associados à circunferência, ou seja, já que existe uma função que associa cada número real a um ponto da circunferência, esse ponto vai ter uma abscissa (eixo x) e uma ordenada (eixo y), então a ordenada será o seno x e a abscissa o cosseno x.

Nas palavras de Lima et al (2001. p. 60), temos uma definição formal:

> Afim de dar significado à expressão sen x quando x é um número real qualquer, é necessário associar a cada x ϵ R um ângulo, de modo que sen x seja o seno daquele ângulo. A maneira mais conveniente de fazer isso é considerar a função de Euler E:R $\rightarrow$ C, cujo contradomínio é a circunferência C de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano. Para cada x ϵ R, o ângulo que corresponde ao número x é o ângulo do semi-eixo positivo das abscissas com a semi-reta que vai da origem ao ponto E(x) ϵ C. **Então sen x é a ordenada e cos x é a abscissa do ponto E(x). Noutras palavras, tem-se E(x) = (cosx, senx).**

> **Pesquisadora:** Agora eu vou pedir para vocês, usando o desenho que fizeram, a régua e o transferidor, encontrarem o seno de alguns ângulos, sen π/3, sen π/4, sen π/2, sen 5, sen 30º e sen 2.

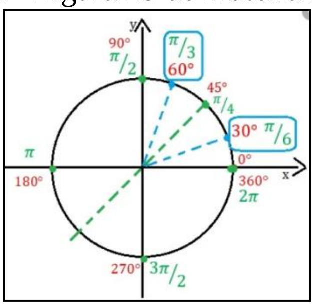
Os alunos foram orientados pela pesquisadora a usar o transferidor e a régua para encontrar os valores dos senos de cada ângulo solicitado, foi um momento que eles fizeram o movimento do geral para o particular, ou seja, após assimilarem que o seno é a projeção sobre o eixo y eles conseguiram encontrar o valor do seno de cada ângulo.

6.3.3 Análise da Situação 10

A Situação 10 tinha como objetivo a assimilação das simetrias na circunferência para que, conhecendo os valores dos senos do primeiro quadrante, possam ser determinados os senos dos arcos em outros quadrantes, buscando o geral nestas situações.

> **Pesquisadora:** A figura 25 apresenta arcos do primeiro quadrante da circunferência trigonométrica.

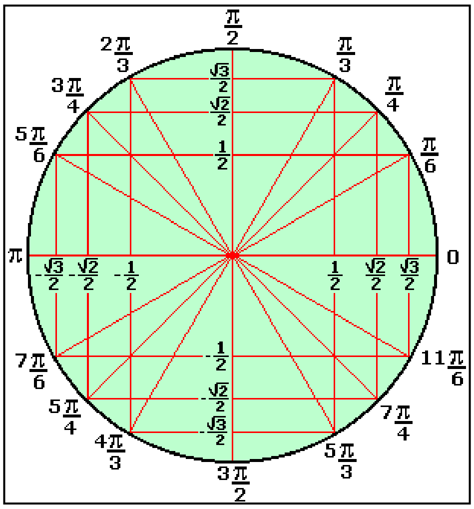
Figura 84 - Figura 25 do material de estudo



Pesquisadora: Nas tarefas anteriores compreendemos que o seno é determinado no eixo y, correspondendo à ordenada do ponto, extremidade do arco. Agora, analise a figura abaixo e anote os valores do seno dos arcos do primeiro quadrante apresentados na figura 25.

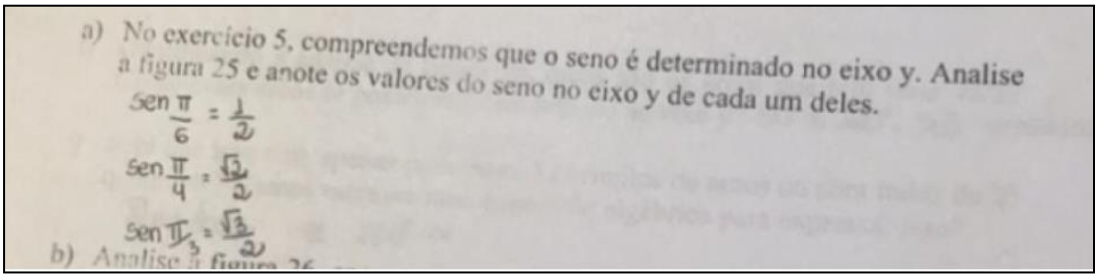
Nesse momento trouxemos a figura 85 que não estava no material para completar nossas discussões, pois ela apresenta os valores do seno no eixo y de maneira bem clara.

Figura 85 – A cincunferência trigonométrica e os valores dos senos e cossenos dos arcos em radianos



Lurdes: Ah sim professora! Agora ficou fácil achar que o senπ/6 = ½, o sen π/4=√2/2 e o sen π/3 = √3/2, eu sempre decorava, nunca entendia o porquê desses valores.

Figura 86 – Registros de Lurdes 3

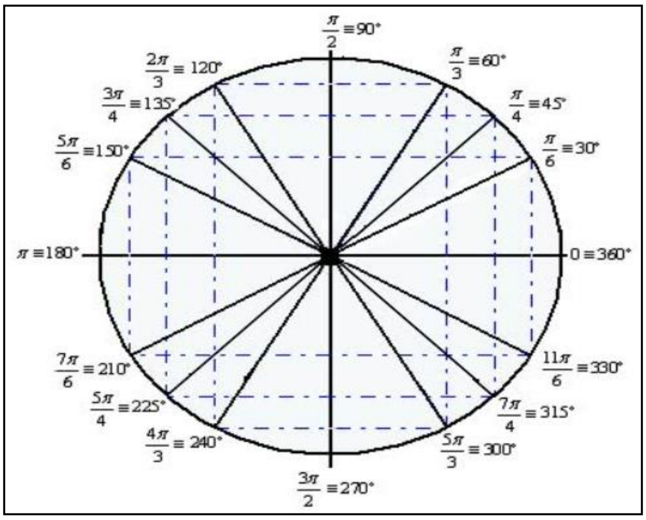


Pesquisadora: Lurdes, o que facilitou você entender e descobrir esses valores?
Lurdes: Uai, professora! Foi a explicação que o seno é encontrado medindo o eixo y.

A fala e a escrita da participante Lurdes apresentam indícios da *tomada de consciência da ação*, pois ela afirma que, após o desenvolvimento das operações, ela abstraiu e generalizou teoricamente o que é esse objeto, o conceito de seno que, antes era decorado, agora passou a ser apropriado.

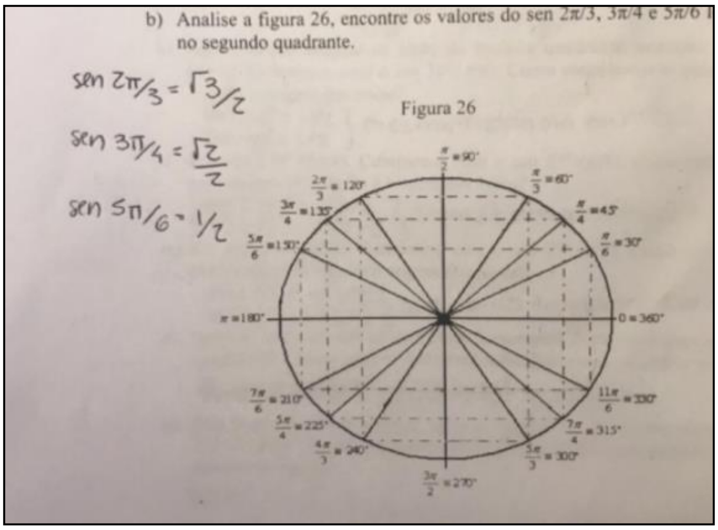
Pesquisadora: Analise a figura 26, encontre os valores do sen 2π/3, 3π/4 e 5π/6 localizados no segundo quadrante, como vocês farão essa análise?

Figura 87 – Figura 26 do material de estudo



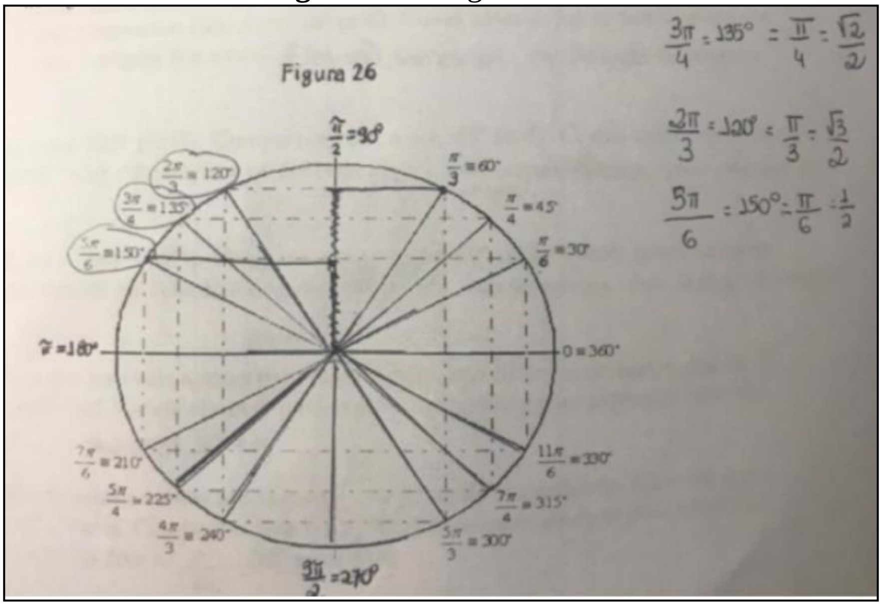
Antônia: Se olharmos no desenho, como o seno é encontrado no eixo y, na hora de encontrar o seno do 120º ele será igual ao seno de 60º? É isso professora?
Pesquisadora: Isso mesmo Antônia! Vai coincidir tanto os senos de 120º, 135º e 150º com os arcos do primeiro quadrante 60º,45º e 30º nessa ordem.
Antônia: Então o meu ficou assim.

Figura 88 – Registros de Antônia 3



Pesquisadora: Raciocínio correto! Todos entenderam os valores encontrados?
Lurdes: Sim, professora! Olha como o meu ficou.

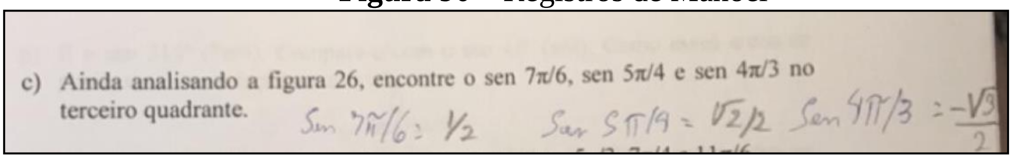
Figura 89 – Registros de Lurdes 4



Nos registros da aluna Lurdes, verificamos um problema, que é recorrente no processo ensino-aprendizagem de Matemática, o uso correto da linguagem matemática, quando se indicam igualdades. Ela escreve que 3π/4 = 135º, o que é correto, em seguida, usa um sinal de igual, afirmando que 135º = π/4, o que não é correto, e depois que π/4= √2/2, o que, também, não é correto. O uso da linguagem matemática não corresponde, do ponto de vista formal, ao pensado, a indicação que os valores √2/2, √3/2 e ½ referem-se ao seno sequer aparece. A aluna demonstra a apropriação do conceito, no entanto, a relação a linguagem matemática não é condizente analisando a sua escrita.

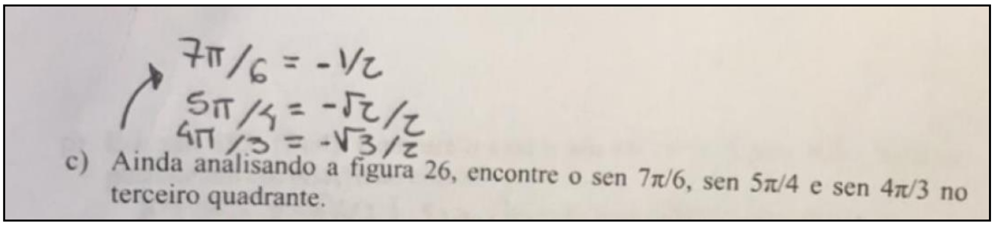
Pesquisadora: Ainda analisando a figura 26, encontre o sen 7π/6, sen 5π/4 e sen 4π/3 no terceiro quadrante. E depois analisando os do quarto quadrante, encontre o sen 5π/3, 7π/4 e 11π/6.
Manoel: Então... Essa linha que está passando dentro da circunferência está ligando os valores?
Pesquisadora: Sim, Manoel! Está mostrando as simetrias entre os arcos.
Manoel: Então, o seno de 210º é igual ao seno de 30º?
Pesquisadora: Certinho!
Manoel: Então, o meu ficou assim.

Figura 90 – Registros de Manoel



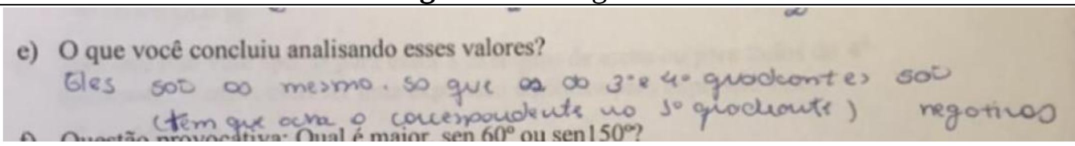
Pesquisadora: Manoel, porque os dois primeiros ficaram positivos e o último negativo?
Manoel: Anotei errado, é tudo positivo professora!
Antônia: O meu não professora! Todos ficaram negativos.

Figura 91 – Registros de Antônia 4


$7\pi/6 = -1/2$
$5\pi/4 = -\sqrt{2}/2$
$4\pi/3 = -\sqrt{3}/2$
c) Ainda analisando a figura 26, encontre o sen $7\pi/6$, sen $5\pi/4$ e sen $4\pi/3$ no terceiro quadrante.

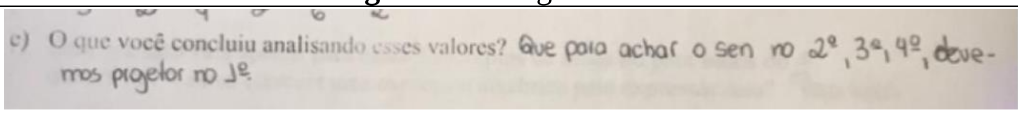
Pesquisadora: Então vamos entender se é negativo ou positivo? Vamos pensar... Nós entendemos que, para encontrar o seno, basta projetarmos no eixo y e encontrar o comprimento, o eixo é orientado não é? Acima de zero, os valores são positivos, e, abaixo de zero, os valores são negativos. Manoel, quando você projetou no eixo y para encontrar sen 210º, essa projeção ficou acima ou abaixo de zero?
Manoel: Abaixo, vi agora que são negativos, né?
Pesquisadora: Sim! O que vocês concluíram, analisando esses valores?

Figura 92 – Registros de Juca


e) O que você concluiu analisando esses valores?
Eles são os mesmo. só que os do 3° e 4° quadrantes são negativos
(tem que acha o correspondente no 1° quadrante)

Transcrição do Juca: Eles são os mesmos, só que os do 3º e 4º quadrantes são negativos.

Figura 93 – Registros de Lurdes 5


c) O que você concluiu analisando esses valores? Que para achar o sen no 2º, 3º, 4º, devemos projetar no 1º

Transcrição da Lurdes: Que para achar o seno no 2º, 3º e 4º, devemos projetar no 1º.

Nesse instante, paramos novamente para retomar ao Diagnóstico realizado no início do experimento. Lembraram da palavra SETACO, mas não sabiam explicar o seu significado.

Pesquisadora: Vocês estão certos! Agora vamos retomar o diagnóstico que fizemos no nosso primeiro encontro. Lá vocês falaram a palavra SETACO, lembram-se? E eu perguntei para vocês o significado, vocês falaram que não sabiam, só lembravam que era sobre os sinais. Aqui vocês podem realmente compreender o significado de SETACO. Em relação ao significado da palavra, SE refere-se a seno, TA a tangente e CO ao cosseno, como nosso foco é o seno vou explicar apenas o seno. Esse SETACO é um “macete[79]” muito usado para os alunos lembrarem os sinais do seno, cosseno e tangente em relação aos quadrantes, normalmente ele aparece assim SETACO (+).

12 13 14

Ele quer dizer que o sinal do seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes, a tangente é positiva no primeiro e terceiro quadrantes e o cosseno é positivo no primeiro e quarto quadrantes, por isso aparecem os valores 12,13 e 14 abaixo das abreviaturas. Assim, acabamos de compreender pela definição de seno, que ele é positivo no primeiro e segundo quadrante, pois sua projeção no eixo y está acima do zero, e é negativo no terceiro e quarto quadrante, pois sua projeção no eixo y está abaixo de zero. Ficou claro?

Manoel: Fui eu que falei professora, mas realmente não lembrava e não tinha entendido nada disso.
Pesquisadora: Agora, ficou claro o SETACO?
Manoel: Sim.

