UNIVERSIDADE DE UBERABA

JÚLIO HENRIQUE DA CUNHA NETO

ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO

UBERABA - MG

2020

JÚLIO HENRIQUE DA CUNHA NETO

ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES NO ENSINO MÉDIO: UM EXPERIMENTO DIDÁTICO-FORMATIVO

Tese apresentada ao Programa Pós-Graduação do Doutorado em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito para obtenção do título de Doutor em Educação, sob a orientação da Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende.

UBERABA - MG

2020

BANCA EXAMINADORA

Dra. Marilene Ribeiro Resende - UNIUBE

Dr. Orlando Fernandez Aquino - UNIUBE

Dra. Adriana Rodrigues – UNIUBE

Dra. Váldina Gonçalves Costa - UFTM

Dr. Wellington Lima Cedro - UFG

Catalogação na fonte

Dedico aos meus pais, Júlio e Beatriz, à minha irmã Nathália e à minha namorada Amanda que me apoiaram e incentivaram na construção deste trabalho.

Dedico à professora Marilene, exímia docente, que me proporcionou orientações fundamentais para a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo amor incondicional e ao incentivo constante aos estudos, minha mãe Maria Beatriz, inspiração de comprometimento profissional e familiar, que contribuiu para as revisões deste trabalho, e ao Júlio César – exemplo de pai e amigo, que esteve ao meu lado, apoiando-me e contribuindo para o meu desenvolvimento.

À minha irmã Nathalia, que, também, se mostra muito estudiosa, como uma fonte de referência.

À minha namorada Amanda, com a qual compartilho diariamente minhas experiências, construo aprendizados e me desenvolvo como humano. Agradeço sua presença, amor, carinho, compreensão e incansável apoio durante a elaboração deste trabalho.

Ás minhas avós, Maria e Maura, sinônimos de carinho e amor, que sempre se fizeram presentes na minha vida.

À minha família e aos amigos, que sempre unidos se fizeram presentes e torceram por mim, a favor de novas conquistas.

À professora Marilene Ribeiro Resende, sempre disponível para as orientações deste trabalho, exemplo de profissional, que me proporcionou relevantes momentos de reflexão, contribuindo efetivamente para o meu desenvolvimento profissional.

Aos professores da Banca Examinadora, Dr. Orlando Fernandez Aquino, Dra. Adriana Rodrigues, Dra. Váldina Gonçalves Costa e Dr. Wellington Lima Cedro, as contribuições imprescindíveis à conclusão desta pesquisa.

Aos grupos de pesquisa, dos quais participei: GEPEDI e GEPEDUC, que me propiciaram o amadurecimento como pesquisador.

Às pessoas dos locais onde trabalhei, indispensáveis para os meus momentos de reflexão. Assim, agradeço a todos do Colégio Cenecista Dr. José Ferreira, do Colégio Tiradentes e a Campanha Nacional das Escolas da Comunidade - CNEC - Brasília, onde cursei grande parte da educação básica, bem como onde comecei a trabalhar e desenvolver-me profissionalmente.

A todos da Universidade de Uberaba, em que cursei o doutorado, que me fez refletir sobre a pesquisa, possibilitando o meu desenvolvimento profissional.

Aos professores e aos funcionários do programa de pós-graduação da UNIUBE, que sempre nos atenderam prontamente.

Aos colegas de doutorado, os diversos momentos compartilhados, tensão, ansiedade e alegria.

Aos professores e aos alunos que se disponibilizarem a participar desta pesquisa favorecendo, assim, a construção deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que acreditaram em mim e me incentivaram para a concretização desta pesquisa.

RESUMO

Este trabalho insere-se na linha de pesquisa Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba e no projeto de pesquisa intitulado “Conteúdos algébricos no ensino médio: discussões e propostas na perspectiva da teoria histórico cultural”, aprovado pela FAPEMIG, em 2017. Ao considerar o cenário da educação brasileira, no início do Século XXI, marcada pelo valor utilitário dos conteúdos escolares; a necessidade de repensar os processos de ensino-aprendizagem com base nas alterações dos dispositivos legais para o Ensino Médio – Lei nº13.415/2017 e BNCC; a necessidade de ressignificação dos conhecimentos algébricos diante das práticas escolares de seu ensino que enfatiza o pensamento empírico, apresenta-se a questão: Como organizar o ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio, visando criar condições para o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno? Tem-se o objetivo de desenvolver na prática escolar do Ensino Médio uma organização do processo de ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, potencializando o desenvolvimento do pensamento teórico, necessário à formação humana. Para tanto, o estudo fundamenta-se na concepção dialética-materialista e nos pressupostos da Teoria da Atividade de Estudo de Davídov. Utiliza-se o estudo bibliográfico e a análise de documentos que orientam o ensino de matemática, com ênfase na abordagem dada à álgebra. Desenvolve-se o experimento didático-formativo sobre Sistemas de Equações Lineares, como método para a criação experimental da organização do ensino, com alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola localizada na cidade de Uberaba/MG. O diagnóstico preliminar apontou que os resultados dos alunos no ENEM demonstraram um baixo desempenho - não superaram uma média de 40% nas habilidades que envolvem a álgebra; que a organização do ensino, presente em salas de aulas, não privilegiou as discussões de juízos, conceitos e a formação do pensamento teórico, portanto o desenvolvimento do aluno. Em relação ao experimento didático-formativo, forma de testar a organização do ensino proposta, foram elaboradas três Tarefas de Estudo, que se constituem a unidade básica (célula) da Atividade de Estudo. A seguir, conclui-se que: 1) há indícios de que as tarefas conduziram os alunos ao desenvolvimento do pensamento teórico, ou seja, à apropriação de nexos internos inerentes ao objeto matemático – Sistemas de Equações Lineares, presentes numa rede conceitual que envolve: a relação de comparação e a de igualdade, as equações, variáveis, coeficientes, simultaneidade, diferentes formas de representação semiótica, enfim, as ideias de fluência e de interdependência, próprias da álgebra; 2) a organização do ensino na perspectiva da Teoria da Atividade de Estudo transforma o aluno e, também, o professor, promovendo o desenvolvimento de ambos; 3) essa organização do ensino exigiu conhecimentos consistentes dos pressupostos teóricos da Teoria da Atividade de Estudo e dos aspectos lógicos e históricos de Sistemas de Equações Lineares; 4) o professor tem papel fundamental no processo, como organizador do ensino e como responsável pela mediação, atuando na Zona de Desenvolvimento Próximo – ZDP. Desse modo, esta pesquisa comprovou a tese de que a organização do ensino com base na Teoria da Atividade de Estudo pode ressignificar o ensino da álgebra/ Sistemas de Equações Lineares, no ensino médio, potencializando o desenvolvimento do pensamento teórico. É um caminho possível que precisa de mais investigações e estudos.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares. Educação Algébrica. Atividade de Estudo. Experimento Didático-Formativo. Ensino-aprendizagem

ABSTRACT

This work is part of the line of research Professional Development, Teaching Work and Teaching-Learning Process of the Graduate Program in Education at the University of Uberaba and in the research project entitled “Algebraic contents in high school: discussions and proposals in perspective cultural historical theory ”, approved by FAPEMIG, in 2017. When considering the Brazilian education scenario, at the beginning of the 21st century, marked by the utilitarian value of school contents; the need to rethink the teaching-learning processes based on changes in the legal provisions for secondary education - Law No. 13,415 / 2017 and BNCC; the need to re-signify algebraic knowledge in view of the school practices of its teaching that emphasizes empirical thinking, the question arises: How to organize the teaching-learning of Linear Equation Systems in High School, aiming to create conditions for the development of theoretical thinking of the student? The objective is to develop in high school practice an organization of the teaching-learning process of Systems of Linear Equations, enhancing the development of theoretical thinking, necessary for human formation. To this end, the study is based on the dialectical-materialist conception and on the assumptions of Davídov's Study Activity Theory. Bibliographic study and analysis of documents that guide the teaching of mathematics are used, with emphasis on the approach given to algebra. The didactic-formative experiment on Systems of Linear Equations is developed, as a method for the experimental creation of the teaching organization, with 2nd year high school students from a school located in the city of Uberaba / MG. The preliminary diagnosis showed that the students' results in ENEM showed a low performance - they did not exceed an average of 40% in the skills that involve algebra; that the teaching organization, present in classrooms, did not favor discussions of judgments, concepts and the formation of theoretical thinking, therefore the development of the student. In relation to the didactic-formative experiment, a way of testing the proposed teaching organization, three Study Tasks were elaborated, which constitute the basic unit (cell) of the Study Activity. Next, it is concluded that: 1) there are indications that the tasks led the students to the development of theoretical thinking, that is, to the appropriation of internal nexuses inherent to the mathematical object - Systems of Linear Equations, present in a conceptual network that involves: the comparison and equality relationship, the equations, variables, coefficients, simultaneity, different forms of semiotic representation, in short, the ideas of fluency and interdependence, typical of algebra; 2) the organization of teaching in the perspective of the Study Activity Theory transforms the student and, also, the teacher, promoting the development of both; 3) this teaching organization required consistent knowledge of the theoretical assumptions of the Theory of Study Activity and the logical and historical aspects of Systems of Linear Equations; 4) the teacher has a fundamental role in the process, as the organizer of teaching and as responsible for mediation, working in the Zone of Near Development - ZDP. Thus, this research proved the thesis that the organization of teaching based on the Theory of Study Activity can resignify the teaching of algebra / Systems of Linear Equations, in high school, enhancing the development of theoretical thinking. It is a possible path that needs further investigation and studies.