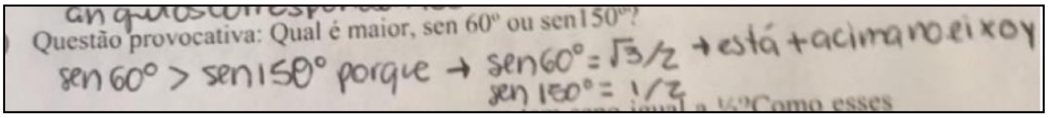
Na sequência do experimento, trouxemos algumas questões provocativas, indo ao encontro de Lima (2001), quando afirma a carência das questões provocativas e desafiadoras nos livros didáticos que ele analisou em sua obra. Essa foi mais uma preocupação desse experimento, provocar e instigar o pensamento do participante.

Pesquisadora: Agora vou trazer uma questão provocativa: Qual é maior, sen π/3 ou sen5π/6? Vamos buscar a medida usando radianos, ok?

A pesquisadora com essa solicitação para a utilização dos valores em radianos, aplica uma das ações de Davidov (1986) que é o controle das ações, com a intenção de controlar a realização das ações de transformação e criação de modelos.

Manoel: É o seno de 5π/6 o maior?
Pesquisadora: Retome o desenho da circunferência, Manoel. Faça a projeção do ponto correspondente à extremidade do arco que mede 5π/6 e do que mede π/3 no eixo y e verifique os valores encontrados.
Antônia: É o sen π/3, do 60º, que é maior.
Pesquisadora: Por que Antônia?
Antônia: Porque o seno de 60º está mais para acima no eixo y.

Figura 94 – Registros de Antônia 5



Pesquisadora: Isso! O comprimento dele é maior, não é Antônia? Observe a figura 26, quais são os arcos que tem seno igual a ½?

[79] Macetes são técnicas usadas para memorizar uma teoria muito usada nos cursinhos pré-vestibulares.

Lurdes: O 30º e o 150º.

Essas questões para serem respondidas dependem da construção do pensamento teórico do aluno. Na sequência, discutimos a simetria[80] no estudo da circunferência, um nexo conceitual interno fundamental para o estudo da função seno.

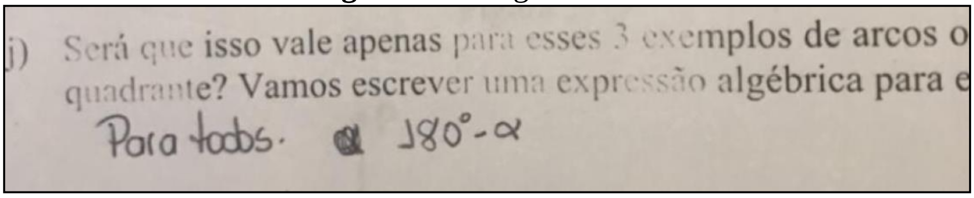
Pesquisadora: Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo y?
Manoel: Eles estão no mesmo rumo.
Pesquisadora: Estão no mesmo alinhamento, não é, Manoel? Mas eu pergunto qual a posição deles em relação ao eixo y.
Manoel: Um está de um lado, o outro do outro lado do y.
Pesquisadora: E a distância deles em relação ao eixo y?
Raimundo: Eles têm a mesma distância do eixo y.
Pesquisadora: Isso na matemática recebe um nome, quem sabe me dizer qual é? Vamos lembrar... Quando você divide uma figura ao meio e um lado é igual ao outro, dizemos que eles são o quê?
Lurdes: Simétricos.
Pesquisadora: Isso mesmo, Lurdes! Então quer dizer que o arco de medida π/6 e a medida 5π/6 são simétricos em relação ao eixo y, pois para ser simétrico tem que ter um elemento de referência, que nesse caso é o eixo y. Na mesma figura, quais são os arcos que tem seno igual a √2/2?
Antônia: 45º e 135º[81]
Pesquisadora: Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo y?
Raimundo: São simétricos também.
Pesquisadora: Continuando a análise da figura 26, quais são os arcos que tem seno √3/2?
Manoel: O 60º e o 120º.
Pesquisadora: Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo y?
Raimundo: São simétricos. Agora não esqueço mais!!!
Pesquisadora: Agora observem os arcos simétricos: π/6 e 5π/6, π/4 e 3π/4, π/6 e 2π/3, analisando de dois em dois, o que vocês observam?
Antônia: Em graus seria 30º e 150º, 45º e 135º, 60º e 120º, que a soma dá sempre 180º.
Pesquisadora: Ah sim! Então eu pergunto, se você tiver um arco do primeiro quadrante, por exemplo, o π/6, como você comenta 30º, como você fará para encontrar o seu simétrico no segundo quadrante?
Lurdes: Se eu tenho o 30º e o simétrico é 150º, eu faço 180º - 30º.
Pesquisadora: Isso vale para todos os outros dois?
Antônia: Sim. 180º - 45º= 135º e 180º -60= 120º.

[80]"Embora seja fácil reconhecer e compreender simetrias intuitivamente, é um pouco mais difícil defini-la em termos matemáticos mais precisos. No entanto, no plano, a ideia básica é bastante clara: uma figura no plano é simétrica se podemos dividi-la em partes de alguma maneira, de tal modo que as partes resultantes desta divisão, coincidam perfeitamente, quando sobrepostas. (UFRJ, Projeto Pré- Cálculo. Disponível em: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html. Acesso em: jan. 2021. No caso do estudo do seno, está presente a simetria axial (em relação a um eixo) e a central (em relação a um ponto).

[81] Como comentamos anteriormente, os alunos insistem em usar as medidas em graus, apesar da pesquisadora sempre reiterar a importância do seu uso em radianos.

Pesquisadora: Será que isso vale apenas para esses 3 exemplos de arcos ou para todos do 2º quadrante?
Lurdes: Acho que vale para todos.
Pesquisadora: Isso mesmo! Vamos escrever uma expressão algébrica para expressar isso? Represente o arco do primeiro quadrante por α.
Antônia: A expressão é a fórmula, né?
Pesquisadora: Sim.
Lurdes: A minha ficou 180º - α

Figura 95 – Registros de Lurdes 5



Pesquisadora: Exatamente, Lurdes! Então a representação algébrica para encontrar arcos simétricos no segundo quadrante, basta fazer π menos a medida do arco do primeiro quadrante. Todos entenderam?
Antônia: Sim, professora!

Enquanto discutíamos a tarefa, os participantes começaram a assimilar o porquê de alguns conceitos, como o de simetria, que pode ser considerado um dos nexos conceituais da função seno. Usando a *abstração e a generalização teóricas* em relação à simetria entre arcos do primeiro e do segundo quadrantes, possibilitou as discussões e a abstração e a generalização das demais, relacionadas ao terceiro e quarto quadrante. Houve a apreensão de algo que era geral.

Neste sentido, cabe retomar Davidov (1982, p. 145), quando afirma que a abstração substantiva é contraditória, pois ela é "começo não desenvolvido do todo desenvolvido". Há um todo desenvolvido, que é a relação simétrica entre arcos de circunferência, que permite o cálculo dos valores das funções trigonométricas, desse todo, a relação entre arcos do primeiro e segundo quadrantes e o cálculo do seno é um começo.

6.3.4 Análise da Situação 11

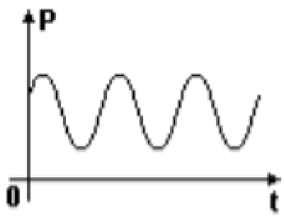
O objetivo da Situação 11 é compreender a periodicidade da função seno, sendo esse um dos nexos conceituais das funções trigonométricas, incluindo a função cosseno que não faz parte do nosso objeto de estudo. No entanto, o que caracteriza ambas as funções é a continuidade, o período e representação de movimentos regulares, além de serem constantemente usadas como instrumento de leitura da realidade, pois podem ser aplicadas em diferentes contextos do cotidiano como é o caso utilizado por nós nas tarefas, do movimento das ondas do mar. Mas o que as distingue é exatamente o seu ponto de partida, a função seno inicia-se no zero, diferente do cosseno que possui ponto de partida no 1.

Ao estudarmos especificamente a função seno, destacamos outros nexos conceituais presentes, como a *fluência* e a *interdependência*, presente, por exemplo, na relação de dependência entre o movimento das ondas e o tempo.

> **Pesquisadora:** Observe os gráficos, vamos ver alguns exemplos de funções, associadas a diversos fenômenos periódicos e os seus respectivos gráficos.

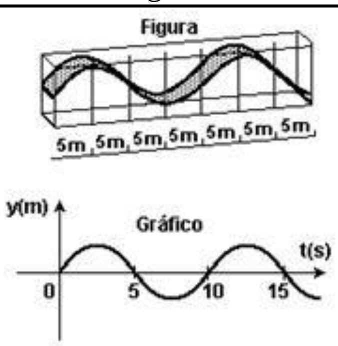
Exemplo 1) (UFF - adaptada) No processo de respiração do ser humano, o fluxo de ar através da traquéia, durante a inspiração ou expiração, pode ser modelado por uma função F, definida, em cada instante t. A pressão interpleural (pressão existente na caixa torácica), também durante o processo de respiração, pode ser modelada pela função P, definida, em cada instante t. O gráfico de P, em função de t, é:

Figura 27



Exemplo 2) (Fuvest – adaptada) Um grande aquário, com paredes laterais de vidro, permite visualizar, na superfície da água, uma onda que se propaga. A figura representa o perfil de tal onda no instante To. Durante sua passagem, uma boia, em dada posição, oscila para cima e para baixo e seu deslocamento vertical (y), em função do tempo, está representado no gráfico.

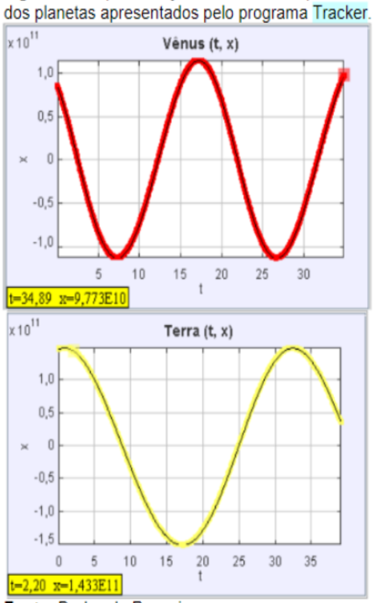
Figura 28



Exemplo 3) Os gráficos abaixo fazem parte do estudo de Silva, Cruz (2016) e representam os movimentos periódicos dos planetas Vênus e Terra elaborado pelo programa Tracker:

Figura 29

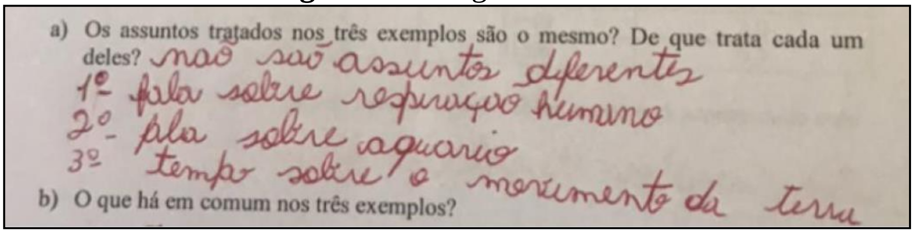
Figura 4 – Representação do movimento periódico dos planetas apresentados pelo programa Tracker.



Fonte: Dados da Pesquisa

Pesquisadora: Os assuntos tratados nos três exemplos são o mesmo?
Sebastiana: Não.
Juca: São assuntos diferentes, professora.
Pesquisadora: De que trata cada um deles?
Sebastiana: O primeiro fala sobre respiração humana, o segundo sobre aquário e o terceiro sobre o movimento da Terra.

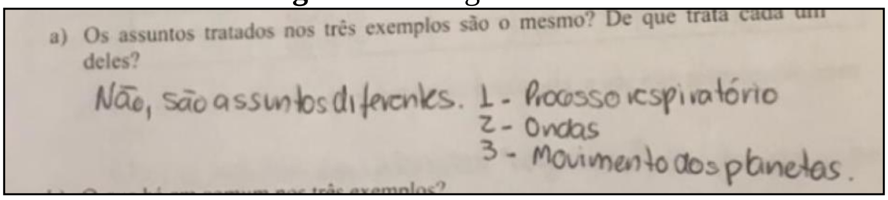
Figura 96 – Registros de Sebastiana



a) Os assuntos tratados nos três exemplos são o mesmo? De que trata cada um deles? não são assuntos diferentes
1º fala sobre respiraçao humano
2º fala sobre aquario
3º tempo sobre o movimento da terra
b) O que há em comum nos três exemplos?

Pesquisadora: Obrigada, Sebastiana! Antônia, o que você colocou?
Antônia: Então, entendi que o primeiro fala do processo respiratório, o segundo das ondas e o terceiro do movimento dos planetas.

Figura 97 – Registros de Antônia 6



a) Os assuntos tratados nos três exemplos são o mesmo? De que trata cada um deles?
Não, são assuntos diferentes. 1- Processo respiratório
2- Ondas
3- Movimento dos planetas.

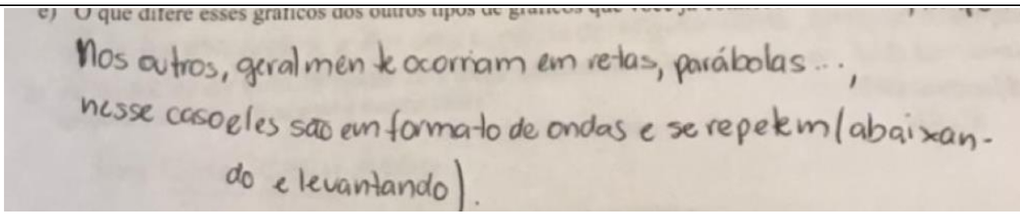
Pesquisadora: Ok! Então o primeiro fala sobre respiração humana, o segundo das ondas e o terceiro da movimentação dos planetas, perfeito! O que há em comum nos três gráficos?
Dora: No desenho, professora?

Pesquisadora: Sim, no desenho.
Antônia: Em todos os gráficos tem essas ondas.

Esse é um momento que merece destaque, pois a aluna Antônia está dando um salto rumo a uma *abstração* que não depende de cada uma das situações específicas apresentadas. A palavra "onda" remete à característica principal desses fenômenos.

Pesquisadora: Sim, Antônia! Mas em relação ao enunciado, o que vocês viram em comum entre eles?
Dora: Falam do tempo.
Pesquisadora: OK! O que difere esses gráficos dos outros tipos de gráficos que vocês já conhecem, que já estudaram?

Figura 98 – Registros de Antônia 6


e) O que difere esses gráficos dos outros tipos de gráficos que

Nos outros, geralmen te ocorriam em retas, parábolas...,
nesse caso eles são em formato de ondas e se repetem (abaixan-
do e levantando).

Transcrição da Antônia: Nos outros, geralmente ocorriam em retas, parábolas. Nesse caso, eles são em formato de ondas e se repetem (abaixando e levantando).

A pesquisadora iniciou um diálogo com os participantes em busca de levá-los a assimilar o movimento das ondas, em outras palavras, foram discutidos os pontos máximos e mínimos das ondas e o período dessas ondas, mostrando que existe uma repetição infinita da curva..

6.3.5 Análise da Situação 12

Para finalizar o experimento, desenvolvemos a situação 12, que teve como objetivo modelar, a partir do conceito, a função seno com foco em suas representações (geométricas, algébrica e numérica), por meio de um fenômeno da natureza que é o movimento vertical do mar (maré). Essa situação constava no diagnóstico realizado no início do experimento, fato esse que contribuirá para compararmos os gráficos construídos nesses dois momentos.

Foi fornecida os dados abaixo que apresenta a previsão feita pelo Centro de Hidrografia da Marinha (Tábuas de Maré) relacionando a altura da maré (em metros) no Porto de Maceió (Alagoas) entre os dias 01 e 04 de janeiro de 2019.

Figura 99 – Dados fornecidos na situação 12 do material de estudo

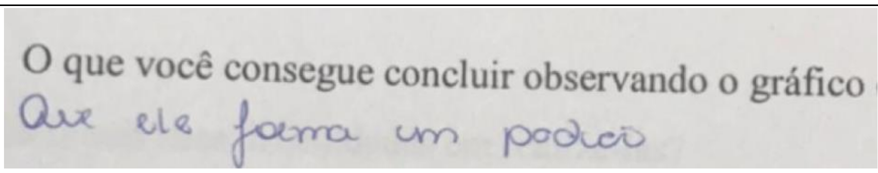
Coleta	**Data**	**Hora**	**Altura da Maré (m)**
1	01/01/19	00:09	1,8
2	01/01/19	06:36	0,5
3	01/01/19	12:38	1,7
4	01/01/19	18:56	0,5
5	02/01/19	01:06	1,8
6	02/01/19	07:24	0,5
7	02/01/19	13:24	1,8
8	02/01/19	19:45	0,4
9	03/01/19	01:56	1,9
10	03/01/19	08:08	0,4
11	03/01/19	14:08	1,9
12	03/01/19	20:28	0,4
13	04/01/19	02:38	1,9
14	04/01/19	08:49	0,4
15	04/01/19	14:49	2,0
16	04/01/19	21:06	0,3

Pesquisadora: Observe as alturas das marés fornecidas, o que está acontecendo com elas?
Dora: Estão aumentando e abaixando sempre.
Juca: Estão caindo e subindo.
Pesquisadora: Exatamente!

A pesquisadora, usando o Excel, construiu o gráfico relacionando a coleta, no eixo x, e a altura das marés (m), no eixo y. A partir dele solicitou que os alunos observassem o gráfico e tirassem algumas conclusões sobre ele.

Antônia: O gráfico forma ondas.
Pesquisadora: Bem lembrado, Antônia!
Juca: Que ele forma um padrão.

Figura 100 – Anotações de Juca 2

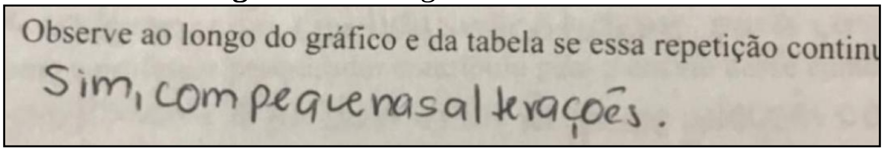


Transcrição do Juca: Que ele forma um padrão.

Pesquisadora: Um padrão, Juca? Como assim?
Juca: As ondas sobem e descem sempre iguais.

> **Pesquisadora:** vamos entender melhor isso que o Juca falou. Às 06:36h do dia 01/01/19 (coleta 2), a altura da maré era de 0,5m, depois de quantas horas ela voltou a ter a mesma altura?
> **Lurdes:** 12 horas e 20 minutos depois.
> **Pesquisadora:** Certo! Agora observem ao longo do gráfico e dos dados se essa repetição continua.
> **Antônia:** Sim, com pequenas alterações.

Figura 101 – Registros de Antônia 7



> **Pesquisadora:** Vou mostrar para vocês agora, pesquisando no Google, o nome que recebe esse intervalo de repetição das marés. Observem aqui, chama período. Então período é esse intervalo, que nesse caso é de aproximadamente 12h, no qual os valores das alturas das marés ficam repetindo.

A pesquisadora trouxe para discussão outros exemplos de fenômenos periódicos do cotidiano que seguem essa mesma oscilação, ou seja, fenômenos que se repetem da mesma forma em um mesmo intervalo de tempo. Foi comentado dos batimentos cardíacos e dos movimentos do sol e da lua causando o dia e a noite e as fases da lua.

> **Pesquisadora:** Agora vamos construir o gráfico da função f(x) = sen x e comparar com o gráfico que construí usando o excel?

Para essa construção a pesquisadora montou, juntamente com os alunos, uma tabela com os valores dos senos de 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π usando a circunferência construída na situação 9, cujos valores encontrados foram respectivamente, 0,1,0,-1 e 0. Após a construção, solicitamos que os alunos socializassem os seus desenhos.

Figura 102 - Desenho do gráfico da Antônia

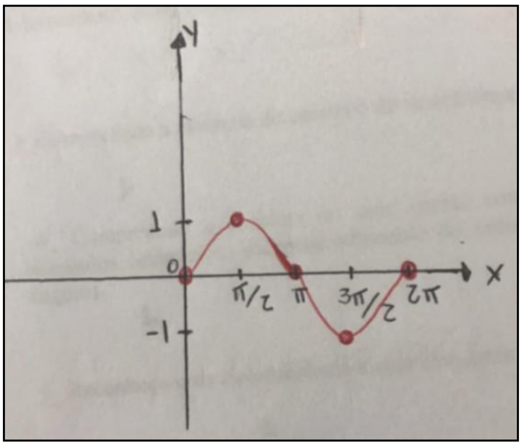


Figura 103 - Desenho do gráfico do Juca

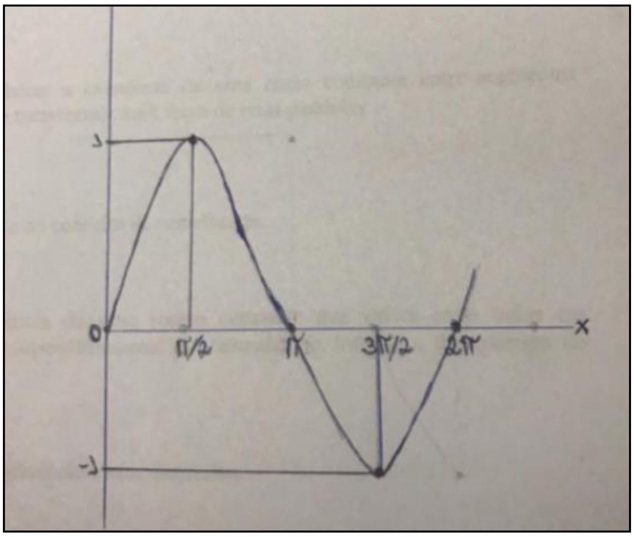
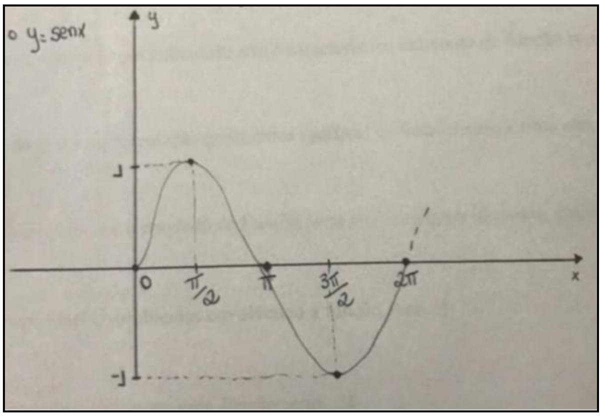


Figura 104 – Desenho do gráfico da Lurdes

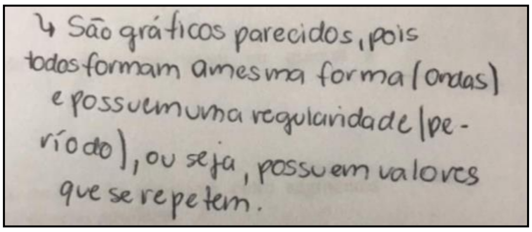


Para finalizar a situação 12, a pesquisadora comentou cada gráfico e o comparou ao gráfico construído anteriormente usando o Excel do movimento das marés. Vários alunos falaram que os gráficos eram parecidos, que possuíam a mesma forma, que formavam ondas. Foi discutido o que seria sua representação geométrica (gráfico), algébrica (lei ou fórmula) e numérica (valores).

Cabe aqui buscarmos novamente Davidov(1988) e suas ações, a construção do gráfico realizada é uma modelação da relação universal e ao construirmos esse gráfico tendo como referência o movimento das marés, estamos em um processo de transformação de modelos, pois envolve as propriedades da relação universal que foi identificada no objeto.

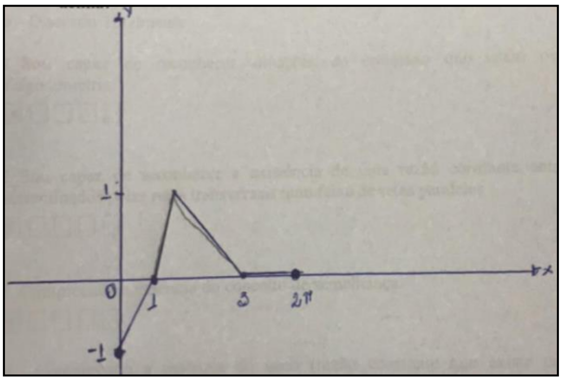
Destaco a afirmação e a escrita da participante Antônia, ela expressa que os gráficos são parecidos por terem a mesma forma de ondas, ela usa o termo “regularidade” do gráfico, do período, por possuírem valores que se repetem, sendo esses indícios (relações entre conceitos) que essa participante fez um *movimento de abstração teórico e de síntese*, conseguindo apropriar da essência do conceito da função seno.

Figura 105 – Registros de Antônia 8


4 São gráficos parecidos, pois
todos formam a mesma forma (ondas)
e possuem uma regularidade (pe-
ríodo), ou seja, possuem valores
que se repetem.

No entanto, o gráfico da aluna Tereza não seguiu o mesmo padrão, pois ela não conseguiu formar as ondas características da função seno, sendo esse um indício de que ela não assimilou a representação geométrica da função seno, ainda está muito presa aos gráficos das funções lineares.

Figura 106 - Desenho do gráfico da Tereza



Ao fazermos uma síntese da Tarefa 2, que tinha como objetivo desenvolver o conceito da função seno com domínio no conjunto dos números reais por meio da exploração da função de Euler e seu movimento lógico-histórico, observamos que as oito situações desenvolvidas, cada uma com seu objetivo específico, contribuíram para a apropriação do aluno em relação ao conceito da função seno. Identificamos indícios (nos diálogos, na escrita, nos questionamentos, nos diálogos) que demonstram tal apropriação. Essa apropriação do conhecimento teórico, segundo Davidov (1988), ocorre, quando o aluno identifica a essência do objeto. Para isso, as tarefas são fundamentais quando oferecem autonomia ao aluno para que ele consiga desenvolver o sistema de ações particulares na busca da formação do conceito, sendo necessária assim a realização da última ação que é a avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada, que, neste caso, é a função seno.

Nesse sentido, analisamos os dados para fazermos um levantamento quantitativo das participações dos alunos no experimento, assim verificamos que a aluna Lurdes foi a que mais se interagiu com cerca de 80 interações, o Manoel e a Antônia com cerca de 50 participações, seguida da Dora em média com 30 interações. Apesar da análise não ser quantitativa, não podemos apagar os sujeitos que aprendem, é um momento de refletir as contribuições de suas participações no desenvolvimento do pensamento teórico relacionado ao objeto de estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo dessa pesquisa foi experimentar, na prática escolar do ensino médio, uma proposta de organização do processo de ensino-aprendizagem da função seno, com foco no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos. Para isso, recorremos ao Materialismo Histórico-Dialético, como método, observando as suas leis: a relação parte-todo, a contradição, o movimento, as quais perpassaram todas as etapas da pesquisa. Essas devem ser vistas como partes, que têm vida própria, mas que se entrelaçaram na busca do objetivo geral, materializado em todas elas.

Para desenvolver a pesquisa, nessa perspectiva epistemológica, realizamos o experimento didático-formativo, uma metodologia, cujas origens estão em Vigotski e em seus seguidores. É um método de pesquisa e também de ensino, um fazer teórico e prático, que visa potencializar a aprendizagem e promover o desenvolvimento do aluno em todos os aspectos.

O experimento didático-formativo nesta pesquisa observou rigorosamente todas as suas etapas, de acordo com Aquino (2017): 1) revisão de literatura e diagnóstico da realidade; 2) elaboração do sistema didático experimental; 3) desenvolvimento do experimento; 4) análise dos dados e elaboração do relatório. Essas fases não se constituíram em momentos isolados e apresentaram resultados que constituem, em sua totalidade, os resultados da pesquisa.

Na primeira etapa, por meio de pesquisa bibliográfica, buscamos nos apropriarmos de conceitos de L. S. Vigotski, A.Leontiev, V.V. Davidov e D. B. Elkonin, no âmbito da Teoria Histórico-Cultural e das teorias dela derivadas – Teoria da Atividade e Teoria da Atividade de Estudo. Os conceitos de mediação, Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP, idades psicológicas, formação de conceitos, conceitos empíricos e conceitos científicos, pensamento teórico, foram fundamentais para a elaboração do experimento, para o seu desenvolvimento e a sua análise.

Como a formação do conceito da função seno, de modo a desenvolver o pensamento teórico, era o objetivo da organização do ensino, investigamos o movimento lógico-histórico do conceito da função seno, com foco nos seus nexos conceituais internos, fluência, interdependência, variável, campo de variação, semelhança, proporcionalidade, simetria e periodicidade, na busca de nos apropriarmos das relações entre os conceitos, que constituem a rede conceitual da função seno, em seu processo lógico-histórico, pois isso, para nós, pesquisadoras, não era suficientemente conhecido. Podemos afirmar que precisávamos construir sínteses, para depois elaborar e desenvolver o experimento. Nesse sentido, podemos afirmar que o experimento foi formativo para as pesquisadoras.

A revisão de literatura e o diagnóstico da realidade incluiu, também, investigar a constituição do Ensino Médio, na atualidade (última década do séc. XX e as duas primeiras décadas do séc. XXI), em seus aspectos legais e curriculares, focando o ensino de matemática e, particularmente o ensino de trigonometria. A partir da análise dos documentos que regulam o Ensino Médio, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB/1996, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Currículo Básico Comum de Minas Gerais (CBC), Base Nacional Curricular (BNCC),Diretrizes Curriculares Nacionais, a Lei n° 13.415/2017 (Reformulação do Ensino Médio, observamos marcas do modo de produção capitalista presentes na dicotomia entre o Ensino Médio ser uma preparação para o mercado de trabalho e/ou uma preparação para o ingresso no ensino superior, no entanto mesmo com todas as discussões relacionadas à sua reformulação, essa dualidade ainda persiste.

Pudemos constatar neste estudo que são muitas as alterações que o Ensino Médio sofreu nos últimos trinta anos, desde a LDB/96, o que demonstra uma falta de identidade desta última etapa da educação básica. As propostas nem chegam a ser implantadas e outras já são apresentadas. Os documentos têm muitas contradições – ao mesmo tempo, em que propõem a formação integral dos alunos, visam atender às demandas do mercado, de flexibilização, de formação de empreendedores, de ênfase nas competências. São propostas recheadas de “boas intenções”, por exemplo, a escola integral para os jovens, porém difíceis de serem implementadas, pois estamos num momento de contingenciamento de recursos para a educação.

No que diz respeito ao ensino de matemática, triangulando os fundamentos teóricos, a pesquisa documental, a análise dos livros didáticos, a observação das aulas, concluímos que há uma ênfase no desenvolvimento do pensamento empírico, na aplicação do conhecimento matemático à vida dos alunos, ao “saber fazer”. Isso é importante, mas para que ocorra, é necessária a apropriação do saber científico, a formação de conceitos, o desenvolvimento do pensamento teórico, que se realizam na educação escolar.

Todos esses resultados foram fundamentais para subsidiar a elaboração, o desenvolvimento e a análise do experimento didático-formativo, que é uma metodologia que busca criar condições adequadas para o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno. Assim, na sua elaboração não buscamos tarefas inéditas, muito diferentes das encontradas nos livros didáticos, mas propusemos situações que conduzissem o aluno para a apropriação dos nexos conceituais do conceito da função seno no domínio dos ângulos planos e no domínio dos números reais. Essa empreitada não foi fácil, pois exigiu o conhecimento das teorias mencionadas e o conhecimento do movimento lógico-histórico dos conceitos matemáticos, além da mudança de postura pedagógica e didática na condução da aula. Assim, em muitos momentos, assinalados no texto, percebemos que poderíamos ter organizado as situações de outro modo. As contradições entre o esperado e o realizado, nas condições objetivas do experimento, estiveram presentes, o que não invalida a sua realização, pois é um experimento.

Em síntese, observamos que as ações e operações realizadas pelos alunos contribuíram para o processo de tomada de consciência da ação, de movimento de abstração teórica e de sínteses (generalizações teóricas) dos conceitos em vários momentos. Indícios de desenvolvimento, ou seja, relações e assimilações entre conceitos estão presentes nos diálogos entre alunos e pesquisadora e nos registros das situações. O desenvolvimento do pensamento teórico ocorreu de forma gradativa e diretamente relacionada com a mediação do professor, que atuou na ZDP dos alunos, estimulando-os por meio das situações propostas e dos diálogos, que foram constantes, contando com instrumentos mediadores, como o Material de Estudo, encaminhado ao aluno, o transferidor, o compasso, além dos recursos tecnológicos como o *WhatsApp* e o *Google Meet*, que se fizeram necessários devido ao isolamento social, decorrente da pandemia causada pelo Covid 19.

Ficou evidente que alguns alunos participantes do experimento conseguiram apropriar-se do conceito da função seno no domínio dos ângulos planos, como uma razão constante entre lados de um triângulo retângulo, como, também de nexos conceituais da função seno no domínio dos números reais, compreendendo a função de Euler, que permite associar pontos da reta a pontos do círculo trigonométrico, no qual o seno de um número real é a ordenada desse ponto. Além de se apropriares de nexos conceituais internos da função, como a fluência, a interdependência, a periodicidade e a simetria. Nem todos os alunos atingiram o mesmo nível de síntese, porém a apropriação de um conceito ocorre por múltiplas aproximações.

Os resultados apresentados permitem reiterar como aspecto original e inédito desta pesquisa o esforço teórico, de extrair da Teoria da Atividade de Estudo de Davidov, contribuições para o ensino da função seno por meio de tarefas que buscassem a essência dos conceitos, com foco na abstração e na generalização substantivas.