Keywords: Systems of Linear Equations. Algebraic Education. Study Activity. Didactic-Formative Experiment. Teaching-learning

RESUMEN

Este trabajo forma parte de la línea de investigación Desarrollo profesional, trabajo docente y proceso de enseñanza-aprendizaje del Programa de Posgrado en Educación de la Universidad de Uberaba y en el proyecto de investigación titulado "Contenidos algebraicos en la escuela secundaria: debates y propuestas en perspectiva teoría histórica cultural", aprobada por FAPEMIG, en 2017. Al considerar el escenario educativo brasileño, a principios del siglo XXI, marcado por el valor utilitario de los contenidos escolares; la necesidad de repensar los procesos de enseñanza aprendizaje basados en cambios en las disposiciones legales para la educación secundaria - Ley N ° 13.415 / 2017 y BNCC; La necesidad de volver a significar el conocimiento algebraico en vista de las prácticas escolares de su enseñanza que enfatiza el pensamiento empírico, surge la pregunta: cómo organizar la enseñanza-aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales en la escuela secundaria, con el objetivo de crear condiciones para el desarrollo del pensamiento teórico del estudiante? El objetivo es desarrollar en la práctica de la escuela secundaria una organización del proceso de enseñanza-aprendizaje de los Sistemas de ecuaciones lineales, mejorando el desarrollo del pensamiento teórico, necesario para la formación humana. Con este fin, el estudio se basa en la concepción dialéctico-materialista y en los supuestos de la Teoría de la actividad de estudio de Davídov. Se utiliza el estudio bibliográfico y el análisis de documentos que guían la enseñanza de las matemáticas, con énfasis en el enfoque dado al álgebra. El experimento didáctico-formativo sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales se desarrolla, como un método para la creación experimental de la organización docente, con estudiantes de segundo año de secundaria de una escuela ubicada en la ciudad de Uberaba / MG. El diagnóstico preliminar mostró que los resultados de los estudiantes en ENEM mostraron un bajo rendimiento: no superaron un promedio del 40% en las habilidades que involucran álgebra; que la organización docente, presente en las aulas, no favorecía las discusiones de juicios, conceptos y la formación del pensamiento teórico, por lo tanto, el desarrollo del alumno. En relación con el experimento didáctico-formativo, una forma de probar la organización docente propuesta, se elaboraron tres tareas de estudio, que constituyen la unidad básica (celda) de la actividad de estudio. A continuación, se concluye que: 1) hay indicios de que las tareas llevaron a los estudiantes al desarrollo del pensamiento teórico, es decir, a la apropiación de los nexos internos inherentes al objeto matemático - Sistemas de ecuaciones lineales, presentes en una red conceptual que involucra: la relación de comparación e igualdad, las ecuaciones, variables, coeficientes, simultaneidad, diferentes formas de representación semiótica, en resumen, las ideas de fluidez e interdependencia, típicas del álgebra; 2) la organización de la enseñanza en la perspectiva de la Teoría de la Actividad del Estudio transforma al alumno y, también, al profesor, promoviendo el desarrollo de ambos; 3) esta organización de enseñanza requería un conocimiento consistente de los supuestos teóricos de la Teoría de la Actividad de Estudio y los aspectos lógicos e históricos de los Sistemas de Ecuaciones Lineales; 4) el maestro tiene un papel fundamental en el proceso, como organizador de la enseñanza y como responsable de la mediación, trabajando en la Zona de Desarrollo Cercano - ZDP. Por lo tanto, esta investigación demostró la tesis de que la organización de la enseñanza basada en la Teoría de la actividad de estudio puede resignificar la enseñanza del álgebra / Sistemas de ecuaciones lineales, en la escuela secundaria, mejorando el desarrollo del pensamiento teórico. Es un camino posible que necesita más investigación y estudios

Palabras-clave: Sistemas de ecuaciones lineales. Educación algebraica. Actividad de estudio Experimento didáctico-formativo. Enseñanza-aprendizaje

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Elementos e/ou palavras que caracterizam a álgebra em sua história 82

Figura 2 -– Elementos e/ou palavras que caracterizam sistema de equações lineares .. 87

Figura 3 - Elementos e/ou palavras que caracterizam o movimento lógico-histórico das equações.. 91

Figura 4 - Ilustração sobre a comparação entre segmentos 92

Figura 5 - Item do ENEM/2013, avaliando a habilidade 19 e sua resolução 109

Figura 6 - Item do ENEM/ 2013 avaliando a habilidade 20 e sua resolução 113

Figura 7 - Item do ENEM e resolução, habilidade 21. 116

Figura 8 - Item do ENEM e resolução, habilidade 23. 119

Figura 9 - Problema envolvendo Sistemas de Equações Lineares resolvido pelo professor. 124

Figura 10 - Problema envolvendo Sistemas de Equações Lineares resolvido pelo professor. 125

Figura 11 - Enunciado do exercício 1 do diagnóstico. 127

Figura 12 - Registros dos alunos do primeiro exercício/problema do diagnóstico. 128

Figura 13 - Enunciado do exercício 2 o diagnóstico 129

Figura 14 - Resoluções dos alunos do item a, exercício 2 do diagnóstico. 130

Figura 15 - Enunciado questão 3 do Diagnóstico.. 132

Figura 16 - Resoluções do exercício 3 do diagnóstico. 133

Figura 17 - Enunciado questão 4 do Diagnóstico.. 134

Figura 18 - Exercício 5 do diagnóstico e resolução de um aluno............................... 135

Figura 19 - Exercício 6 do diagnóstico... 136

Figura 20 - Exercício 7 do diagnóstico... 137

Figura 21 - Registro dos alunos sobre conceitos que envolvem Sistemas de Equações Lineares. 139

Figura 22 - Registro dos alunos sobre conceitos que envolvem Sistemas de Equações Lineares. 139

Figura 23 - Conceitos e juízos que evidenciam o movimento lógico dos Sistemas de Equações Lineares. 142

Figura 24 - Situação inicial proposta na tarefa 1, sobre estabelecer comparações...... 146

Figura 25 - Situação proposta na tarefa 1, sobre estabelecer comparações................ 147

Figura 26 - Situação proposta na tarefa 2, sobre equações... 148

Figura 27 - Situação proposta na tarefa 3, sobre Sistemas de Equações Lineares. 149

Figura 28 - 1.1, “Vamos falar de moda"... 157

Figura 29 - Registro do Gabriel, “Vamos falar de moda". 159

Figura 30 - 1.2 - “Qual a sua preferência”... 160

Figura 31 - Registros do aluno César 161

Figura 32 - 1.3, a ideia da comparação na história da matemática............................ 163

Figura 33 - Registros da aluna Amanda 164

Figura 34 - Tarefa 1.4, "E os grupos de WhatsApp?... 165

Figura 35 - Registros do aluno Miguel... 167

Figura 36 - 5, "ideia de comparação com blocos lógicos.. 168

Figura 37 - Grupo 1 – alunos Gabriel e Nathália organizaram os blocos com base nas suas formas. 168

Figura 38 - Grupo 2 – alunos César e Miguel, organizaram os blocos com base nas suas cores.. 168

Figura 39 - 1.5, "ideia de comparação com blocos lógicos”. 170

Figura 40 - 1.7, "Estabelecer comparações".. 171

Figura 41 - Registros das alunos Nathália e Beatriz (Tarefa realizada em dupla) 172