Assim, podemos afirmar que a organização do ensino realizada cumpriu os seus objetivos como experimento, e pode servir de base para outros estudos, no sentido de aprimorá-la. Destacamos limitações e desafios identificados no decorrer desse estudo, tanto relacionados ao seu desenvolvimento, quanto à sua elaboração.

Em relação à elaboração, tivemos o grande desafio de desenvolver um experimento, que exigia a apropriação de um referencial teórico denso, pouco discutido - nos cursos de formação de professores, tanto nas licenciaturas, como na pós-graduação *stricto-sensu*. Além disso, para o desenvolvimento desse experimento é necessário que o pesquisador e o professor que irá realizá-lo conheça o desenvolvimento lógico-histórico do conteúdo enquanto um conceito, e não, apenas, como uma definição. Nesse sentido, sugerimos que os cursos de formação de professores incorporem essas teorias em seus currículos de didática.

Em relação ao desenvolvimento, um limite foi o tempo reduzido para a sua realização, em função do prazo que tínhamos para a conclusão do curso doutorado, o que dificultou a ampliação de discussões entre pesquisador e participantes durante o desenvolvimento das tarefas. Outra limitação refere-se à necessidade de realização do experimento de forma *on-line,* por meio do *Google Meet* em face à pandemia de COVID-19, o que dificultou a exploração do trabalho em equipe e as interações entre os participantes.

Vale destacar que o conceito da função seno está relacionado a vários outros conceitos matemáticos, os quais não conseguimos esgotar nesse estudo, mesmo alguns nexos internos podem ser mais bem explorados, como é o caso da periodicidade. Isso sugere que sejam realizadas mais pesquisas no sentido de aproveitar o potencial das teorias de Davidov no desenvolvimento do pensamento teórico, por meio da organização do experimento didático-formativo.

Em síntese, confirmamos a tese de que uma adequada organização do ensino da função seno no Ensino Médio, fundamentada na Teoria Histórico-Cultural e no movimento lógico-histórico do conceito, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, em contraposição à visão utilitarista e pragmática das propostas de ensino atuais**.** Contudo, esclarecemos que as tarefas desenvolvidas nesse experimento não têm a intenção de ser uma receita que possa ser aplicada em outras escolas, pois elas foram desenvolvidas em contexto específico e particular.

Esse é um processo dialético, que envolve contradições, movimento, abstrações e generalizações substantivas, que servirão de base para novas sínteses.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, A. A.; EIDT, N. M. Psicologia histórico-cultural e a atividade dominante como mediação que forma e se transforma: contradições e crises na periodização do desenvolvimento psíquico. IN: **Obutchénie** – Dossiê – Periodização histórico-cultural do desenvolvimento humano. vol. 3. nº3. Uberlândia, MG: EDUFU, 2019. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/51694. Acesso em 21 fev. 2021.

AGÊNCIA BRASIL. **Reforma do Ensino Médio e ocupações em escolas marcam 2016**. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2016-12/reforma-do-ensino-medio-e-ocupacoes-em-escolas-marcam-2016-veja Acesso em 15 fev. 2021.

ALMEIDA, K. **Trigonometria Afonso Cáfaro.** Disponível em: http://matematicatrigonometria2b.blogspot.com/2011/08/funcoes-trigonometricas-seno-cosseno-e_23.html. Acesso em: 15 abr. 2020

ANJOS, R. E. Comunicação íntima pessoal e desenvolvimento psicológico na adolescência: pensando na organização do ensino nas séries do ensino fundamental II. IN: **Fundamentos Teóricos**. Disponível em: http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/72/Comunica%C3%A7%C3%A3o%20Intima%20Pessoal%20-%20Texto.pdf. Acesso em 19 jan. 2021.

ANTONIO, R. M. Teoria Histórico-Cultural e Pedagogia histórico-crítica: o desafio do método dialético na didática. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Programa de Desenvolvimento Educacional**- PDE. IES: Universidade Estadual de Maringá. 2008. Área: Pedagogia. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2290-6.pdf. Acesso em 01 set. 2018.

AQUINO, O. F**.** O experimento didático-formativo: contribuições L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V.V Davidov. In: MATURANO, A. L.; PUENTES, R.V. (org.). **Fundamentos Psicológicos e didáticos do Ensino Desenvolvimental**. v.5. Uberlândia, MG: EDUFU, 2017, p. 325-350.

AQUINO, O. F.; CUNHA, N.M.C. A tarefa de estudo: ciência e criatividade do professor. IN: **Educação e Filosofia**. v. 29. n. 57. Uberlândia, MG: EDUFU, 2015. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/EducacaoFilosofia/article/view/29916. Acesso em: 01 set. 2018.

BALD, V.A.; FASSINI, E. **Reforma do Ensino Médio**: resgate histórico e análise de posicionamentos a respeito da lei n°13.415/17 por meio de revisão de literatura. 2017. 19f. Monografia (Especialização em Docência na Educação Profissional) – Universidade do Vale do Taquari, Lajado, 2017. Disponível em: https://www.univates.br/bdu/handle/10737/1868. Acesso em: 20 nov. 2019.

BARALDO, B.P.F. **Sobre a necessidade e a viabilidade de um estudo dinâmico de funções**. Porto Alegre: Instituto de Matemática. 2009.

BARRETO, C. **Central do Coronavírus**. Portal PEBMED. 2020. Disponível em: https://pebmed.com.br/coronavirus-tudo-o-que-voce-precisa-saber-sobre-a-nova-pandemia/#:~:text=O%20primeiro%20caso%20da%20pandemia,e%20depois%20por%20outros%20pa%C3%ADses. Acesso em: 15 set. 2020.

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2000.

BIMBATI, A.P. Escolas rurais em quarentena: internet via rádio, acesso limitado aos materiais impressos e evasão escolar. Nova Escola. 2020. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/19440/escolas-rurais-em-quarentena-internet-via-radio-acesso-limitado-aos-materiais-impressos-e-evasao-escolar. Acesso em 18 jan. 2021.

BONGIOVANNI, V. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. IN: **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 2.5, p.94-106, UFSC: 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_bongiovanni.pdf. Acesso em 20 jul. 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRANCO, Emerson Pereira. Et al. Uma visão crítica sobre a implantação da Base Nacional Comum Curricular em consonância com a reforma do Ensino Médio. IN: **Debates em Educação**. v. 10. n. 21. 2018. Disponível em: http://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/download/5087/pdf_1. Acesso em: 17 mai 2019.

BRASIL. Constituição (1934). **Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil**. Rio de Janeiro, 1934. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao34.htm. Acesso em 17 abr. 2019.

BRASIL. **Medida Provisória n. 746** de 22 de setembro de 2016. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2016/Mpv/mpv746.htm. Acesso em 02 jun. 2019.

BRASIL. Presidência da República. **Lei 11.741, de 16 de julho de 1948**. Altera dispositivos da Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996 [...]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2007-2010/2008/Lei/L11741.htm . Acesso em 17 abr. 2019.

BRASIL. **Lei 4.024, de 20 de dezembro de 1961**. Disponível em: https://presrepublica.jusbrasil.com.br/legislacao/108164/lei-de-diretrizes-e-base-de-1961-lei-4024-61. Acesso em 17 abr. 2019.

BRASIL.Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília**, DF: Senado Federal. 1988.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes – LDB**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em:

http://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/529732/lei_de_diretrizes_e_bases_1ed.pdf. Acesso em: 10 mai.2018.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. **Guia PNLEM Matemática.** Disponível em :https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/legislacao/item/4289-guia-pnlem-2009. Acesso em: 20 jun. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. **Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 30 de mai. 2018.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002. 144 p

BRASIL. Ministério da Educação. CNE/CEB. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192. Acesso em 17 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Resolução CNE/CEB. Nº 2, de 30 de janeiro de 2012. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Brasília, 2012.

BRASIL. **Lei n° 10.172, de 9 de janeiro de 2001**. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providências. Disponível em http://portal.mec.gov.br/setec/arquivos/pdf_legislacao/tecnico/legisla_tecnico_lei10172.pdf. Acesso em 17 abr, 2019.

BRASIL**. Lei nº 13.415**, de 16 de fevereiro de 2017.Altera as Leis nos 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei no 5.452, de 1o de maio de 1943, e o Decreto-Lei no 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei no 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/L13415.htm. Acesso em: 12 mai.2018.

BRASIL. **Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014**. Aprova o Plano Nacional de Educação – PNE e dá outras providências. Diário da União, Brasília, DF, 26 jun 2014ª. Seção 1 (Ed. Extra), p.1. Disponível em: HTTP://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm.Acesso em: 08 de maio de 2016.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino de Matemática**: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Disponível em:

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 15 mai. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Novas Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Disponível em: http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf .cesso em: 19 abr. 2019.

BRASIL, BNCC. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 20 abr. 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Médio.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em 20 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Saúde. Conselho Nacional de Saúde. Resolução no 510, de 7 de abril de 2016. Trata sobre as diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisa em ciências humanas e sociais. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 24 maio 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. Portaria nº 468, de 3 de abril de 2017. **Dispõe sobre a realização do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM**. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/legislacao/2017/Portaria_mec_gm_n468_de_03042017_dispoe_sobre_a_realizacao_do_enem.pdf. Acesso em 20 abr. 2019.

BREJO, J. A. **Estado do conhecimento sobre a formação de profissionais da educação infantil no Brasil (1996 – 2005)**. Disponível em: file:///C:/Users/User/Downloads/BrejoJanaynaAlves_M.pdf. Acesso em: 17 abr. 2017.

CARAÇA, B.J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Tipografia Matemática: Lisboa, 1951.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C. E; WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1992.

CARVALHO, J. B. P. A história da trigonometria. In: CARMO, M. P.; MORGADO, A. C. **Trigonometria Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

CEDRO, W.L. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de matemática**: uma perspectiva histórico-cultural. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática**. v. 1. São Paulo: Edições SM, 2016.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática**. v. 2. São Paulo: Edições SM, 2016.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática**. v. 3. São Paulo: Edições SM, 2016.

CIAVATTA, Maria. **O trabalho docente e os caminhos do conhecimento**: a historicidade da Educação Profissional. Rio de Janeiro: Lamparina, 2015.

CORRÊA, B.M.; ROQUE, T. Síntese X Análise: A transformação da Matemática. 2017. **SILO. TIPS**. 2017. Disponível em: https://silo.tips/download/sintese-x-analise-a-trandformaao-da-matematica. Acesso em 15 set. 2020.

COSTA, N.M.L. **Funções seno e cosseno**: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. Mestrado em Ensino de Matemática. PUC/SP. São Paulo: 1997. 250 f. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/dissertacao_nielce_lobo_costa.pdf. Acesso de 07 jul. 2020.

COSTA, J.R.V. História das constelações ocidentais. **Astronomina no Zenite**: divulgando ciência há mais de 20 anos. 2020. Disponível em: https://www.zenite.nu/historia-das-constelacoes-ocidentais. Acesso em 17 set. 2020.

COSTA, Claudio Fernandes da. **O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM):** uma perspectiva de professores de matemática da rede pública de Ensino Médio regular da cidade do Rio de Janeiro. 01/12/2000 135 f. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, RIO DE JANEIRO

CUNHA NETO, J. H.; RESENDE, M. R. "Reforma" do ensino médio: discussões iniciais sobre a lei nº 13.415/2017. **Revista Profissão Docente.** v. 17, n. 37, p. 29-50, ago.- dez., 2017. Disponível em: file:///C:/Users/WinUser/Downloads/1118-4263-1-PB.pdf. Acesso em: jan.2021.

DAVÍDOV, V. V. **Tipos de generalizaciónenlaenseñanza**. 3 ed. Trad. M. Shuare. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVIDOV, V. V. **La enseñanza escolar y El desarrollopsiquico**. Moscou: Progresso, 1988.

DAVIDOV, V. V **. O que é a Atividade de estudo.** Revista «Escola inicial», № 7, 1999.

DAVIDOV. V.V. Os problemas psicológicos do processo de aprendizagem dos estudantes. In: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C.G.C.; AMORIM, P.A.P (organizadores). **Teoria da Atividade de Estudo: contribuições de D.B. Elkonin, V.V. Davidov e V.V. Repkin**. Curitiba, PR: CRV, 2019. Coedição: Uberlândia, MG: EDUFU, 2019. p. 171-173.

DAVIDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. (1981). La concepcion de laactividad de estudio de los escolares. In: Davidov, V.; Shuare, M. (Orgs.), **La psicología evolutiva y pedagogíaenla URSS**: antología. (p. 316- 337). Moscou: Progreso.

DUARTE, Newton. **Os conteúdos escolares e a ressurreição dos mortos**: contribuição à teoria histórico-crítica do currículo. Campinas, SP: Autores Associados, 2016.

ELKONIN, D. B. Característica general deldesarrollo psíquico de nos niños. In: SMIRNOV, A. A. et al. (Org.). **Psicología**. México: Grijalbo, 1960, p. 493-503.

ELKONIN, D. Sobre el problema de laperiodización Del desarrollo psíquico en lainfancia. In: DAVÍDOV, V. & SHUARE, M. **La psicologia evolutiva e pedagógica en URSS.** URSS: Editorial Progresso, 1987.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. da Unicamp, 1997.

FARIA, A. O. Triângulo retângulo. **Assuntos NERD**. 2009. Disponível em: https://assuntonerd.com.br/2009/08/24/triangulo-retangulo/. Acesso em 22 set. 2020.

FIGUEIRAS, A.A. A importância do uso de recursos didáticos no ensino e aprendizagem de matemática. **Congresso Nacional de Educação**. 2014. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/Modalidade_1datahora_08_08_2014_01_08_28_idinscrito_457_7a77b0de24493edbd0c115c6369382ed.pdf. Acesso em: 04 jul. 2017.

GAMBOA, S.S. **Pesquisa em educação**: métodos e epistemologias. Campinas, SP: 2006. pdf. Disponível em: WWW.geocities.ws/grupoepisteduc/arquivos/livrogamboa.doc. Acesso em 20 abr. 2019.

GERHARDT, T.E; SILVEIRA, D.T. (org.). **Métodos de Pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 05 jul. 2017.

GOMIDE, D. C. O Materialismo Histórico-Dialético como enfoque metodológico para a pesquisa sobre políticas educacionais. SAVIANI, D.[et al.] **Anais da XII Jornada do Histedbr e Seminário de Dezembro**: A crise estrutural do capitalismo e seus impactos na educação pública brasileira. Caxias, MA: Histedbr, MA/CESC.

GREVE, L. F. **SARESP E ENEM:** Efeitos no currículo do Ensino Médio integral em escolas públicas estaduais do município de Campinas na percepção de gestores e professores.14/02/2017. 295 f. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE CAMPINAS, Campinas: 2017.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática elementar**: complexos, polinômios e equações. São Paulo: Atual, 2001.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciência e aplicações**. v. 2. São Paulo: Saraiva, 2016.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, Karel. **Dialética do concreto**. Trad. NEVES, Célia; TORÍBIO, Alderico. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2010.

KOSIK, Karel. **Dialética do concreto.** Trad. Célia Neves e AldericoToríbio. 4. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976

LEMES, N. C. S.; CEDRO, W, L. Professores de Matemática em atividade de ensino de álgebra: Apropriações da Teoria Histórico-Cultural. Revista Portuguesa de Educação. v.28. n.2. Braga. 2015.
Disponível em: http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0871-91872015000200007. Acesso em 20 abr. 2019.
LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**. v. 1. São Paulo: Moderna, 2013.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**. v. 2. São Paulo: Moderna, 2013.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática**. v. 3. São Paulo: Moderna, 2013.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa, Livros Horizonte, 1978.

LEONTIEV, Alexis N., (1983). Actividad, conciencia, personalidad. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. (1992). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKI, L. S., LURIA, A. R., LEONTIEV, A. N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. São Paulo: Ícone, p. 59-83.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição para a Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. SP: Ícone/EDUSP, p. 59–83. 1988.

LIBÂNEO, J.C; FREITAS, R. A.M.M. Vygotsky, Leontiev, Davydov: três aportes teóricos para a Teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para a didática. Eixo temático 3. **Cultura e práticas escolares.** 2006.

LIBÂNEO, J.C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender– Davidov e a Teoria Histórico cultural da atividade. IN: **Revista Brasileira de Educação**. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a01. Acesso em 30 mai. 2018.

LIMA, Elon Lages *et al.*.**Exame de textos**: análise de livros de matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Roberto de Souza. **PCN-LE e a prática docente**: realidade ou utopia? 2005. 111f. Dissertação (Mestrado em Linguística Aplicada) – Universidade de Brasília, Brasília, 2005.

LURIA, A. R. **Pensamento e linguagem**: as últimas conferências de Luria. Porto Alegre: Artmed, 2001.

MARTINS, J.B. A perspectiva metodológica em Vygotsky: o materialismo dialético. IN: **Semina**: Cio Soc./Hum., Londrina, v. 15, n. 3, p. 287 -295, 1994. Disponível em: http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/seminasoc/article/viewFile/9453/8230. Acesso em: 31 de mai 2018.