Figura 42 - Tarefa 1 realizada pela aluna Beatriz.. 179

Figura 43 - Tarefa pela aluna Amanda. 182

Figura 44 - 2.4 realizada pela aluna Beatriz. 183

Figura 45 - Enunciado da tarefa 2.5 184

Figura 46 - Tarefa 2.5 realizada pela Nathália. 185

Figura 47 - 2.6 realizada pela Beatriz. 185

Figura 48 - Tarefa 2.7 186

Figura 49 - Tarefa .7 realizada pela Beatriz. 187

Figura 50 - Tarefa 2.8 realizada por Miguel. 188

Figura 51 - Tarefas 9 e 10. 188

Figura 52 - Tarefa 2.8 realizada por Gabriel. 190

Figura 53 - 2.12- resposta da alternativa a realizada pelo Gabriel. 191

Figura 54 - Tarefa 2.12 realizada pelo Miguel 192

Figura 55 - Tarefa 3.1, com registros da aluna Beatriz. 197

Figura 56 - Tarefa 3.2 199

Figura 57 - Tarefa 3.3 200

Figura 58 - Tarefa 3.4 201

Figura 59 - Tarefa resolvida por Miguel. 205

Figura 60 - Orientações da Tarefa sobre Sistemas Equivalentes. 206

Figura 61 - Tarefa 3.8 e 3. 9. 207

Figura 62 - Registro de Beatriz em relação a tarefa 3.8. 207

Figura 63 - Tarefa 3.10 208

Figura 64 - Registro de Amanda na tarefa 3.10 209

Figura 65 - Tarefas 3.11 e 3.12. 209

Figura 66 - Resoluções de César no Geogebra dos sistemas I) $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x+4y=10 \\ 2x+8y=0 \end{cases}$, respectivamente. 210

Figura 67 - Registro de Miguel - item c - tarefa 3.12. 212

Figura 68 - Registro do aluno Gabriel. 213

Figura 69 - Registros da Beatriz. 214

Figura 70 - Registros de Beatriz nas tarefas 3.16 e 3.17. 215

Figura 71 - Percepções dos alunos sobre as tarefas propostas. 219

Figura 72 - Dificuldades dos alunos durantes as tarefas de estudo. 220

Figura 73 - Respostas dos alunos sobre o que facilita aprenderem determinado conteúdo. 221

Figura 74 - Relevância das tarefas propostas. 222

Figura 75 - Contribuição do professor no desenvolvimento das tarefas. 223

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 Publicações de teses e dissertações sobre a temática no período de 2004 a 2017 96

Gráfico 2 - Nível/modalidade em que os trabalhos selecionados foram desenvolvidos 97

Gráfico 3 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho 110

Gráfico 4 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho 114

Gráfico 5 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho 116

Gráfico 6 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho 119

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Acepções de Kopnin (1978) sobre conceito, juízo e dedução. 46

Quadro 2 - Movimento dos conhecimentos empíricos e teóricos de acordo com Davídov (1988, p.154-155). 51

Quadro 3 - Sistema de ações particulares para a solução das de acordo com Davídov (1988, p173-174). 59

Quadro 4 - Conhecimentos, competência e habilidades de Álgebra presentes na matriz de referência do ENEM 107

Quadro 5 - Organização das Tarefas 143

Quadro 6 - Cronograma de realização do experimento didático-formativo............... 144

Quadro 7 - Atitudes dos alunos participantes em relação à Matemática. 151

Quadro 8 - Visão Geral das ações e objetivo das Tarefas 1. 155

Quadro 9 - Organização das tarefas sobre o conhecimento de equações. 177

Quadro 10 - Organização das tarefas sobre os juízos e o conceito de Sistemas de Equações Lineares. 195

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Natureza das pesquisas selecionadas 97

Tabela 2 - Principais assuntos/objetivos frequentes nos trabalhos analisados 98

Tabela 3 - Percentual de acertos nos itens do ENEM que avaliaram a Habilidade 19 109

Tabela 4 - Distribuição (%) das respostas por grupos de desempenho 111

Tabela 5 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão 111

Tabela 6 - Itens do ENEM 2012 - 2014 que avaliaram a Habilidade 20. 112

Tabela 7 - Distribuição (%) das respostas por grupos de desempenho 114

Tabela 8 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão 115

Tabela 9 - Itens do ENEM que avaliaram a Habilidade 21. 115

Tabela 10 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão 117

Tabela 11 - Distribuição das respostas por grupos de desempenho 117

Tabela 12 - Item do ENEM que avaliou a Habilidade 22 118

Tabela 13 - Itens do ENEM que avaliaram a Habilidade 23. 118

Tabela 14 - Distribuição (%) das respostas por grupos de desempenho 120

Tabela 15 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão 120

SUMÁRIO

PRELÚDIO 21

1. INTRODUÇÃO: O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E SUA RELEVÂNCIA CIENTÍFICA E SOCIAL 25

1.1 O desenvolvimento da pesquisa e o seu contexto/relevância social e científica... 25

1.2 O caminho para o desenvolvimento desta pesquisa 31

1.3 Organização e apresentação 35

2 – REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO 37

2.1 Fundamentos epistemológicos: a dialética-materialista...................................... 37

2.2 As formas de pensamento: juízos, conceitos e dedução...................................... 43

2.3 A generalização e a abstração e a formação de conceitos.................................. 47

2.4 A formação de conceitos e os processos de ensino-aprendizagem 54

2.5 A Atividade de Estudo: fundamentos para a realização do experimento didático-formativo 57

2.6 A Atividade de Estudo e a Idade psicológica.. 65

2.7. Experimento didático-formativo: uma perspectiva para a abordagem metodológica 68

3 – O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS CONTEÚDOS ALGÉBRICOS: EM ANÁLISE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES, EQUAÇÕES E COMPARAÇÕES 73

3.1 O movimento lógico-histórico na construção do conhecimento 73

3.2 A álgebra e seu movimento lógico-histórico: situando o objeto analisado........... 76

3.3. Sistemas de Equações Lineares.. 84

3.4 Equações 88

3.5 Comparações 92

4. A ÁLGEBRA NO ENSINO MÉDIO: ENTRE O PREVISTO E O REALIZADO 95

4.1 Pesquisas sobre o ensino de Sistema Lineares e o ensino de álgebra fundamentado na Teoria Histórico-Cultural 95

4.2. Os currículos que orientam o Ensino Médio: identificando as proposta de ensino de álgebra 101

4.3 O Exame Nacional do Ensino Médio e o desempenho dos alunos nas questões algébricas 106

4.4 O diagnóstico do desenvolvimento de sistema de equações lineares na escola pesquisada 121

4.4.1 A observação das aulas de sistema de equações lineares 121

4.4.2 Diagnosticando a aprendizagem do conteúdo de sistema de equações lineares pelos alunos participantes da pesquisa 126

5. O DESENHO DO EXPERIMENTO: A VALIDAÇÃO E ORGANIZAÇÃO DAS TAREGAS E A CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES 141

5.1 Tarefas de Estudo: uma construção dialogada 141

5.2 Preliminares para a organização e análise das tarefas 143

5.3 Validação das Tarefas de Estudo: a análise dos professores 145

5.4 A caracterização dos alunos e as suas atitudes em relação à Matemática 150

6 – O DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS DE ESTUDO E DO PENSAMENTO TEÓRICO 155

6.1. As comparações como uma relação geral do estudo de Sistemas de Equações Lineares 155

6.2. Equações lineares um elemento essencial no estudo de sistema de equações lineares: análise da Tarefa 2 177

Tarefa 2: Explorando o conceito de equações 177

6.3. Desenvolvendo os Juízos e Conceito de Sistemas de Equações Lineares: análise da Tarefa 3 194

Tarefa 3: Desenvolvendo o conceito de sistema de equações 195

6.4 Avaliação do Experimento enquanto procedimento de pesquisa 218

7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS 227

REFERÊNCIAS **232**

APÊNDICES **240**

Apêndice 1– Carta de autorização/solicitação para a realização da pesquisa 240

Apêndice 2 – Termo de Assentimento 241

Apêndice 3 – Termo de Consentimento 243

Apêndice – Convite aos alunos 245

Apêndice 5 - Questionário.. 246

Apêndice 6 – Diagnóstico 247

Apêndice 7 – Atividade 1 251

Apêndice 8 – Atividade 2 255

Apêndice 9 – Atividade 3 259

Apêndice 10 – Questionário: Avaliação do Experimento 267

PRELÚDIO

Neste momento, vou tecendo ideias e conhecimentos adquiridos no percurso da minha formação, no âmbito familiar e acadêmico, considerando os saberes de base – muitos deles ocorridos durante a educação básica, na graduação e na pós-graduação, especialmente os ensinamentos do curso de doutorado em Educação e as experiências socioculturais vivenciadas.

Escrevo em 1ª pessoa do singular, como sujeito pesquisador que influencia e foi influenciado neste processo de construção do conhecimento que se desvela pelo ato de fazer pesquisa. Eu, Júlio Henrique da Cunha Neto, almejo o doutoramento em educação, reconhecendo que o resultado deste trabalho é decorrente de experiências pessoal, profissional, social e cultural. Apresento-me, então, brevemente.