MARQUES, G. C. Aplicações das funções trigonométricas. **Fundamentos da Matemática Elementar I**. Licenciatura em Ciências: USP/UNIVESP. s/ data. Disponível em:

https://midia.atp.usp.br/impressos/lic/modulo01/fund_matematica_PLC0001/FundMat_I_top09.pdf. Acesso em: 05 set. 2020.

MARX, K. **O Capital**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1983.

MARX, K. **O Capital**. Crítica da economia política. 20 ª ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2002.

MARX, K. **O 18 de Brumário de Luís Bonaparte**. Trad. Nélio Schneider. São Paulo: Boitempo, 2011.

MARX, Karl. **O capital**: crítica da economia política; livro primeiro - o processo de produção do capital. Tradução Rubens Enderle. São Paulo: Boitempo Editorial, 2013.

MARX, K; ENGELS, F. Carta a Weydemeyer. In: **Obras Escolhidas**. São Paulo: Alfa-Omega, vol. 3, s/d, p. 253-254.

MARX, K. & ENGELS, F. **Manifesto do Partido Comunista**. São Paulo: Editora Cortez, 1998.

MARX, K. & ENGELS, F. **A ideologia alemã**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides**: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOEHLECKE, S. O Ensino Médio e as novas diretrizes curriculares nacionais: entre recorrências e novas inquietações. **Revista Brasileira de Educação** v. 17 n. 49 jan.-abr. 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v17n49/a02v17n49.pdf. Acesso em 20 abr. 2019.

MONTEALEGRE, R. La actividad humana en La psicología histórico-cultural. In: **Avances em Psicología Latino americana**, vol. 23, 2005, pp. 33-42. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/799/79902304.pdf. Acesso em: 15 fev. 2021.

MOROSINI, N. C; FERNANDES, C.M.B. Estado do conhecimento: conceitos, finalidades e interlocuções. IN: VITÓRIA, M. I. C. (editor). **Educação por escrito**. Porto Alegre, v. 5, n. 2, p. 154-164, jul.-dez. 2014. Disponível em: http://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/porescrito/article/view/18875/12399. Acesso em: 17/04/17.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. **Conceitos Algébricos: do movimento lógico-histórico à organização do ensino**. 2014.

NASCIMENTO, M.N.M. Ensino Médio no Brasil: determinações históricas. IN: **Publ. UEPG Ci. Hum.,Ci. Soc. Apl., Ling., Letras e Artes**, Ponta Grossa, 15 (1) 77-87, jun. 2007 . Disponível em: http://www.revistas2.uepg.br/index.php/humanas/article/view/594/581. Acesso em 20 abr. 2019.

NASCIMENTO, ARACELLI ALVES DO. **As ações de gestores e professores a partir dos resultados do ENEM.** 11/12/2017 177 f. Mestrado em EDUCAÇÃO Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE CAMPINAS.

NETO, E.C.; LIMA, E.A.; ROCHA, A.C. Breve reflexão acerca da reforma do Ensino Médio e seus impactos na formação do estudante. IN: **Formação de professores: contextos, sentidos e práticas**. 2017. Disponível em: http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/23840_12892.pdf. Acesso em 17 abr. 2019.

NETO, JÚLIO H. C. Organização do ensino-aprendizagem de sistema de equações lineares no Ensino Médio: um experimento didático-formativo.

NOVAES, Maria Helena. **O valor do diagnóstico na educação**. Disponível em: http://www.ufrgs.br/museupsi/valordigeduc.htm Acesso em 13 mai 2019.

OBSERVATÓRIO DO PNE. **Plataforma online de monitoramento das metas e estratégias do PNE**. Disponível em: http://www.observatoriodopne.org.br/. Acesso em 17 fev.. 2021.

OSHIMA, Isabel Satico; PAVANELLO, Maria Regina. **O laboratório de ensino de matemática e a aprendizagem da geometria.** Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/232-4.pdf. Acesso em: 06/07/2017.

PEREIRA, A. P. Adolescência e juventude: contribuições e desafios de escritos soviéticos para a análise da realidade brasileira. IN: **Obutchénie**– Revista de Didática e Psicologia Pedagógica. vol. 3. nº3. Uberlândia, MG: EDUFU, 2019. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/Obutchenie/article/view/51706/27397. Acesso em 19 jan. 2021.

PEREIRA, M. C. **Perfil e representações dos alunos do Ensino Médio**: o caso da Escola Estadual Professor Basílio de Magalhães, no município de Nazareno-MG. 2016. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Disponível em: https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/mestradoeducacao/DissertacaoMarizeCostaPereira.pdf. Acesso em: 21 fev. 2021.

PINTO, A. H. A Base Nacional Curricular Comum e o ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar. **Universidade Estadual Paulista**. Disponível em: http://www.redalyc.org/jatsRepo/2912/291253784011/index.html. Acesso em 18 abr. 2019.

PUENTES, R.V. Sistema Elkonin-Davídov-Repkin: gênese e desenvolvimento da Teoria da Atividade de Estudo – TAE (1959-2018). In: PUENTES, R.V.; LONGAREZI, A.M. (organizadores). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin, Davidov, Repkin. Uberlândia, MG: Edufu, 2019, p. 123-160.

RAMOS, M. **Blog do ENEM**: Trigonometria – circunferência trigonométrica, seno e cosseno de um arco. 2016. Disponível em: https://blogdoenem.com.br/circunferencia-trigonometrica-seno-e-cosseno-de-um-arco-matematica-enem/. Acesso em: 15 set. 2020.

RESENDE, M. R. O pensamento teórico segundo Davidov: abstração e generalização substatntivas e educação matemática. In: PUENTES, R.V.; LONGAREZI, A.M.

(organizadores). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin, Davidov, Repkin. Uberlândia, MG: Edufu, 2019, p. 297-323.

SCRIBE, Borja C. **Papiro de Ahmes o Rhind**, MuseoBritánico. 2015.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. **Resolução SEE nº 666. Estabelece os Conteúdos Básicos Comuns** – CBCs a serem obrigatoriamente ensinados pelas unidades de ensino estaduais que oferecem as séries finais do ensino fundamental e o Ensino Médio. De 07 de abril de 2005. Disponível em: https://girandonovale.wordpress.com/2016/02/04/download-conteudos-basicos-comuns-cbc-ensino-medio/. Acesso em 17 abr. 2019.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. **Currículo Referência de Minas Gerais – Etapa Ensino Médio**. Disponível em: https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/. Acesso em 21 fev 2021.

SERCONEK, G. C. **Teoria do ensino desenvolvimental e aprendizagem**: um experimento com conceitos de áreas e perímetros. 193 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Maringá. Maringá: PR. 2018. Disponível em: http://www.ppe.uem.br/teses/2018/2018%20-%20Giselma%20Serconek.pdf . Acesso em 25 nov. 2020.

SFORNI, Marta Sueli de Faria. A Teoria Histórico-Cultural e a pesquisa no campo da didática. IN: **Didática e Prática de Ensino na relação com a Formação de Professores**. EdUECE- Livro 2. Disponível em: http://www.uece.br/endipe2014/ebooks/livro2/A%20TEORIA%20HIST%C3%93RICOCULTURAL%20E%20A%20PESQUISA%20NO%20CAMPO%20DA%20DID%C3%81TICA.pdf. Acesso em: 15/04/2018.

SILVA, M. N. P. Medida de um arco. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/medida-de-um-arco.htm. Acesso em 18 set. 2020.

SILVA, D.D. **Infoescola**: navegando e aprendendo. 2020. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/angulos/. Acesso em: 15 set. 2020.

SILVA, L.P.M. **Mundo Educação**. 2020. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/seno-cosseno-tangente.htm. Acesso de 10 set. 2020.

SILVA, L.P.M. **Mundo Educação**. 2020. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/demonstracao-lei-dos-senos.htm. Acesso de 10 set. 2020.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Tradução: Jonei Cerqueira Barbosa. IN: **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 13, n. 14, 2000. Disponível em: file:///D:/Users/Aline/Downloads/10635-Texto%20do%20artigo-56700-1-10-20150918.pdf. Acesso em 18 jan. 2021.

SOUSA, Maria do Carmo de; PANOSSIAN, Maria Lúcia; CEDRO, Wellington Lima. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

SOUSA, Maria do Carmo de. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. 285 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252372>. Acesso em: 3 ago. 2018.

SOUSA, Maria do Carmo de; MOURA, M.O. Estudo das historiografias de Paul Karlson, KonstantinRíbnikov, Howard Eves e Bento de Jesus Caraça: diferentes modos de ver e conceber o conceito de função. IN: **Ciência e Educação**. (Bauru). v. 25. n.4 . Bauru. 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132019000401081. Acesso em 19 jan. 2021.

SOUZA, G.V. Teoria Histórico Cultural e aprendizagem contextualizada. IN: **Estudando Vigotski**. 2011. Disponível em: https://www.ufrgs.br/psicoeduc/gilvieira/. Acesso em 17 abr. 2019.

TEIXEIRA, B. M.; RIBEIRO, E. A. Base Nacional Comum Curricular e a Lei nº 13.415/2017: uma pretensa descurricularização. **Revista Profissão Docente**. v.20, n.45, p.01-10, set./dez. 2020. Disponível em: file:///C:/Users/WinUser/Downloads/1333-4919-1-PB.pdf. Acesso em: jan.2021.

TURRA, F.F.R.; NOVAES, B.W.D. **Uso de régua, esquadros e compasso na Educação Infantil**. IN: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. 2013. Curitiba: PR. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2734_902_ID.pdf. Acesso em 20 jun. 2020.

VASCONCELOS, C. S. **Planejamento**: plano de ensino-aprendizagem e projeto educativo. São Paulo: Libertad, 1995.

VIGOTSKI, L. S. **Imaginación y creación em laedad infantil**. La habana: Editorial Puebo y Educación, 1985.

VIGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e Linguagem**. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991a.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas**. v.1. Madrid: Visor, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **Obras Escogidas II**: problemas de psicología general. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.

VYGOTSKI. L. S. **Pensamento e Linguagem**, Martins Fontes, São Paulo, 1996.

VYGOTSKY. L. S. **A Formação Social da Mente**. 6ª edição. Trad. José Cipolla Neto, Luis S. M. Barreto e Solange C. Afeche. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKI, L. S. **Psicologia pedagógica**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIGOTSKI, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 7. ed. São Paulo: Ícone, 2001. p. 103-119.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e linguagem**. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. 7.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R. **Estudos sobre a história do comportamento**: símios, homem primitivo e criança. Porta Alegre: Artes Médicas, 1996.

WAGNER, E. Teorema de Tales. IN: **Coleção PROFMAT**. s/ data.Disponível em: http://www.rc.unesp.br/tmelo/aula4.pdf. Acesso de 12 set. 2020.

ZAMBON, L.B.; TERRAZZAN, E.A. Identidade do Ensino Médio no contexto de implementação da reestruturação curricular da SEDUC/RS: mudança ou continuidade? IN: **HOLOS**. V. 3. 2017. Disponível em: file:///C:/Users/Sergio/Downloads/5755-16296-1-PB.pdf. Acesso em: 30 mai. 2018.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. IN: **Hipátia**, Campos do Jordão (SP). v. 1, n.1, p. 1-10, 2016. Disponível em: file:///D:/Users/Aline/Downloads/436-Texto%20do%20artigo-2027-1-10-20170102.pdf. Acesso em 20 ago. 2020.

APÊNDICE A - Planejamento do experimento

Atividade de estudo	**Necessidades Histórica e lógica**	**Conteúdos**	**Ações (DAVIDOV)**	**Tarefas**	**Objetivos das tarefas**	**Ações das tarefas (do professor)**	**Ações das tarefas (do aluno)**	**Objetivos específicos das situações**	**Aulas**
	Medir distâncias inacessíveis e analisar movimentos periódicos	A função seno com domínio nos ângulos planos e no conjunto dos números reais	Avaliação da aquisição da forma geral	Avaliação diagnóstica	Entender "como" o aluno e "o que" o aluno sabe a respeito da função seno. Buscar indícios de apropriação dos nexos conceituais da função seno.	Propor questões relacionadas à História da Trigonometria e dialogar com os alunos. Solicitar a eles que resolvam os dois problemas propostos e após um tempo, que eles apresentem o que eles pensaram individualmente.	Responder as questões propostas pelo professor. Resolver os dois problemas. Registrar o seu raciocínio no material. Discutir em grupo.	-	1
Desenvolver o pensamento teórico do aluno relacionado à função seno	Medir distâncias inacessíveis	O seno com domínio nos ângulos planos: Proporcionalidade Semelhança Teorema de Tales	Transformação do objeto Criação de modelos Transformação de modelos Criação de problemas concretos e práticos Controle de ações	**Tarefa 1:** O conceito do seno com domínio nos ângulos planos	Desenvolver o conceito do seno com domínio nos ângulos planos pelo seu movimento lógico-histórico.	Propor questões relacionadas ao assunto e dialogar com os alunos. Incentivá-los a pesquisar na internet e responder aos questionamentos.	Responder as questões propostas pelo professor. Pesquisar na internet. Registrar o seu raciocínio no material Discutir em grupo.	Situação 1: Assimilar o movimento histórico-lógico da trigonometria. Situação2: Apreender na situação proposta o que é geral, ou seja, a existência de uma razão constante entre os segmentos determinados pelas retas transversais num feixe de retas paralelas. Situação 3:Assimilar a essência do conceito de semelhança Situação 4: Apropriar –se da essência do seno (razão constante que existe entre lados em triângulos retângulos, independentemente do tamanho do triângulo, dependendo do ângulo).	3
	Analisar fenômenos periódicos	A circunferência de raio 1 e a reta numérica Arcos e ângulos O grau e o radiano A função seno com domínio no conjunto dos números reais: Função de Euler Sinais Simetrias A função seno e sua relação com os movimentos		**Tarefa 2:** Explorando o conceito da função seno no conjunto dos números reais	Desenvolver o conceito da função seno com domínio no conjunto dos números reais por meio da exploração da função de Euler e seu movimento lógico-histórico.			Situação 5: Assimilar a circunferência e seus elementos. Situação 6: Apreender a relação entre o raio e o comprimento do arco. Situação 7: Apropriar-se do conceito de radiano. Situação 8: Apreender a função de Euler e o conceito de arcos côngruos. Situação 9: Assimilar o conceito lógico da função seno no conjunto dos números reais, com foco em seus nexos internos. Situação 10: Assimilar as simetrias na circunferência. Situação11: Assimilar a periodicidade da função seno.	5

		periódicos Função seno e suas representações (algébrica, geométrica e numérica)						Situação 12: Modelar, a partir do conceito a função seno com foco em suas representações (geométrica, algébrica e numérica).	
			Avaliação da aquisição da forma geral	Avaliação Final	Analisar o experimento na busca da formação geral do conceito da função seno, ou seja, em função de generalizações substantivas e não empíricas.	Propor questões relacionadas ao conteúdo e à aplicação do experimento.	Responder as questões propostas pelo professor.	Ter informações relacionadas ao desenvolvimento do experimento para análise.	1

Método: Resolução de Problemas
Recursos: Lápis, borracha, linha, régua, transferidor, compasso, internet e Google meet.

APÊNDICE B – MATERIAL DE ESTUDO[82]

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PROGRAMA DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

ALINE TATIANE EVANGELISTA DE OLIVEIRA

ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Material de estudo entregue aos alunos participantes do experimento didático-formativo sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Marilene Ribeiro Resende.

Araxá - MG
2020

[82]Todo texto apresentado dentro dos retângulos em amarelo não compõem o material do aluno.

Prezado aluno participante da pesquisa,

É com enorme prazer e sentimento de gratidão que lhes apresento este Material de estudo contendo as tarefas e as situações a serem desenvolvidas durante o experimento didático-formativo.

Vale lembrar que todas as tarefas serão realizadas de forma online e discutidas nas reuniões pelo Google meet conforme o planejamento entregue.

Profa. Aline Evangelista

Diagnóstico

Objetivo específico: entender"o que" e o "como" o aluno sabe a respeito da função seno.Buscar indícios de apropriação dos nexos conceituais da função seno.

1º momento: Conversa com os alunos seguindo o seguinte roteiro:

1) Vocês já estudaram Trigonometria?
2) Escreva uma palavra que lembra os assuntos estudados sobre Trigonometria.
3) E sobre a Trigonometria no círculo, de que vocês lembram?
4) A expressão função seno é entendido como sendo o que?

2º momento: Aplicação do problema

Problema: O exército brasileiro recebeu a missão de ajudar a controlar as queimadas do Pantanal. Em um determinado trecho até chegar aos focos de incêndio, precisaram construir uma tirolesa para atravessar com os equipamentos, para isso usariam duas árvores que estavam em diagonal em relação ao rio Paraguai, conforme figura 1, uma em cada lado da margem para amarrar o cabo de aço. No entanto, precisavam descobrir quantos metros de cabo de aço usariam, para isso fizeram algumas marcações. A árvore do lado onde eles estavam chamaram de ponto A, a árvore do outro lado do rio chamaram de B. Como tinham em mãos um teodolito portátil (aparelho usado para medir ângulos), marcaram um ponto C na margem onde estavam, formando um ângulo de 90º ACB. Tinham a informação que a largura do rio naquele ponto era de aproximadamente 250m e novamente usando o teodolito conseguiram medir o ângulo BAC de 30º .