Filho de professora de Língua Portuguesa e de funcionário público – sem formação superior, sempre fui incentivado a estudar. Meus pais sempre se esforçaram para me propiciar uma educação de qualidade, assim, estudei toda a educação básica em colégios privados.

Mesmo que colégios privados não sejam sinônimos de qualidade, no atual contexto educacional brasileiro, com poucas escolas públicas de qualidade, reconheço que realizar a educação básica em um colégio de excelência e ter o apoio familiar fizeram/fazem a diferença para as conquistas obtidas e um profícuo desenvolvimento – pessoal, profissional e social.

Nascido em Uberaba, Minas Gerais, desenvolvi-me da educação básica ao doutorado nessa cidade. Inicialmente não tinha a pretensão de ser professor e/ou seguir uma carreira acadêmica. Muito tímido quando criança, a educação básica que realizei foi concentrada em dois colégios que foram fundamentais para o meu desenvolvimento e socialização – com atividades esportivas, participando do time de futsal, aulas de músicas – tocando piano e acordeon na orquestra, nas festas juninas, em celebrações religiosas e outros eventos – interpretando e cantando nos musicais escolares.

No ensino médio, preparava-me para realizar os vestibulares, tomado por indecisões sobre a escolha do curso de graduação. Tinha dúvidas em realizar o curso de matemática ou alguma engenharia. No entanto a preferência, naquele momento, era de engenharia civil. Fui aprovado em engenharia civil nesta Universidade e também em matemática na Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM). Com muitas dúvidas, iniciei o curso de licenciatura em matemática.

Fui criticado por escolher cursar licenciatura. “Amigos” e familiares analisavam que eu tinha potencial para realizar um “curso melhor”, que poderia ter uma carreira promissora se fizesse, por exemplo, engenharia. Mesmo inseguro em relação a essa escolha, iniciei o curso de licenciatura, com o pensamento de que poderia, posteriormente, realizar e/ou mudar para outro curso de graduação.

O diretor do colégio em que estudava e meus pais me incentivaram a realizar o curso de licenciatura em matemática. Fui cada vez mais me interessando pelo o curso e pela a ideia de ser professor. Concomitantemente à graduação, ministrava aulas de reforço no mesmo colégio conclui o Ensino Médio – Colégio Cenecista Dr. José Ferreira. Nesse mesmo período, participei de um processo seletivo para cursar pedagogia na Universidade Federal de Uberlândia (UFU) na modalidade à distância, assim, também, ingressei nessa formação.

O curso de Licenciatura em Matemática, que realizei, dava ênfase a uma formação sustentada pelo conhecimento específico do conteúdo matemático. Durante esse percurso, por inúmeras vezes eu me perguntava: Qual o significado/ importância de aprender isso? Não seria mais importante estudar aquilo? Qual a relação desse conteúdo específico com o propósito de formar um professor para educação básica?

Acredito que, naquele momento, não estava amadurecido o suficiente para compreender e relacionar conhecimentos específicos com a realidade que vai além da sala de aula, mas já reconhecia algumas lacunas na formação do professor de matemática para a Educação Básica. Mesmo não compreendendo significados sociais e a dimensão do conhecimento específico, ficava fascinado por ele, pois sempre gostei das geometrias, dos cálculos, das álgebras, entre outros saberes relacionados a essa área, o que possibilitava a mim o prazer de fazer a ‘matemática pela matemática’. É importante considerar também a formação advinda do Curso de Pedagogia e questões relacionadas a “como aprender e ensinar” que sempre me provocavam.

Nas graduações, principalmente na licenciatura em matemática, era um aluno participativo, presente nos colegiados de cursos, conduzia o centro acadêmico, contribuía para a realização de eventos, tive orientações de iniciações científicas, entre outros. O período das graduações foi intenso (2009 – 2013) – matemática, pedagógica e iniciação à pesquisa e à docência.

Após concluir a da graduação, iniciei a docência em turmas do Ensino Médio – no mesmo colégio em que havia estudado. Também ministrei aulas no mesmo curso de licenciatura no qual me formei – como professor substituto. Atribuo essas oportunidades que tive como decorrentes do meu desempenho como aluno – interesse e proatividade, tanto na educação básica como na graduação. É importante ressaltar que pretendia cursar mestrado, oportunidade concedida pela UFTM, no curso de pós-graduação em Educação.

Desenvolvi-me no mestrado, ocasião em que conheci as bases para realizar uma pesquisa, estudei sobre a formação de professores e o desenvolvimento profissional docente, participei de grupos de pesquisa, congressos e publiquei artigos em periódicos científicos. No decorrer do mestrado em Educação e por meio de orientações, aulas, conversas em grupos de pesquisas e com colegas, e o momento em que estava vivenciando, enquanto professor de matemática no ensino superior, a abordagem da minha pesquisa se pautou na a *identidade do professor formador do curso de licenciatura em matemática.*

A experiência do mestrado teve um impacto tão positivo na minha formação que, no mês seguinte à defesa da dissertação, iniciava o doutorado na Universidade de Uberaba. Animado em continuar os estudos acadêmicos na respectiva Universidade, aprofundei os meus conhecimentos sobre teorias da educação e aprendo, a cada dia como desenvolver uma pesquisa de qualidade.

As aprendizagens desenvolvidas durante toda essa formação impactaram na minha vida pessoal e profissional – durante o mestrado tive a experiência de ser supervisor escolar de um Colégio Militar, aprovado em concurso público- e continuei a trabalhar na mesma instituição de ensino em que estudei como docente e produtor de material didático. Essa instituição compõe uma rede escolas que também têm um sistema de ensino. Com o início do doutorado e suas exigências, meu trabalho se concentrou nas atividades da pós-graduação e nessa escola e no sistema de ensino.

Neste último ano de doutorado, continuo trabalhando nessa mesma rede de escolas, porém convidado a trabalhar na mantenedora, situação que está me propiciando vivenciar outras experiências pessoais e profissionais – em que tive, por exemplo, mudar de cidade – saindo do interior de Minas Gerais – Uberaba, para Brasília/DF. Essa mudança de vida impactou no meu ritmo de estudo e, consequentemente, nos prazos para conclusão desta pesquisa. No entanto, tal mudança me possibilitou o amadurecimento pessoal e profissional, contribuindo para conclusão deste estudo. Assim, questiono: qual o sentido deste prelúdio nesta tese de doutorado? Os pressupostos desta pesquisa como a totalidade, a transformação e o desenvolvimento do indivíduo, com base no desenvolvimento do conhecimento científico e das experiências sociais, precisam ter sentido para quem o fez.

Este prelúdio apresenta uma breve história deste pesquisador que tem a convicção de que a educação – os processos de ensino-aprendizagem, organizados, direcionados, mediados, fundamentados, têm o poder de transformar as pessoas – assim como o fizeram comigo.

Nesse contexto, escolha dos fundamentos deste estudo está relacionada com "quem sou", com o modo pelo qual me desenvolvi/desenvolvo. O desenvolvimento do experimento didático-formativo nesta pesquisa, para além da aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, apresenta uma alternativa para promover a reflexão e a transformação contínua do presente pesquisador, de docentes e alunos, no sentido de impactar na transformação de suas comunidades e promover a formação humana.

1. INTRODUÇÃO: O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E SUA RELEVÂNCIA CIENTÍFICA E SOCIAL

Neste capítulo, descrevemos o processo de construção do problema desta pesquisa, esclarecendo o porquê de investigarmos sobre o ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares. Justificamos a relevância do presente estudo, com base na literatura acadêmica, no diagnóstico sobre a produção de dissertações e teses que abordam a mesma temática deste estudo e em dados do contexto do ensino da Matemática neste final da segunda década do século XXI. Desse modo, as discussões presentes neste capítulo apresentam e explicam ao leitor a proeminência desta pesquisa e os direcionamentos que possibilitaram a sua construção.

1.1 O desenvolvimento da pesquisa e o seu contexto/relevância social e científica

Este trabalho se insere na linha de pesquisa Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba. Está, ainda, incluído no projeto de pesquisa intitulado “Conteúdos algébricos no ensino médio: discussões e propostas na perspectiva da teoria histórico cultural”, aprovado pela FAPEMIG, em 2017, APQ-01914-17, coordenado pela professora Dra. Marilene Ribeiro Resende.

Esta investigação apresenta a seguinte questão norteadora: Como organizar o ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, no ensino médio, visando criar condições para o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno?

O objetivo desta pesquisa, então, é desenvolver na prática escolar do Ensino Médio uma organização do processo de ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, potencializando o desenvolvimento do pensamento teórico, necessário à formação humana.

Para Davydov (1982) “[...] o conhecimento teórico constitui o objetivo principal da atividade de ensino, pois é por meio de sua aquisição que se estrutura a formação do pensamento teórico e, por consequência, possibilita o desenvolvimento psíquico da criança” (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p.62).

Entretanto, o ensino pautado no conhecimento teórico não é evidente na educação escolar - principalmente o ensino-aprendizagem da Matemática, sendo preciso repensar as formas de ensino de álgebra, tendo em vista o desenvolvimento do pensamento teórico e a formação de conceitos (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

Visando ao desenvolvimento do pensamento teórico, com base nos fundamentos da Teoria da Atividade de Estudo, pretendemos, assim, defender tese de que a organização do ensino com base na Teoria da Atividade de Estudo pode ressignificar o ensino da álgebra/ Sistemas de Equações Lineares, no ensino médio, potencializando o desenvolvimento do pensamento teórico.

A Atividade de Estudo*,* nos pressupostos de Davídov (1988), tem foco no desenvolvimento do conhecimento teórico (combinação unificada da abstração substantiva, generalização e conceitos teóricos) e uma estrutura singular que contribui para o desenvolvimento mental e da personalidade da criança. Para o referido autor, a escola tem um papel preponderante na formação do indivíduo, quando a criança começa a vivenciar esse meio, assimilam-se as formas mais desenvolvidas de *consciência socia*l, sendo que a apropriação dos conhecimentos escolares decorre da atividade de estudo.

Para tanto, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar os documentos legais que regem o ensino médio, as produções relacionadas ao ensino-aprendizagem de sistemas lineares, os resultados dos alunos em relação aos conteúdos algébricos, para compreender o cenário em que o ensino de Matemática e mais especificamente o de álgebra - sistema lineares será/está proposto.
- Organizar tarefas de estudo sobre sistema de equações lineares, para o ensino médio, com foco no desenvolvimento do pensamento teórico.
- Explicar, com bases nos dados empíricos e no referencial teórico, as apropriações dos alunos dos conteúdos desenvolvidos com foco no desenvolvimento do pensamento teórico.
- Avaliar o experimento didático-formativo desenvolvido.

Quanto às as justificativas para o desenvolvimento deste estudo consideramos os seguintes cenários:

1) A sociedade atual, início do século XXI, tem uma educação caracterizada pelo valor utilitário dos conteúdos escolares que se sobrepõe à essência de um saber que poderia contribuir para o desenvolvimento humano do aluno e para a formação de sua concepção de mundo.

2) Necessidade de repensar os processos de ensino-aprendizagem dos conteúdos escolares com base nas alterações previstas para o "novo" Ensino Médio – Lei nº 13.415/2017, BNCC, entre outros.

3) A insuficiência das atuais práticas direcionadas ao ensino da álgebra que traz à tona a necessidade de investigar os processos de ensino-aprendizagem dessa área do conhecimento, visando à ressignificação dos conhecimentos algébricos.

4) Contribuir para os estudos sobre o ensino-aprendizagem da álgebra fundamentado na Teoria da Atividade de Estudo, sobretudo no ensino médio, visto que há lacunas nesse campo de pesquisa – com poucas pesquisas em nível de doutorado. Além disso, observam-se, no cenário atual, pesquisas que apresentam uma proposta de ensino, porém, sem serem aplicadas e/ou testadas no cotidiano escolar.

Os cenários que justificam a relevância desta pesquisa são discutidos a seguir:

1) Na sociedade atual, primeiras décadas do século XXI, evidencia-se a obsessão pelo novo, e o discurso para a solução de todos os problemas se fundamenta no termo "inovar", ou seja, produzir algo novo. Produção que apresenta relação dialética com consumo, visto que o produto não se torna produto se não for consumido; do mesmo modo, se não há consumidor, a finalidade do produto não é expressa (MARX, 1857).

Nessa perspectiva, a sociedade tem de produzir e consumir; e, o que é produzido e consumido necessita atender os interesses daquele que detém o capital. Nessa conjuntura, as políticas governamentais interiorizam essa lógica e, consequentemente, os indivíduos também se apropriam dessa racionalidade.

O sistema capitalista instiga-nos a consumir e a produzir a todo instante. O que é novo traz fascínio à sociedade e deixa obsoleto aquilo que se criou recentemente. Como, por exemplo, celulares lançados hoje, amanhã já estão ultrapassados. Assim, consumimos o que há de mais novo e criamos uma demanda por uma nova produção (MARX, 1857).

Analisamos, então, de que maneira a educação escolar se faz presente na sociedade capitalista. Para Duarte (2016, p.2), a indústria capitalista realiza a obsolescência programada de seus produtos, visando obter mais produção, consumo e lucro, porém, isso não parece ocorrer apenas com a produção de bens materiais. O autor denomina de *"obsolescência programada do conhecimento"* a essa mesma prática quando ocorre nas relações entre a sociedade e o conhecimento, tornando-o bem de consumo imediato.

O valor utilitário dos conteúdos escolares se sobrepõe à essência de um saber que poderia contribuir para o desenvolvimento humano do aluno e para a formação de sua concepção de mundo.

Na lógica do capital, o conhecimento parece ter data de validade, podendo ser comparado a bens materiais - após utilizá-lo, torna-se descartável. Assim, a produção e o consumo do conhecimento ocorrem de modo pragmático, pois o conhecimento é visto como um produto para satisfazer as necessidades imediatas de um indivíduo, e não para promover o desenvolvimento do ser humano em todas as suas dimensões, ou seja, para propiciar a sua humanização.

Relativamente ao “como” e “o que” ensinar, observa-se, atualmente, pelos currículos escolares e os processos de ensino-aprendizagem, que são conduzidos pela lógica do capital. Assim, concebemos o ensino do conteúdo priorizando sua dimensão prática, sua aplicabilidade e sua utilidade.

Consideramos que, para promovermos um ensino que vislumbre o desenvolvimento do aluno, além da dimensão utilitária, é essencial considerar o passado, o presente e as perspectivas de futuro da sociedade humana, perfazendo uma interpretação histórica. Não se pode ensinar às novas gerações sem fundamentarmos num movimento histórico, uma vez que “[...] levando em conta apenas as necessidades imediatas do presente, não ensinaremos às crianças e aos jovens a considerarem as consequências para o amanhã das escolhas que a sociedade e os indivíduos fazem na atualidade” (DUARTE, 2016, p.1).

Temos de discutir constantemente “o que” e “como” se ensina na educação escolar brasileira, em virtude de o jovem desenvolver sua concepção de mundo com referência nos aprendizados ocorridos durante sua escolarização, e a manutenção ou a transformação da sociedade parte da formação do indivíduo, ocorrida, sobretudo, no âmbito escolar.

Desse contexto, justifica-se a necessidade de promover processos de ensino-aprendizagem que vislumbrem o desenvolvimento do aluno e sua formação humana, além da dimensão utilitária.

2) Em relação à educação escolar brasileira, fazemos uma breve análise sobre as propostas e políticas educacionais que vêm sendo revisadas, discutidas e implementadas no decorrer dos últimos 15 anos. Destacamos o estabelecimento do Plano Nacional de Educação (PNE: 2014-2024) - promulgado pela Lei nº 13.005/2014, que apresenta as diretrizes para a erradicação do analfabetismo, a melhoria da qualidade da educação e a valorização dos profissionais que atuam nessa área, bem como a elaboração e implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tem o propósito de nortear os currículos da educação básica brasileira. Outro tópico de debate se refere às mudanças na organização e funcionamento do ensino médio, contexto desta pesquisa.

Sobre esse nível de ensino, observamos que os conteúdos escolares e suas formas de ensino poderão sofrer impactos, conforme as alterações previstas na Lei nº 13.415/2017 - que atendem, prioritariamente, aos interesses de uma sociedade capitalista. A referida lei entrou em vigor no dia 16 de fevereiro de 2017 e estabelece mudanças significativas no respectivo nível de ensino da educação básica. Os conteúdos e as formas de ensino fundamentar-se-ão na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e a carga horária escolar será ampliada e os processos de avaliação serão revistos. Além disso, visa-se ao investimento para expansão de um Ensino Médio técnico e profissionalizante, dentre outras mudanças.

Salientamos que é preciso analisar as alterações previstas para o ensino médio, considerando que esse nível escolar tem fundamental importância no processo formativo dos estudantes. A Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB nº 9394/96, art. 35, inciso III, apresenta como uma das finalidades desse nível o "aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico" (BRASIL, 1996). Nessa Lei que ficam estabelecidas, dentre outras, as diretrizes e base do Ensino Médio visando à formação integral do indivíduo, em que é destacada a necessidade da formação humana.