Figura 1

A partir dessas informações, qual o comprimento do cabo de aço (AB) que será necessário para construir a tirolesa?

Você tem alguma ideia para a resolução dessa situação-problema? Se sim, qual é?

3º momento:

A maré é o movimento ou oscilação vertical do mar provocada pelas diferentes atrações gravitacionais da Lua e do Sol sobre a Terra, causando movimentos harmônicos.

A tabela abaixo apresenta a previsão feita pelo Centro de Hidrografia da Marinha (Tábuas de Maré) relacionando a altura da maré (em metros) no Porto de Maceió (Alagoas) entre os dias 01 e 04 de janeiro de 2019.

Coleta	Data	Hora	Altura da Maré (m)
1	01/01/19	00:09	1,8
2	01/01/19	06:36	0,5
3	01/01/19	12:38	1,7
4	01/01/19	18:56	0,5
5	02/01/19	01:06	1,8
6	02/01/19	07:24	0,5
7	02/01/19	13:24	1,8
8	02/01/19	19:45	0,4
9	03/01/19	01:56	1,9
10	03/01/19	08:08	0,4
11	03/01/19	14:08	1,9
12	03/01/19	20:28	0,4
13	04/01/19	02:38	1,9
14	04/01/19	08:49	0,4
15	04/01/19	14:49	2,0
16	04/01/19	21:06	0,3

A partir dessas informações, construa o gráfico relacionando a coleta, em x, e a altura das marés (m), em y e encontre a altura da maré na 20ª coleta.

Tarefa 1: O seno com domínio nos ângulos planos

Necessidade: Medir distâncias inacessíveis

Situação 1:

Objetivo específico: Assimilar aspectos do movimento histórico-lógico da trigonometria

Vamos falar um pouco de história?

- O que é a Trigonometria?
- Como surgiu?
- Quais os principais matemáticos ligados ao desenvolvimento da trigonometria?

Para iniciar:

e) Quase tudo que usamos ou fazemos no nosso dia a dia necessita de conceitos de matemática, seja um simples olhar as horas até o momento de ir ao supermercado fazer as compras. No entanto, às vezes, não damos a ela (Matemática) a importância que realmente tem, quer ver? Discuta com seus colegas se eles sabem o que é Astronomia, Agrimensura e Navegações. Como você acha que a Matemática contribuiu no desenvolvimento desses estudos?

f) Uma área da matemática é muito usada nesses estudos, vamos pesquisar qual é, usando o Google.

g) Pesquise, usando o Google, alguns exemplos de situações em os homens aplicavam conhecimentos trigonométricos. E os registros, como faziam?Vamos buscar um dos principais nomes da Trigonometria? E qual foi a primeira obra escrita?

h) Pensem nos estudos de Matemática, até aqui, e dê exemplos de nomes de grandes estudiososa ela ligados, dos quais vocês se lembram.

Situação 2:

Objetivo específico: Apreender na situação proposta o que é geral, ou seja, a existência de uma razão constante entre os segmentos determinados pelas retas transversais num feixe de retas paralelas.

Agora observe as figuras:

Figura 2

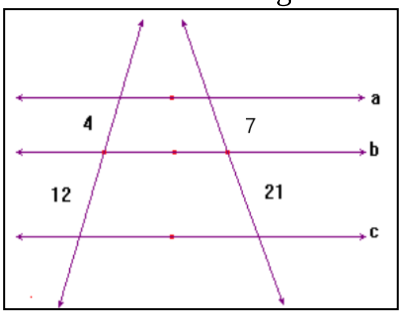


Figura 3

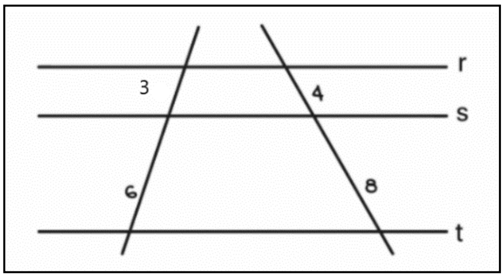


Figura 4

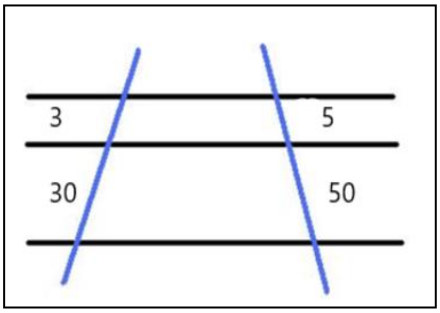
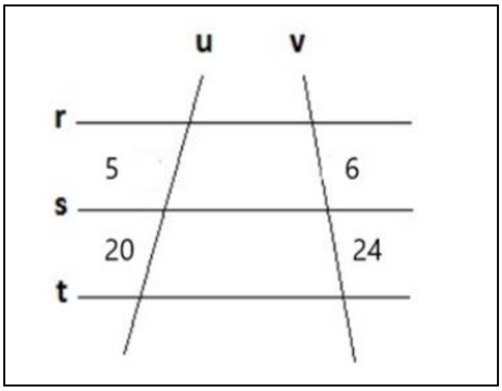


Figura 5



As retas na horizontal são r,s e t nessa ordem

j) Qual a posição relativa entre elas as retas a,b e c da figura 2?
k) E as outras retas da figura 2? Tem essa mesma característica das anteriores?
l) Como são chamadas essas partes da reta formadas pelos cruzamentos, essas que estão com os números 4,7,12 e 21?
m) Existe uma relação entre esses números ao se comparar os valores do lado direito (7 e 21) com os valores do lado esquerdo (4 e 12)?
n) Vamos observar a figura 2, qual a posição relativa entre as retas r,s e t? E as outras retas, tem essa mesma característica? Compare os valores em cada lado, (3 e 6) e (4 e 8), qual a relação entre eles?
o) Agora analise as figuras 4 e 5, a posição das retas seguem o mesmo padrão das figuras anteriores? E os valores?
p) Que conclusão chegaram analisando as figuras?
q) Agora vamos escrever isso de uma maneira que sirva para qualquer caso, usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática.
r) Vamos pesquisar, usando o Google, o nome que recebe esse Teorema?

Situação 3:

Objetivo específico: Assimilar a essência conceito de semelhança.

Observe as figuras:

Figura 6

Figura 7

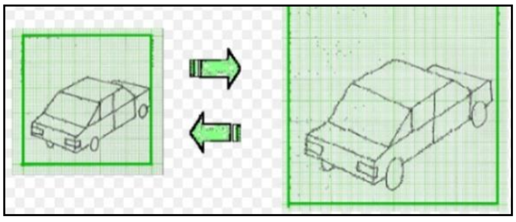


Figura 8

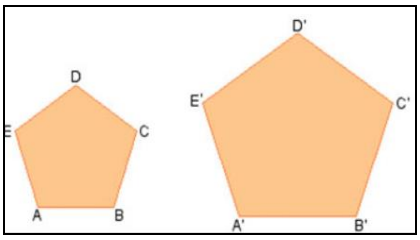


Figura 9

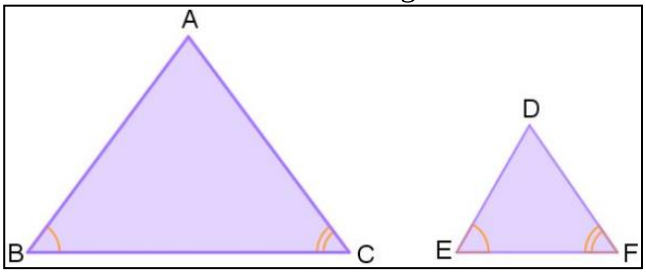


Figura 10

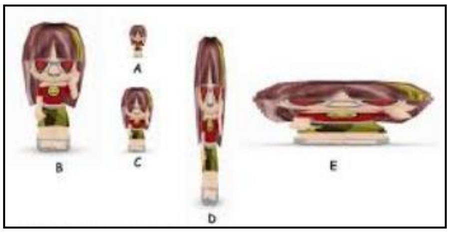


Figura 11

Figura 12

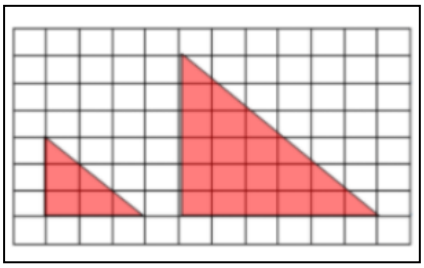


Figura 13

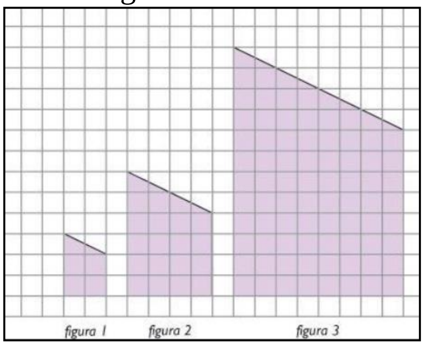


Figura 14

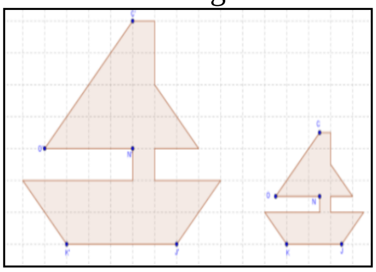


Figura 15

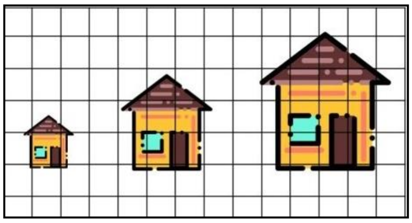


Figura 16

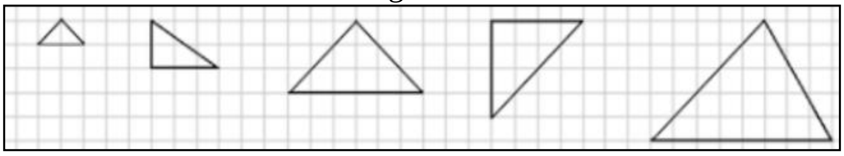


Figura 17

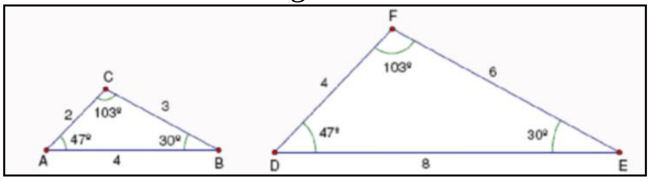
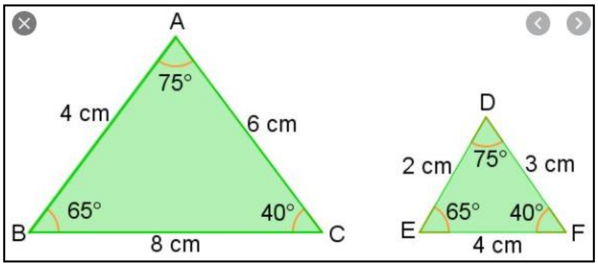


Figura 18



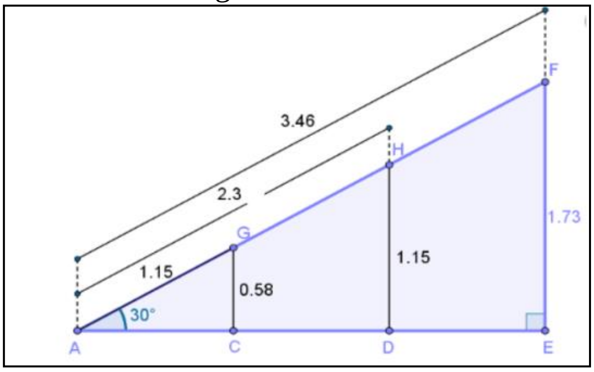
a) Vamos iniciar analisando a figura 6, são fotos iguais?
b) Na figura 7, os carrinhos são iguais?
c) Nesse mesmo sentido, compare os pentágonos da figura 8 e os triângulos da figura 9. O que você concluiu?
d) Agora, observe a bonequinha da figura 10, a imagem A é a original, mas a medida que ela foi ampliada (imagens B, C, D e E), o que aconteceu?
e) E na figura 11? Observe a figura original e a compare com as demais, o que você percebeu?
f) Nas figuras 12,13,14 e 15, teremos ampliações e reduções, usando o papel quadriculado. Observe-as atentamente.
g) Agora volte na figura 12, vamos comparar as medidas (em quadradinhos) dos lados correspondentes dos triângulos, ou seja, os lados que estão na mesma posição? Meça agora, usando o transferidor, os ângulos dessa figura. Quais resultados encontraram?
h) Agora vamos fazer a mesma coisa na figura 13, compare as medidas dos lados correspondentes de cada imagem, o que você conclui? Meça agora, usando o transferidor, os ângulos dessa figura. Quais resultados encontraram?
i) Na figura 16, temos cinco triângulos, enumere-os da esquerda para a direita (1,2,3,4 e 5), analise os triângulos 1 e 5, são iguais? Meça (em quadradinhos) a base de cada um. Agora meça a altura, existe uma relação entre elas? Usando o transferidor, meça os ângulos correspondentes, o que você concluiu?
j) Na mesma figura 16, compare as medidas dos lados correspondentes do segundo e do quarto triângulo, meça os ângulos usando o transferidor, quais os resultados encontrados?
k) Agora, vamos escrever o que vocês concluíram comparando as figuras de uma maneira que sirva para qualquer caso,usando a linguagem natural (português) e a linguagem matemática.
l) Analisando as figuras 17 e 18, vamos escrever as condições para que dois triângulos sejam semelhantes.

Situação 4:

Objetivo específico: Apropriar-se da essência do seno (razão constante que existe entre lados em triângulos retângulos, independentemente do tamanho do triângulo, dependendo do ângulo).

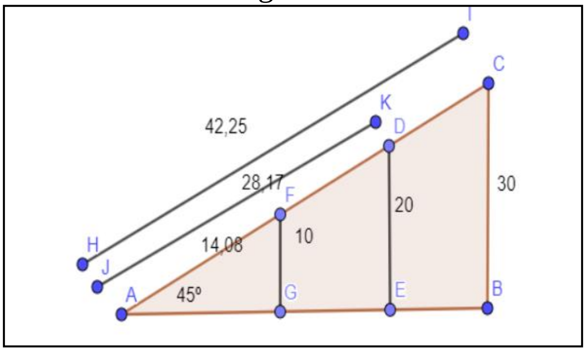
Observe as figuras.

Figura 19



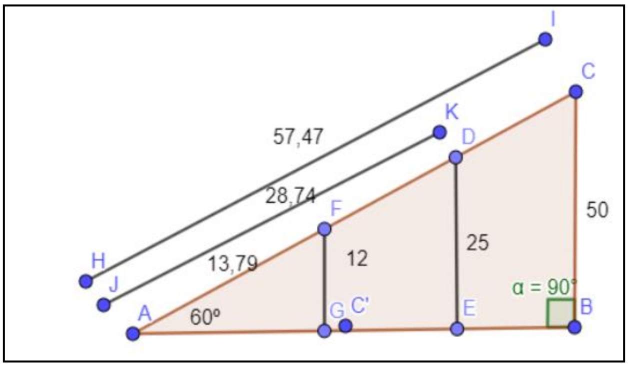
Obs.: Os ângulos C e De E são retos (medem 90º)

Figura 20



Obs.: Os ângulos B, E e G são retos

Figura 21



Obs.: Os ângulos E, Be G são retos

a) O que há em comum nessas 3 figuras?

b) Na figura 19, analise as posições relativas das retas que passam por CG, DH e EF. Agora analise as posições relativas das retas que passam por AF e AE.
c) Agora nas figuras 20 e 21, analise as posições relativas das retas que passam por BC, DE e FG. Analise também as posições relativas das retas que passam por AB e AC.
d) Essas análises lembram a vocês algo que já vimos?
e) Na figura 19, quantos triângulos você observa? Vamos desenhá-los, separadamente, registrando todas as suas medidas de ângulos e lados? Analise as medidas dos seus ângulos correspondentes (aqueles que ocupam a mesma posição), o que você conclui? Agora compare as medidas dos lados correspondentes, o que você conclui?
f) Você observou que todos os triângulos são retângulos, ou seja, possuem o ângulo que mede 90º. Agora pesquise no Google e veja os nomes atribuídos aos lados de um triângulo retângulo.
g) No triângulo ACG da figura 19, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (lado de maior medida do triângulo). Faça o mesmo processo com o triângulo ADH e com o triângulo AEF. Que resultado obteve?
h) Usando o mesmo processo, vamos analisar a figura 20, quantos triângulos você observa? Vamos desenhá-los, separadamente, registrando todas as suas medidas de ângulos e lados? Analise as medidas dos seus ângulos correspondentes (aqueles que ocupam a mesma posição), o que você conclui? Agora compare as medidas dos lados correspondentes, o que você conclui?
i) No triângulo AFG da figura 20, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (lado de maior medida do triângulo). Faça o mesmo processo com o triângulo ADE e com o triângulo ABC. Que resultado obteve?
j) Usando o mesmo processo, vamos analisar a figura 21, quantos triângulos você observa? Vamos desenhá-los, separadamente, registrando todas as suas medidas de ângulos e lados? Analise as medidas dos seus ângulos correspondentes (aqueles que ocupam a mesma posição), o que você conclui? Agora compare as medidas dos lados correspondentes, o que você conclui?
k) No triângulo AFG da figura 21, calcule o quociente (razão ou divisão) do seu cateto oposto (lado que fica em frente ao ângulo) pela hipotenusa (maior medida do triângulo). Faça o mesmo processo com o triângulo ADE e com o triângulo ABC. Que resultado obteve?
l) Será que isso vale sempre? O que é geral nesta situação?
m) Vamos pesquisar, usando o Google, qual o nome que esse quociente (divisão do cateto oposto pela hipotenusa) recebe na matemática?
n) Agora vamos escrever o que vocês concluíram analisando o cálculo do quociente nessas 3 figuras de maneira que sirva para qualquer caso,usandoa linguagem natural (português) ea linguagem matemática?