Desse modo, tais alterações previstas - e que estão sendo realizadas, para o "novo" Ensino Médio brasileiro, evidenciam a necessidade do desenvolvimento de estudos sobre os processos de ensino-aprendizagem dos conteúdos escolares – visto que está sendo implementada uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC), tem-se a proposta do Ensino Médio integral, o aumento de carga horária, os itinerários formativos flexíveis, entre outros.

3) Consideramos que o ensino da Matemática pode contribuir para o desenvolvimento humano e a transformação da sociedade. De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014), a Matemática é reconhecida como um dos conhecimentos essenciais à formação geral de um indivíduo. Os autores salientam a relevância do ensino da Matemática, visto que, no decorrer da história, o seu desenvolvimento possibilitou avanços significativos no que tange à construção das primeiras máquinas modernas, ao desenvolvimento tecnológico, entre outros.

Entretanto, ressaltam que, mesmo não havendo questionamentos com o propósito de retirar o ensino da Matemática das escolas, consideram ser necessário averiguar, constantemente, quais conceitos matemáticos são essenciais à formação Matemática e humana dos estudantes.

No âmbito da Matemática escolar, ao lado de outros eixos temáticos, têm-se os conteúdos algébricos, dentre eles, os Sistemas de Equações Lineares. Sousa, Panossian e Cedro (2014), ao analisarem o ensino da álgebra, perceberam a insuficiência das atuais práticas de ensino direcionadas à álgebra e destacam que um dos desafios para os pesquisadores que investigam o ensino da álgebra e, consequentemente, da Matemática, refere-se à ressignificação dos conhecimentos algébricos.

Esse cenário traz à tona a necessidade de investigarmos os processos de ensino-aprendizagem da álgebra, visando dar significado e sentidos aos conteúdos escolares inerentes a essa área do conhecimento.

4) Em diagnóstico realizado sobre o ensino de sistemas lineares/álgebra no Ensino Médio e sobre o ensino de álgebra, fundamentadas na Teoria Histórico-Cultural – discutido no capítulo 4 desta pesquisa, verificou-se uma ínfima quantidade de pesquisas sobre, especificamente, o ensino de sistemas lineares/álgebra no ensino médio, pois, quando realizadas, não foram feitas no âmbito do Ensino Médio e/ou não apresentaram como fundamentação a Teoria Histórico-Cultural.

Além disso, constatou-se uma pequena quantidade de teses presentes neste levantamento. Dentre elas, não há pesquisas que tratam, nomeadamente, do ensino de sistemas lineares/álgebra no Ensino Médio com base no levantamento bibliográfico em pauta e, ainda, há escassos experimentos didáticos que abarcam o ensino da álgebra no âmbito do referido nível escolar. Muitos trabalhos analisados apresentam uma proposta para o ensino da álgebra, contudo, elas não foram desenvolvidas/ “testadas” na prática escolar.

O sistema didático proposto nesta pesquisa tende a suprir as lacunas identificadas neste levantamento, abrangendo de forma integrada a modelagem gráfica, recursos digitais – como aplicativos, vídeos e softwares matemáticos. Para além da aprendizagem dos conteúdos matemáticos, também, almeja o desenvolvimento do pensamento teórico, com base no movimento lógico-histórico do conteúdo, engendrando a humanização.

Nessa perspectiva, visa endossar os estudos sobre o ensino-aprendizagem da álgebra fundamentados na Teoria Histórico-Cultural, agregando contribuições do desenvolvimento dessa proposta ao Ensino Médio e com um conteúdo específico. Avalia, também, o desenvolvimento de um experimento didático-formativo, identificando os aportes e as dificuldades, possibilitando o aprimoramento dessa metodologia de pesquisa.

O ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares – dentre outros conteúdos escolares, carrega consigo um conhecimento historicamente construído, produzido a partir de uma diversidade social e cultural – de contradições, que, ensinados com base em um movimento lógico e histórico, pode proporcionar a formação humana.

Trazer essa discussão para o contexto do Ensino Médio brasileiro, cada vez mais direcionado para uma formação técnica e utilitária, revela um dos diferenciais desta pesquisa. Ensinar a álgebra – sistema de equações lineares, para esse nível escolar não pode se restringir em encontrar o “valor do x”, ao cumprimento de um componente curricular para a aprovação no ano letivo ou para ser aprovado num exame/vestibular. O processo de ensino-aprendizagem precisa considerar que os jovens do ensino médio, no momento em que estão formando sua personalidade, necessitam de formação humana – que pode ocorrer a partir dos conteúdos escolares, como os relacionados à álgebra, que passam a ser elementos mediadores importantes.

Assim, a proeminência social desta pesquisa está relacionada à realização de um experimento didático-formativo que objetiva contribuir para o desenvolvimento humano dos estudantes e o aprimoramento do ensino-aprendizagem da álgebra. Apresenta à comunidade acadêmica e escolar possibilidades para o ensino do conteúdo de sistema de equações lineares no ensino médio, visando criar condições para o desenvolvimento do pensamento teórico.

1.2 O caminho para o desenvolvimento desta pesquisa

Este estudo se fundamenta na concepção dialética-materialista na pesquisa em educação. Revela uma concepção de mundo, na qual a produção do conhecimento acontece de forma processual - no movimento histórico de uma sociedade, e se concretiza quando transforma de forma significativa a realidade concreta e histórica (SOUZA; MAGALHÃES; SILVEIRA, 2014).

O ensino da Matemática orientado por pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, sobretudo pela Teoria da Atividade de Estudo, orienta para a apropriação histórica dos conceitos e depreende que o movimento está presente na construção desse conhecimento. Considera que o ensino proposto advém da necessidade do ser humano e de sua relação com o mundo. A teoria e a prática se constituem em uma unidade que dá sentindo/significado ao conhecimento aprendido (MOURA, 2000).

Fundamentar o ensino da álgebra nessa perspectiva pode propiciar ao professor uma nova qualidade de ensino, afirmam Sousa, Panossian e Cedro (2014). De acordo com os autores, o docente, ao entender o movimento lógico e histórico da álgebra, poderá trabalhar não apenas com o seu produto, mas, também, com seu processo. Ressaltam ainda que o ensino da essência dos conceitos algébricos, considerando a totalidade do objeto contribui para o desenvolvimento da humanização pelo conhecimento. Humanização que se desenvolve pela atividade humana e no avanço do pensamento teórico.

Consideramos que o ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares, tendo como referência os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural – notadamente a Teoria da Atividade de Estudo, pode possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, proporcionando a sua formação integral - na esfera social dos indivíduos, preparando-os para resolver diferentes problemas e, além disso, possibilitando-lhes sua humanização, ao se transformar e transformar o que o cerca.

Nessa perspectiva, variados instrumentos de pesquisa como, por exemplo, a análise documental, a observação, a coleta de dados para análises qualitativas e/ou quantitativas, entre outros procedimentos, podem ser utilizadas, ressalta Netto (2009). Segundo o respectivo autor, tais instrumentos possibilitam ao pesquisador "apoderar-se da matéria", perfazendo a organização lógica da investigação.

Nesta pesquisa, utilizamos o estudo bibliográfico para fundamentar teoricamente este aprendizado e para conhecer o que já foi produzido sobre a temática, a análise documental para contextualizar e compreender historicamente o ensino de Matemática nesse nível e o experimento didático-formativo para desenvolver as tarefas de estudo propostas.

Além disso, no que concerne ao estudo bibliográfico, estudamos as obras de Marx, Vigotski, Davidov, Leontiev, Kopnin, Newton Duarte, Libâneo, Sousa, Panossian e Cedro, Aquino, entre outros autores, que abordam a Teoria Histórico-Cultural, o ensino desenvolvimental, a Teoria da Atividades de Estudo, as políticas educacionais brasileiras e o processo de ensino-aprendizagem da álgebra, para construirmos a fundamentação teórica desta pesquisa.

Com relação à pesquisa documental, foram analisados documentos que orientam a educação escolar brasileira, com o desígnio de compreender, historicamente, o contexto do Ensino Médio e do ensino da álgebra.

Assim, compreendemos a análise documental nos pressupostos de Cellard (2012), que concebe o documento como um acréscimo à dimensão do tempo e à compreensão da sociedade, para examinar os documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Currículo Básico Comum de Minas Gerais (CBC), Base Nacional

Comum Curricular (BNCC), Matrizes de competências do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica (DCN) e itens avaliativos do ENEM.

No que se refere aos itens avaliativos do ENEM, verificarmos a abordagem e o direcionamento dos itens que contemplam o conhecimento de Sistemas de Equações Lineares e, também, averiguar o desempenho dos alunos nessa avaliação, evidenciando possíveis dificuldades no aprendizado do referido conteúdo.

Após as investigações de cunho bibliográfico e documental, mapeando a produção existente sobre a temática abordada neste estudo e situando a pesquisa no contexto das políticas públicas, realizamos o trabalho de campo.

Desenvolvemos um experimento didático-formativo sobre o ensino de Sistemas de Equações Lineares no ensino médio, com base nos pressupostos de Davidov (1982). Esse experimento foi planejado para ser realizado em uma escola estadual e em um colégio privado da cidade de Uberaba, Minas Gerais. Participariam da pesquisa as instituições que aceitassem a proposta para a realização do referido experimento didático-formativo e que tivessem Ensino Médio regular com, pelo menos, três turmas em cada ano de escolaridade, possibilitando a realização das atividades, também, no contraturno do ensino regular.

Foi submetido ao Comitê de Ética (CEP) da Universidade de Uberaba. No mês de outubro de 2017, iniciamos o preenchimento da Plataforma Brasil, atentando-nos às exigências das Resoluções que regulamentam os aspectos éticos da pesquisa com seres humanos. Nesse período, também convidamos duas instituições escolares a participarem deste estudo – conforme critérios preestabelecidos e, com os devidos aceites, os gestores dos colégios disponibilizaram um termo de autorização permitindo a realização da pesquisa nas suas instalações. O projeto foi submetido ao CEP, no dia 13 de dezembro de 2017, e aprovado no dia 21 do mesmo mês.

No que tange ao trabalho de campo, tentamos promover um processo formativo aos professores de Matemática do Ensino Médio das escolas participantes desta pesquisa. Tivemos a intenção de discutir com os docentes as mudanças previstas para o ensino médio, abordando os aspectos da Base Nacional Comum Curricular para o ensino da Matemática no referido nível escolar e em relação à organização do ensino da álgebra - pautado num movimento lógico-histórico. Mediante tal processo formativo, verificaríamos as concepções dos professores sobre ensino médio, a BNCC e o ensino-aprendizagem da álgebra/sistemas lineares. Porém, mesmo com as atividades planejadas e calendário estabelecido, não conseguimos que os professores participassem dessa formação.

Em seguida, procedemos à elaboração e à realização do experimento didático-formativo sobre Sistemas de Equações Lineares, com foco no desenvolvimento do pensamento teórico do aluno. O *experimento-didático*, conforme Cedro e Moura (2010), é um método específico que tem origem nas ideias de Vygotsky (1998)[1], após estudos sobre os processos mentais dos indivíduos, e, em seguida, dos processos de ensino. De acordo com Cedro e Moura (2010), o experimento didático refere-se a um método de investigação psicológica e pedagógica que analisa a essência das relações entre os diferentes procedimentos da educação e do ensino, correspondentes ao desenvolvimento psíquico do sujeito.

Para a construção do experimento didático-formativo, foram desenvolvidas tarefas de estudo elaboradas, considerando o movimento lógico-histórico do conteúdo *Sistemas de Equações Lineares*, a pesquisa bibliográfica e as análises documentais que foram realizadas neste estudo, envolvendo, também, contribuições dos professores do Ensino Médio das escolas participantes deste trabalho. O referido experimento, no que tange à realização das tarefas de aprendizagem, foi realizado com alunos do 2º ano do ensino médio, uma vez que o aprendizado de sistemas lineares ocorre no referido ano escolar, teve duração de, aproximadamente, de dois meses.

Avaliamos o experimento didático-formativo de unidades de análise definidas com base no referencial teórico e nos objetivos propostos nesta pesquisa. Consideramos a necessidade de uma análise a partir da *unidade*, uma vez que ela “[...] conserva todas a propriedades básicas do todo, não podendo ser dividida sem perdê-las”, nos permitindo compreender a totalidade dos resultados. (VIGOTSKI, 1934/2008, p.5). Cada conjunto de tarefas constitui uma unidade de análise que será investigada de acordo com as categorias:

- transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de sistema de equação linear;
- da modelação à transformação de um modelo para o conceito de equações lineares;

---

[1] Vygotsky, L. (1998). *A formação* social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Michael Cole et al (orgs.); trad. Jose Cippola Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche – 6.ed. São Paulo: Martins Fontes (Psicologia e pedagogia).

- a apropriação conceito de sistema de equação linear como ferramenta do pensamento teórico – controle e avaliação.

Nesse contexto, aplicamos dois questionários aos alunos do Ensino Médio que participaram deste estudo, sendo um, antes da realização do experimento e, o outro, ao final. Tais questionários abordaram concepções sobre o ensino-aprendizagem de sistemas lineares/álgebra que nos permitiram analisar o impacto do experimento-didático no aprendizado e no desenvolvimento do aluno.

Esperamos que esta pesquisa possa contribuir para a melhoria dos processos de ensino-aprendizagem da álgebra, notadamente Sistemas de Equações Lineares, para a formação e o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno do Ensino Médio

1.3 Organização e apresentação

O texto apresentado está estruturado em 6 (seis) capítulos. No primeiro, apresentamos a pesquisa, a forma que foi organizada, pensada, desenvolvida e sua relevância científica.

No segundo capítulo, discorremos sobre o referencial teórico-metodológico desta pesquisa. Abordamos a dialética-materialista, a Teoria da Atividade de Estudo, o experimento didático-formativo, a idade psicológica dos alunos, fundamentando-nos em autores como Marx, Vigotski, Kopnin, Davidov, entre outros.

No terceiro capítulo, discutimos sobre a Álgebra e o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. Discorremos sobre o movimento lógico-histórico desses conhecimentos e suas formas de ensino.

No quarto capítulo, apresentamos resultados sobre diagnósticos realizados que nos orientaram no desenvolvimento e na elaboração do experimento didático-formativo. Assim, realizamos um levantamento de dissertações e teses sobre a temática em pauta, analisamos documentos – currículos, e avaliações (itens do ENEM). Além disso, abordamos aspectos que antecederam a execução do experimento, as observações das salas de aula, o diagnóstico dos alunos em relação ao conhecimento de sistema de equações lineares, entre outros.

No quinto capítulo apresentamos o delineamento do experimento didático-formativo, discutindo sobre a elaboração, a validação das tarefas de estudo e a caracterização dos participantes da pesquisa.

Para o sexto capítulo, analisamos os resultados do experimento didático-formativo, examinando o material (escrita, resolução), as discussões dos alunos com os colegas e com o professor.

Por fim, no sétimo capítulo, tecemos considerações sobre os resultados desta pesquisa e aguardamos contribuições para aprimorar, complementar, corrigir e aprofundar as discussões inerentes a ela.

2 – REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Nesta seção, apresentamos a fundamentação teórica-metodológica deste estudo. Iniciamos com uma discussão sobre o fundamento epistemológico que orienta esta pesquisa, a dialética-materialista e discorremos sobre o processo de desenvolvimento do pensamento. Em seguida, discorremos sobre a Teoria da Atividade de Estudo, o Experimento-Didático-Formativo e a idade psicológica dos alunos.

2.1 Fundamentos epistemológicos: a dialética-materialista

Para conceber uma educação que vise à formação humana do indivíduo, tomamos como fundamento a Teoria da Atividade de Estudo, alicerçada na Histórico-Cultural e nos pressupostos dialético-materialistas, expostos nas obras de Marx, em razão de que, nessa perspectiva, a humanização do homem é um processo que ocorre a partir da apropriação da cultura e de tudo que já foi produzido pela espécie humana (NETTO, 2009).

A dialética-materialista, de acordo com Netto (2009, p. 5), no que diz respeito à questão do método, tem como objeto de pesquisa a existência objetiva. Segundo o autor:

> [...] o método de pesquisa que propicia o conhecimento teórico, partindo da aparência, visa alcançar a essência do objeto. Alcançando a essência do objeto, isto é: capturando a sua estrutura e dinâmica, por meio de procedimentos analíticos e operando a sua síntese, o pesquisador a reproduz no plano do pensamento; mediante a pesquisa, viabilizada pelo método, o pesquisador reproduz, no plano ideal, a essência do objeto que investigou. (NETTO, 2009, p. 5)

Ter a dialética-materialista como fundamento para a pesquisa propende-se desenvolver um estudo que enceta de um movimento histórico e busca compreender o âmago de uma problemática. Ao analisar a dialética presente nas relações sociais e no desenvolvimento humano, preconiza-se a essência para o desenvolvimento histórico da humanidade – formulando-se uma teoria (HUNGARO, 2014).

A dialética-materialista, que nos orienta no processo de produção do conhecimento, sustenta um modo de análise, julgamentos, exames e críticas sobre o objeto a ser analisado, no sentido de que “[...] o essencial é que a análise dialética compreenda a maneira pela qual se relacionam, encadeiam e determinam reciprocamente, as condições de existência social e as distintas modalidades de consciência" (MARX, 1979, p.23).