- **Conclusões da pesquisadora:**
- Temos um ângulo e para cada ângulo tem um valor fixo, independente do tamanho do triângulo.
- Existem dois valores que variam, um éa variável independente, que é o ângulo, e o outro é a razão constante, que é a variável dependente.
- Função seno: Elementos essenciais – Domínio (ângulos planos), o Contradomínio (números reais) e a forma de associá-los (relação entre o cateto oposto e a hipotenusa).

Necessidade: Analisar fenômenos periódicos

Tarefa 2: Explorando o conceito da função seno no conjunto dos números reais

Situação 5:

Objetivo específico: Assimilar o conceito da circunferência e seus elementos.

Responda as seguintes indagações:

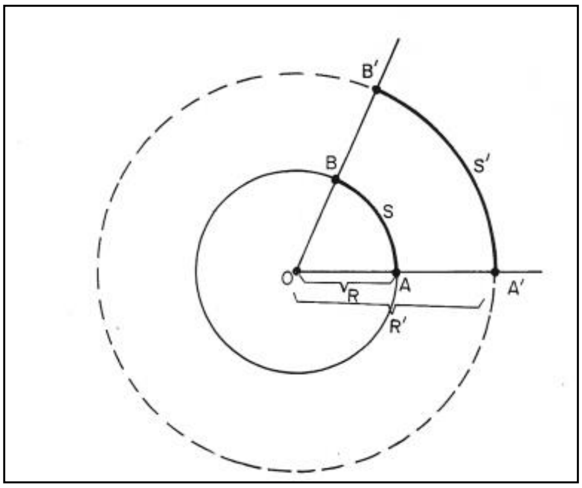
a) Você sabe o que é uma circunferência?
b) O que é o centro de uma circunferência?
c) Qual o nome dado à distância do centro da circunferência a sua extremidade?
d) Com o compasso, desenhe uma circunferência qualquer de centro O e marque sobre ela dois pontos A e B.
e) Ligue os pontos A e O e depois O e B.
f) Com a régua, meça esses comprimentos (AO e OB), que conclusão chegou?
g) Qual o nome da abertura formada por AOB?
h) Qual o nome dado a AB? Essa distância pode ser medida? Que nome ele recebe?
i) Quantos graus mede uma circunferência completa?
j) E a metade dela?
k) Se a dividirmos em quatro partes, qual será a medida, em graus, de cada parte?
l) Pesquise, no Google, o nome que cada uma dessas 4 partes recebe.

Situação 6:

Objetivo específico: Apreender a relação entre o raio e o comprimento do arco.

Analise a figura 22.

Figura 22



Fonte: Carmo; Morgado; Wagner (1992)

a) O que você enxerga nessa figura?
b) Quais os elementos da circunferência menor?
c) Quais os elementos da circunferência maior?

d) Qual o ângulo que correspondeao arco s?
e) Qual o ângulo que corresponde ao arco s'?
f) A que conclusão você chegouem relação aos ângulos?
g) Nas condições dadas, será isso sempre verdadeiro?
h) Com a régua encontre a medida do raio R e do raio R', registre aqui (em cm).
i) Agora pegue uma linha e meça o comprimento s, leve essa linha na régua e faça a sua medição (em cm). Faça o mesmo processo para medir s'.
j) Nesse caso específico, a medida do comprimento do arco depende da medida do ângulo?
k) De que depende a medida do comprimento do arco?
l) Relacione as medidas entre s e R.
m) Relacione as medidas entre s' e R'.
n) Agora vamos escrever o que vocês concluíram relacionando as medidas dos arcos e dos raios da figura 22, de maneira que sirva para qualquer caso usando a linguagem natural (português) ealinguagem matemática?

Situação 7:

Objetivo específico: Apropriar-se do conceito de radiano.

Para iniciar, vamos assistir ao vídeo cujo link é:

https://www.youtube.com/watch?v=kTMsXJUqzZo

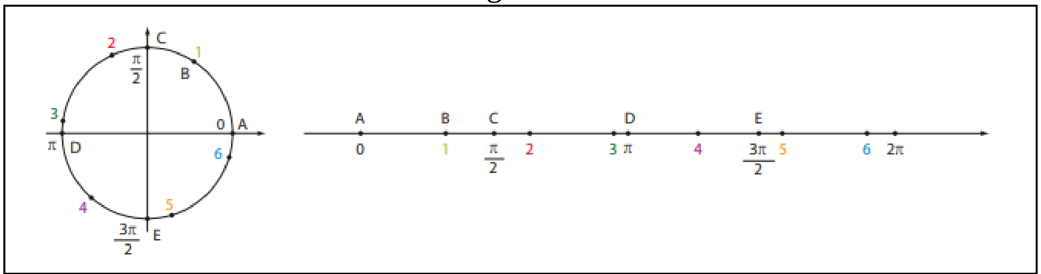
a) Após assistir ao vídeo que explica o significado de radiano, o que você compreendeu pelo significado de radiano?
b) Você consegue encontrar a medida de 30º em radianos?
c) E a medida de 60º em radianos?
d) Então 7π/6 rad equivale a quantos graus?
e) Questão desafiadora: quantos graus tem 1 radiano? Vamos discutir?

Situação 8:

Objetivo específico: Apreender a função de Euler eo conceito de arcos côngruos.

Observe a figura 23:

Figura 23



Obs.:
π / 2 vale aproximadamente 1,57
π vale aproximadamente 3,14
3π/2 vale aproximadamente 4,71
2π vale aproximadamente 6,28

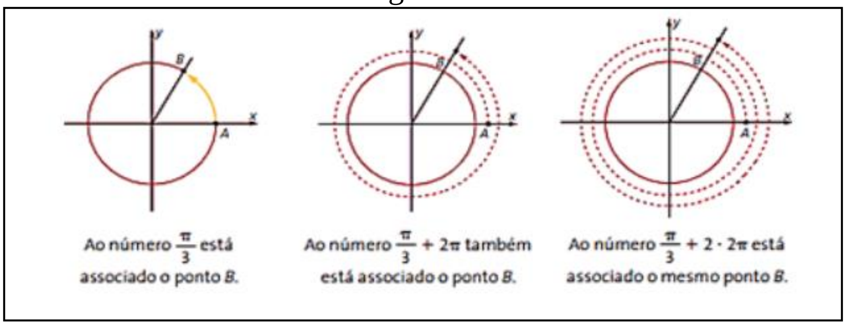
a) As medidas da circunferência acima estão em radianos, vamos imaginar que tivéssemos esticado, como se fosse uma linha, conforme a figura ao lado da circunferência, o seu comprimento, o que lembra vocês essa linha?
b) Essa "linha" pode ser maior que 2π?
c) Vamos imaginar que ela fosse 3π, ela coincidiria com qual valor na reta?
d) E se ela fosse 4π? Seria qual valor?
e) Agora, vamos fazer o movimento contrário, o número 2,5 cairia em qual quadrante? E o número 7?
f) Porque o 2 ficou no primeiro segundo quadrante? Porque o 5 ficou no quarto quadrante?
g) Será que todo número da reta terá uma correspondência na circunferência?
h) Agora vamos escrever a relaçãoque podemos estabelecer entre os pontos da reta numérica (números reais) e a circunferência de maneira que sirva para qualquer circunferência de raio 1unidade, usando linguagem matemática?

A função de Euler faz corresponder a cada número real *x*, um ponto de uma circunferência de raio unitário e com centro na origem do sistema cartesiano, E(t). Lima *et al.* (1996, p. 214) afirmam que esse processo pode ser pensado como "um processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel), de modo que o ponto $0 \in$ IR caia sobre o ponto $(1,0) \in C$". Cada vez que o ponto percorre um intervalo na reta de comprimento *x*, percorrerá sobre a circunferência C, um arco de comprimento *x*, obtendo-se a imagem, E(t), que é um ponto P dado pelas coordenadas (x, y).

i) Ao dar a volta da linha de comprimento 3π sobre a circunferência, a sua extremidade coincidirá com qual ponto?
j) Analise a figura 24.Nela,estão destacadasas extremidades dos arcos:

$\pi/3$,
$\pi/3 + 2\pi = 7\pi/3$,
$\pi/3 + 4\pi = 13\pi/3$.
O que você verificou?Isso é verdadeiro apenas para $\pi/3$? Em que condições isso ocorre?

Figura 24



k) Vamos pesquisar no Google o nome que esses arcos recebem? Para isso pesquise: “nome dado a dois arcos de mesma extremidade na circunferência”.
l) Vamos escrever na linguagem matemática, uma expressão geral que traduza esses arcos?

Situação 9:

Objetivo específico: Assimilar o conceito lógico da função senono conjunto dos números reais, com foco nos seus nexos conceituais.

Construa uma circunferência de raio 1 dm (10 cm) e centro O, trace o plano cartesiano XY com origem sobre o centro da circunferência.

a) A circunferência foi dividida em quantas partes? Qual o nomedadoacada parte?
b) O início da circunferência será no ponto com coordenadas (1,0), marque como ponto A.
c) Agora marque um ponto P no primeiro quadrante, que será um número real qualquer da reta numérica.
d) Construa as projeções desse ponto P sobre os eixos x e y, chame-as de x e y respectivamente.
e) Destaque o ângulo x que corresponde a P.
f) Você consegue enxergar um triângulo retângulo na figura construída?
g) Podemos falar de senx, nesta figura?Qual seria o senx?
h) Que conclusão você chegou?
i) Observe adefinição:

   Já que existe uma função que associa cada número real a um ponto da circunferência, esse ponto vai ter uma abscissa(eixo x) e uma ordena (eixo y), então a ordenada será o sem x e a abscissa o cos x.

Nas palavras de Lima et al (2001. P.60) temos,

Afim de dar significado à expressão sen x quando x é um número real qualquer, é necessário associar a cada x ϵ R um ângulo, de modo que sen x seja o seno daquele ângulo. A maneira mais conveniente de fazer isso é considerar a função de Euler E:R → C, cujo contradomínio é a circunferência C de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano. Para cada x ϵ R, o ângulo que corresponde ao número x é o ângulo do semi-eixo positivo das abscissas com a semi-reta que vai da origem ao ponto E(x) ϵ C. **Então sen x é a ordenada e cos x é a abscissa do ponto E(x). Noutras palavras, tem-se E(x) = (cosx, senx).**

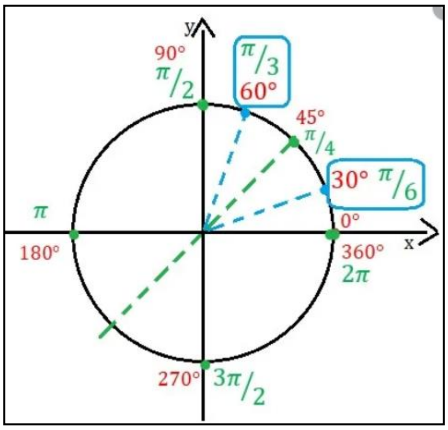
j) O que vocês conseguiram compreender desse conceito?
k) Agora fazendo o movimento do geral para o particular, obtenha por essa definição sen π/3, sen π/4, sen π/2, sen 5, sen 30º e sen 2 usando o desenho que você fez e a régua para medir.

Situação 10:

Objetivo específico: Assimilar as simetrias na circunferência.

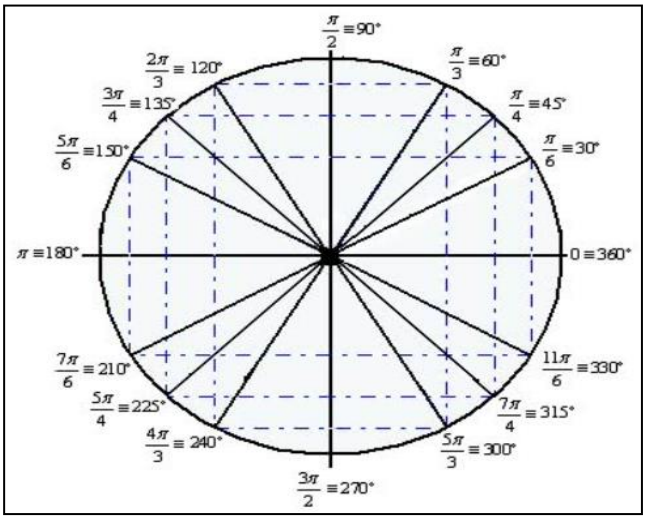
A figura 25 apresenta os arcos mais usados do primeiro quadrante da circunferência trigonométrica.

Figura 25



a) No exercício 5, compreendemos que o seno é determinado no eixo y. Analise a figura 25 e anote os valores do seno no eixo y de cada um deles.
b) Analise a figura 26, encontre os valores do sen 2π/3, 3π/4 e 5π/6 localizados no segundo quadrante.

Figura 26



c) Ainda analisando a figura 26, encontre o sen 7π/6, sen 5π/4 e sen 4π/3 no terceiro quadrante.
d) E analisando os do quarto quadrante, encontre o sen 5π/3, 7π/4 e 11π/6.
e) O que você concluiu analisando esses valores?
f) Questão provocativa: Qual é maior, sen 60º ou sen150º?
g) Observe a figura 26, quais são os arcos que tem seno igual a ½?Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo y?
h) Na mesma figura, quais são os arcos que tem seno igual a √2/2?Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo y?
i) Continuando a análise da figura 26, quais são os arcos que tem seno √3/2? Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo y?

j) Será que isso vale apenas para esses 3 exemplos de arcos ou para todos do 2º quadrante? Vamos escrever uma expressão algébrica para expressar isso?
k) Agora vamos analisar os arcos do terceiro quadrante, encontre o sen 210º (7π/6). Compare-o com o sen 30º (π/6). Como esses arcos se posicionam em relação à origem dos eixos?
l) E o sen 225º (5π/4). Compare-o com o sen 45º (π/4). Como esses arcos se posicionam em relação à origem dos eixos?
m) E o sen 240º (4π/3). Compare-o com o sen 60º (π/3). Como esses arcos se posicionam em relação à origem dos eixos?
n) Será que isso vale apenas para esses 3 exemplos de arcos ou para todos do 3º quadrante? Vamos escrever uma expressão algébrica para expressar isso?
o) Para finalizar, vamos analisar agora os arcos do 4º quadrante, encontre o sen 330º (11π/6). Compare-o com o sen 30º. Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo x?
p) E o sen 315º (7π/4). Compare-o com o sen 45º (π/4). Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo x?
q) E o sen 300º (5π/3). Compare-o com o sen 60º (π/3). Como esses arcos se posicionam em relação ao eixo x?
r) Será que isso vale apenas para esses 3 exemplos de arcos ou para todos do 4º quadrante? Vamos escrever uma expressão algébrica para expressar isso?

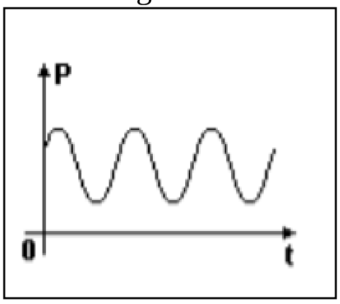
Situação 11:

Objetivo específico: Assimilar a periodicidade da função seno.

Observe os gráficos, vamos ver alguns exemplos de funções, associadas a diversos fenômenos periódicos e os seus respectivos gráficos,

Exemplo 1) (UFF - adaptada) No processo de respiração do ser humano, o fluxo de ar através da traquéia, durante a inspiração ou expiração, pode ser modelado por uma função F, definida, em cada instante t. A pressão interpleural (pressão existente na caixa torácica), também durante o processo de respiração, pode ser modelada pela função P, definida, em cada instante t. O gráfico de P, em função de t, é:

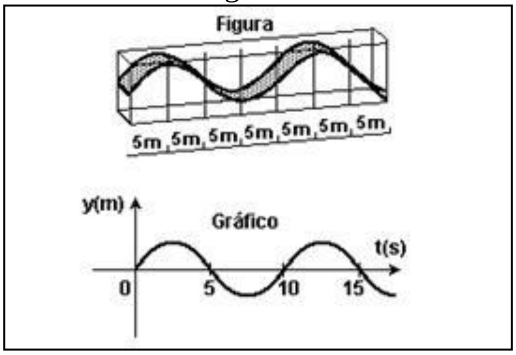
Figura 27



Exemplo 2) (Fuvest – adaptada) Um grande aquário, com paredes laterais de vidro, permite visualizar, na superfície da água, uma onda que se propaga. A figura representa o perfil de tal

onda no instante To. Durante sua passagem, uma bóia, em dada posição, oscila para cima e para baixo e seu deslocamento vertical (y), em função do tempo, está representado no gráfico.

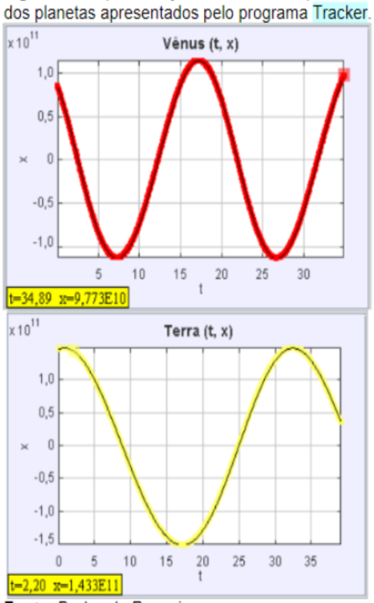
Figura 28



Exemplo 3) Os gráficos abaixo fazem parte do estudo de Silva, Cruz (2016) e representam os movimentos periódicos dos planetas Vênus e Terra elaborado pelo programa Tracker:

Figura 29

Figura 4 – Representação do movimento periódico dos planetas apresentados pelo programa Tracker.



Fonte: Dados da Pesquisa

Após observarem atentamente os gráficos, discuta com seus colegas:

a) Os assuntos tratados nos três exemplos são o mesmo? De que trata cada um deles?
b) O que há em comum nos três exemplos?
c) Os gráficos são parecidos?
d) O que há em comum nos três gráficos?
e) O que difere esses gráficos dos outros tipos de gráficos que você já conhece?

Situação 12:

Objetivo específico: Modelar, a partir do conceito a função seno com foco em suas representações (geométrica, algébrica e numérica).

A maré é o movimento ou oscilação vertical do mar provocada pelas diferentes atrações gravitacionais da Lua e do Sol sobre a Terra, causando movimentos harmônicos.

A tabela abaixo apresenta a previsão feita pelo Centro de Hidrografia da Marinha (Tábuas de Maré) relacionando a altura da maré (em metros) no Porto de Maceió (Alagoas) entre os dias 01 e 04 de janeiro de 2019.

Coleta	**Data**	**Hora**	**Altura da Maré (m)**
1	01/01/19	00:09	1,8
2	01/01/19	06:36	0,5
3	01/01/19	12:38	1,7
4	01/01/19	18:56	0,5
5	02/01/19	01:06	1,8
6	02/01/19	07:24	0,5
7	02/01/19	13:24	1,8
8	02/01/19	19:45	0,4
9	03/01/19	01:56	1,9
10	03/01/19	08:08	0,4
11	03/01/19	14:08	1,9
12	03/01/19	20:28	0,4
13	04/01/19	02:38	1,9
14	04/01/19	08:49	0,4
15	04/01/19	14:49	2,0
16	04/01/19	21:06	0,3

a) Observe as alturas das marés fornecidas pela tabela, o que está acontecendo com elas?
b) A partir dessas informações acompanhe a construção do gráfico pela pesquisadora que usará o Excel, relacionando a coleta, em x, e a altura das marés (m), em y.
c) O que você consegue concluir observando o gráfico construído?
d) Às 06:36h do dia 01/01/19 (coleta 2), a altura da maré era de 0,5m, depois de quantas horas ela voltou a ter a mesma altura?
e) Observe ao longo do gráfico e da tabela se essa repetição continua.
f) Pesquise, usando o Google, o nome que recebe esse intervalo de repetição das marés?
f) Vamos construir o gráfico da função f(x) = sen x e comparar com os gráficos acima?

Diferencial desse trabalho é focar a generalização substantiva que visa chegar ao que é geral na sua essência, mesmo que eu trabalhe com várias situações particulares, eu quero que eles cheguem ao geral.

APÊNDICE C

UNIUBE
Educação e Responsabilidade Social

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO,** desenvolvida na Universidade de Uberaba, no Programa de Pós-Graduação em Educação, sob responsabilidade da doutoranda Aline Tatiane Evangelista de Oliveira e da Professora doutora Marilene Ribeiro Resende.

Esta pesquisa se justifica devido à importância dos conteúdos escolares, sobretudo os conceitos algébricos, à formação humana e matemática do indivíduo, em um momento em que se discutem consideráveis reformulações para o Ensino Médio brasileiro.

Ela tem como objetivo experimentar, na prática escolar do Ensino Médio, uma proposta de organização do processo de ensino-aprendizagem da função seno, com foco na aprendizagem conceitual e no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Se você aceitar participar, irá se envolver em uma intervenção didática, incluindo diferentes atividades – relacionadas ao conteúdo da função seno, desenvolvidas de forma online via whatsapp e videoconferências gravadas pelo Google meet, devido à pandemia de COVID-19, desenvolvidas das 17h30 às 18h30 do dia 03/11/2020 ao dia 17/11/2020, poderá haver mudança de horário e/ou data se tiver algum imprevisto.

Você poderá ter benefícios ao participar da pesquisa, pois as atividades de ensino a serem realizadas têm o objetivo de propiciar a aprendizagem do conteúdo envolvido – função seno, com uma abordagem diferenciada. Os resultados estarão à disposição dos interessados, quando essa for finalizada.

A sua participação depende, também, da autorização de seu responsável legal. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar. A sua recusa não lhe trará qualquer penalidade. Os pesquisadores se comprometem a assegurar o anonimato do sujeito pesquisado, usando um código para identificá-los. Comprometem-se, ainda, a não utilizar imagens e nomes dos participantes do estudo, em prejuízo das pessoas. Esclarecemos que os dados serão utilizados com fins científicos, como na participação em congressos e publicação de artigos científicos.

Este Termo encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra, fornecida a você.

Eu, ____, aluno (a) do __º ano ____ do Ensino Médio da Escola __________________________________, tomei conhecimento das atividades de pesquisa que serão realizadas na escola e, por minha livre e espontânea vontade, decidi que:

☐ **Aceito participar das atividades de pesquisa.**

☐ **Não aceito participar das atividades de pesquisa**.

Araxá, de de 2020.

______________________________________ ____________________________

Assinatura do aluno (menor) Assinatura do Professor Pesquisador

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADORA RESPONSÁVEL: ALINE TATIANE EVANGELISTA DE OLIVEIRA

Telefone e e-mail: (34) 9 93049282– alineevangelista@uniaraxa.edu.br

PESQUISADORA RESPONSÁVEL: Profª. Drª. MARILENE RIBEIRO RESENDE

Telefone e e-mail: (34) 3319 8831 – marilene.resende@uniube.br

O responsável por você deve assinar um termo para consentir a sua participação.

APÊNDICE D: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nome do sujeito da pesquisa:____

Nome do responsável legal pelo sujeito da pesquisa:____________________________

____

Identificação (RG) do responsável legal:_____________________________________

Título do Projeto: "**ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO".**

Instituição proponente da pesquisa: Universidade de Uberaba.

Pesquisador responsável: Doutoranda Aline Tatiane Evangelista de Oliveira

Identificação: alineevangelista@uniaraxa.edu.br – (34) 9 93049282.

CEP-UNIUBE: Av. Nenê Sabino, 1801 – Bairro: Universitário – CEP: 38055-500-Uberaba/MG, tel: 34-3319-8959 / e-mail: cep@uniube.br

O(a) aluno (a)____, seu/sua ________________________________ (grau de parentesco), está sendo convidado(a) para participar da pesquisa "**ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO SENO NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO"** desenvolvida na Universidade de Uberaba, no Programa de Pós-Graduação em Educação, sob responsabilidade da doutoranda Aline Tatiane Evangelista de Oliveira e da Professora doutora Marilene Ribeiro Resende.

O processo de ensino e aprendizagem da matemática tem trazido dificuldades aos professores e aos alunos, conforme têm demonstrado as avaliações externas, como a do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). Considerando, ainda, o contexto atual, em que se estabelece uma "reforma" para o Ensino Médio e se discute uma base curricular comum para o referido nível em que educadores matemáticos defendem a importância dos conteúdos escolares para formação humana do indivíduo; em que se constata a necessidade de aprimoramento das formas de ensinar os conteúdos matemáticos, é que se justifica a presente pesquisa.

Esta pesquisa tem como objetivo experimentar, na prática escolar do Ensino Médio, uma proposta de organização do processo de ensino-aprendizagem da função seno, com foco na aprendizagem conceitual e no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Se você consentir com a participação do(a) aluno(a) sob sua responsabilidade, ele(a)será convidado(a)a participar de uma pesquisa de intervenção didática, incluindo diferentes tarefas relacionadas ao conteúdo de função trigonométrica, desenvolvidas de forma online via whatsapp e videoconferências gravadas pelo Google meet, devido à pandemia de COVID-19, desenvolvidas das 17h30 às 18h30 do dia 03/11/2020 ao dia 17/11/2020, poderá haver mudança de horário e/ou data se tiver algum imprevisto.

A participação do aluno(a) sob sua responsabilidade nesta pesquisa poderá trazer benefícios a ele(a), pois as atividades de ensino a serem realizadas têm o objetivo de propiciar a aprendizagem do conteúdo envolvido – a função trigonométrica seno. Os resultados estarão à disposição dos interessados, do responsável legal pelo sujeito da pesquisa, quando essa for finalizada.

Para a participação do(a) aluno(a), precisamos de sua autorização. Você será esclarecido(a) sobre qualquer aspecto que desejar, a qualquer tempo, e estará livre para dar o consentimento de participação. No entanto, a sua recusa não trará qualquer penalidade ao(a) aluno(a). Os pesquisadores se comprometem a assegurar o anonimato do sujeito pesquisado. Comprometem-se, ainda, a não utilizar imagens e nomes dos participantes do estudo, em prejuízo das pessoas. Esclarecemos que os dados serão utilizados com fins científicos, como na elaboração de uma tese de doutorado, na participação em congressos e na publicação de artigos científicos.

O aluno(a) poderá deixar de participar desta pesquisa a qualquer momento, sem lhe acarretar prejuízos. Salientamos, também, que a sua livre participação, fundamentada perante este Termo de Consentimento, não prevê quaisquer benefícios materiais ou financeiros ao sujeito.

Você receberá uma via deste Termo, assinada pela equipe, onde constam a identificação e os telefones dos pesquisadores, caso você queira entrar em contato com eles.

Araxá, ___, de ___________________, 2020

____

Nome do responsável e assinatura

____

Aline Tatiane Evangelista de Oliveira – (34) 9 93049282

Pesquisadora Responsável

____

Marilene Ribeiro Resende – (34) 3319 8811

Pesquisadora Responsável

ANEXO I: PLANEJAMENTO ANUAL DO PROFESSOR DA ESCOLA

PLANEJAMENTO ANUAL 2020

Escola Estadual Loren Rios Feres

Rua Onésimo Simões Borges, 55 – Alvorada - Araxá – MG

PROFESSOR(a): **XXXXXXXXXXXX** **DISCIPLINA:** MATEMÁTICA **TURMA:** 2° A, B e 2° NI

TEMA	TÓPICOS	HABILIDADES E COMPETÊNCIAS	PERIODO
SEMELHANÇA E TRIGONOMETRIA	A circunferência trigonométrica (arcos e ângulos) Razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante, relações fundamentais e derivadas).	• Resolver problemas que envolvam: medidas de arcos, transformações de unidades, números reais associados a um ponto da circunferência, seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante, relações fundamentais e derivadas. • Construir e analisar gráficos das funções trigonométricas.	**1° Bimestre (Fevereiro, Março e Abril)**
NÚMEROS E OPERAÇÕES	Matrizes (introdução, representação, operações, matriz inversa)	• Reconhecer matrizes como sendo uma tabela de números dispostos em linhas e colunas (representar matrizes, fazer operações)	

TEMA	TÓPICOS	HABILIDADES E COMPETÊNCIAS	PERIODO
NÚMEROS E OPERAÇÕES	Determinantes (introdução, cálculo e propriedades) Sistemas Lineares (introdução, sistema 2X2, MxN, resolução de sistemas)	• Reconhecer o determinante como sendo um número que representa a matriz quadrada (calcular determinantes de várias ordens). • Reconhecer sistemas de equações e resolvê-los. • Relacionar o gráfico	**2° Bimestre (Maio, Junho e Julho)**

FUNÇÕES ELEMENTARES	Função do 1° grau, 2° grau, exponencial e logarítmica, PA, PG e Sistemas lineares	com a função. • Reconhecer cada função. • Resolver problemas que envolvam as funções. • Resolver problemas que envolvam PA, PG e sistemas lineares.	
TEMA	**TÓPICOS**	**HABILIDADES E COMPETÊNCIAS**	**PERÍODO**
CONTAGEM	Análise Combinatória Princípio multiplicativo da contagem Permutações simples Arranjos simples Combinações simples Permutações com elementos repetidos	• Reconhecer os agrupamentos quanto a ordem de seus elementos; • Calcular o fatorial de números naturais; • Resolver problemas que envolvam arranjos, combinações e permutações simples e com elementos repetidos;	**3° Bimestre (Agosto e Setembro)**
TEMA	**TÓPICOS**	**HABILIDADES E COMPETÊNCIAS**	**PERIODO**
PROBABILIDADE	Probabilidade Experimentos aleatórios Espaços amostrais e eventos Cálculo de probabilidades	• Identificar espaço amostral em situações problemas; • Resolver problemas que envolvam cálculo de probabilidade; • Representar o ponto, a reta e o plano; • Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano;	**4° Bimestre (Outubro, Novembro e Dezembro)**

GEOMETRIA ANALÍTICA **GEOMETRIA MÉTRICA E DE POSIÇÃO**	Noções de Geometria Analítica Estudo da reta e do plano Distância entre dois pontos Circunferência Noção de Prismas, Cilindros, Pirâmides, Cones e Esferas	• Escrever a equação da reta; as condições de paralelismo; • Escrever a equação geral da circunferência. • Identificar vértices, arestas e faces; • Identificar os elementos de uma esfera	

ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS	**AVALIAÇÃO**	**PROJETOS (Citar)**	**BIBLIOGRAFIA**
➢ Desenvolver valores humanos, sociais de autoestima, perseverança e determinação na busca de soluções dos desafios. ➢ Enriquecimento dos conhecimentos matemáticos através da solução de exercícios e problemas. ➢ Enriquecimento dos conhecimentos matemáticos na busca de informações (jornais, revistas e sites). ➢ Fazer com que o aluno se expresse matematicamente, utilizando o uso da linguagem oral própria e estabelecendo relações entre ele e diferentes representações matemáticas. ➢	***Instrumentos de Avaliação*** ➢ Observações feitas no decorrer dos dias letivos; ➢ Registros durante todo o processo de aprendizagem; ➢ Trabalho do aluno durante o bimestre, incluindo as anotações feitas; ➢ Avaliação discursiva; ➢ Avaliação mensal; ➢ Avaliações contínuas ➢ Avaliações contínuas (livres) como: trabalhos, pesquisas, jogos, laboratório de matemática. ***Intervenção Pedagógica:*** ➢ Fixação e revisão com exercícios extras. ➢ Atendimento individual e em grupo aos alunos com dificuldades de aprendizagem.	**Proposta de Redesenho Curricular (Projetos de pintura, leitura, visitas, construções geométricas, jogos pedagógicos, dentre outros).** **Laboratório de Ensino de Matemática.**	**BÁSICA:** CHAVANTES, E; PRESTES, D. **Matemática**: quadrante. São Paulo: SM, 2017. **COMPLEMENTAR:** LEONARDO, Fábio Martins de (editor). **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Moderna, 2013.

Assinatura das Professoras:________________________________ Data:__/___/_____Visto do Supervisor__________________________ Data:___/__/_____

ANEXO II: AVALIAÇÃO APLICADA PELA PROFESSORA

1_ Sabendo que no estudo da trigonometria no ciclo os ângulos podem ser medidos em graus e radianos. Assim, a medida em graus do ângulo 7π/12 é:

a) 100 º
b) 105 º
c) 115 º
d) 120 º
e) 135 º

2_ Usando o mesmo conceito do exercício anterior, podemos afirmar que a medida em radiano do ângulo 315º é:

a) 7π/4
b) π/12
c) 5π/6
d) π/2
e) 7π/3

3_ Determine cos x sabendo que $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ e $senx = -\frac{3}{5}$.

4_ Encontre o sen 150º.

5_ Construa o gráfico da função f(x) = senx.

Bom trabalho!!!