A dialética revela um caminho para se chegar à verdade e uma forma de o homem buscar compreender sua relação com o mundo – transformando e sendo transformado. Nesse movimento, evidencia-se o processo histórico de produção, para além do seu produto. Compreende a realidade como um constante devir e tem como pressupostos a *totalidade, o movimento* e o inter-*relacionamento dos objetos e fenômenos. (*KOPNIN, 1978; GADOTTI, 2016).

Essa fundamentação diligenciada à educação alerta-nos para análise criteriosa do processo de produção do conhecimento; ou seja, examina o desenvolvimento da aprendizagem, as intervenções, as dificuldades, os erros e as contribuições presentes no processo de ensino-aprendizagem, entre outros aspectos. Acompanhamos a efetividade das práticas pedagógicas, compreendendo os porquês e as causas do desenvolvimento, para a construção de uma análise que articula o processo sócio-histórico do homem, seu comportamento psicológico, político e sua relação com a sociedade.

A dinâmica e os processos caracterizam a dialética-materialista. A dinâmica revela que os fatos não se destinam a um único fim, a fluidez, as mudanças e o movimento do mundo denotam que não podemos pensar num contexto estático e isolado, em uma sociedade imóvel. A realidade pensada e discutida no planejamento de uma atividade/projeto não é, necessariamente, a mesma durante sua execução.

Os processos revelam que as análises não podem ocorrer de forma isolada – é preciso considerar a *totalidade*. No estudo de Marx sobre a sociedade burguesa, verifica-se que há "[...] uma totalidade concreta inclusiva e macroscópica, de máxima complexidade, constituída por totalidades de menor complexidade" (NETTO, 2011, p.56). Entendemos que a análise do objeto em estudo não pode ser constituída de forma fragmentada, visto que a soma das partes não, necessariamente, evidencia o objeto como um todo, mas as partes se relacionam e se completam.

A respeito da Teoria Histórico-Cultural, Vigotski (2001) apresenta quatro teses fundamentais, ao analisar as funções psíquicas superiores, quais sejam:

> [...] o reconhecimento da base natural das formas culturais de comportamento. A cultura não cria nada, tão somente modifica as atitudes naturais em concordância com os objetivos do homem.
> [...] no processo de desenvolvimento cultural da criança, algumas funções são substituídas por outras, vias colaterais são construídas e,

> isso, em seu conjunto, oferece oportunidades completamente novas para o desenvolvimento da criança com dificuldades.
> [...] a base estrutural das formas de comportamento é a atividade mediadora, a utilização de signos externos como meio para o desenvolvimento posterior da conduta"
> [...] domínio da própria conduta (VYGOTSKI, 2001, p.152-153, tradução nossa)

Na Teoria Histórico-Cultural, o desenvolvimento ocorre por meio das interações sociais. Pode-se inferir, assim, que os aspectos culturais de uma sociedade influenciam na formação humana de um indivíduo e, consequentemente, impactam no seu processo de aprendizagem. Vigotski (2001) sinaliza também que o desenvolvimento humano pode se dar por vias colaterais – caso não consiga alcançar algo por meios diretos, tendo um caráter "compensatório" no desenvolvimento cultural.

Na referida teoria, destaca-se a atividade mediadora, compreendida como uma prática elaborada com determinada finalidade e com o uso de instrumentos construídos pelo homem no decorrer de sua história. Os signos e os instrumentos, na atividade mediadora, fomentam o movimento da apropriação da realidade objetiva. (BERNARDES, 2012). Além disso, ressaltamos a importância do domínio da "própria conduta", pois Vigotski destaca que o não domínio pode causar insuficiência no desenvolvimento do indivíduo.

Nesse contexto, a sociedade é conduzida pela racionalidade capitalista, o desenvolvimento humano, conforme defendido pela Teoria Histórico-Cultural, parece não ser um pressuposto que direciona as políticas educacionais, de modo particular a que altera a organização e o funcionamento do Ensino Médio brasileiro. Nessa conjuntura, os conteúdos escolares parecem apresentar apenas valor utilitário, os conhecimentos se tornam obsoletos e podem ser descartados se não atendem às necessidades imediatas dos estudantes.

Propusemos, então, um experimento didático-formativo com base na Teoria da Atividade de Estudo que promova a formação humana, denotando a importância ao movimento lógico-histórico dos conhecimentos matemáticos. Avançamos nos estudos das formas do pensamento teórico, com apoio no objetivo-sensorial e ênfase no aprimoramento dos processos de ensino-aprendizagem-para a efetiva formação humana dos alunos da educação básica.

A educação precisa ter função transformadora, e a escola, ao desenvolver atividades pedagógicas organizadas, intencionais, teóricas e práticas, potencializa a transformação dos indivíduos. Nessa concepção, a educação é vista como processo de humanização, com base na apropriação da cultura produzida, visto que “[...] é na relação com os objetos do mundo, mediada pelas relações com outros seres humanos que a criança tem a possibilidade de se apropriar de obras humanas e humanizar-se” (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p.27)

Humanização que

> [...] é o resultado do entrelaçamento do aspecto individual, no sentido biológico, com o social, no sentido cultural. Ou seja, ao se apropriar da cultura e de tudo o que a espécie humana desenvolveu – e que está fixado nas formas de expressão cultural da sociedade – o homem se torna humano (RIGON, ASBABR, MORETTI, 2010, p.16).

Rigon, Asbahr e Moretti (2010, p.15-16), fundamentados nas obras de Marx, explicam que a apropriação da cultura e o que foi desenvolvido pela espécie humana – o trabalho, expressões culturais, entre outros-, promovem a humanização.

Nesse contexto, a Teoria Histórico-Cultural tem relação direta com a formação humana, visto que compreende o indivíduo no movimento lógico-histórico da sociedade. A formação humana é analisada na relação entre o processo histórico de objetivação do gênero humano e a vida do indivíduo como um ser social.

> Ao agir intencionalmente sobre a natureza, visando transformá-la de modo a satisfazer suas necessidades, produzindo o que deseja e quando deseja, o homem, ao mesmo tempo que deixa sobre a natureza as marcas da atividade humana, também transforma a si próprio constituindo-se humano (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p,17).

Os referidos autores observam que a intencionalidade constitui a atividade humana, revelando que o indivíduo tem necessidade de se expressar e apropriar dos objetos e fenômenos do mundo em que vive. “O indivíduo torna-se humano ao longo de sua vida em sociedade, ao apropriar-se da essência humana, que é um produto histórico-cultural (RIGON; ASBAHR; MORETTI, 2010, p.19).

No âmbito da educação, precisamos incorporar nos estudos as relações entre teórico e prático, objetivo e subjetivo. Uma investigação que analisa as particularidades das ações humanas, as relações entre objeto e sujeito, contribui para o desenvolvimento histórico do pensamento (DAVIDOV, 1988).

É insuficiente estudar, por exemplo, o ensino de sistemas lineares sem considerar o histórico de desenvolvimento desse conhecimento, as políticas e as avaliações que orientam seu ensino, entre outros aspectos, lógicos, históricos e contextuais que nos permitem entendê-lo de forma íntegra.

Nesta pesquisa, buscamos analisar e entender que o ensino de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio se relaciona com "partes" – presentes na sua constituição histórica, e sua essência pode conter elementos de totalidades de menor complexidade: "[...]a categoria "totalidade" é um elemento constitutivo do real: a própria realidade assim se constitui – como totalidade" (HUNGARO, 2014, p.65)

Hungaro (2014), com base no "Método da Economia política" de Marx, esclarece que no caminho investigativo para estabelecer relação com o objeto investigado, o ponto inicial é o concreto, referindo-se à aparência do objeto real, sua materialidade imediata. Pondera que a aparência não corresponde à verdadeira essência do objeto, e, assim, há a necessidade de negá-la.

Netto (2011) avalia que investigação dialética-materialista contribui para o desenvolvimento do conhecimento teórico, que, com base na aparência e nos procedimentos analíticos, o pesquisador reproduz no plano ideal a essência do objeto.

A "reprodução ideal" diz respeito à,

> [...] "reconstrução", no plano das ideias, de algo que se passou, anteriormente, na realidade. Porém, essa mesma realidade é compreendida como uma processualidade, como movimento, enfim, como *vir a ser* que carrega em si elementos de superação e de continuidade. A investigação sobre o social não é, portanto, uma "fotografia", um espelhamento do real (HUNGARO, 2014, p.19).

A matéria e o pensamento são princípios interligados da dialética-materialista, inerentes a uma mesma natureza que é indivisível, afirma Gadotti (2016). O referido autor analisa que essa base epistemológica se funda em um duplo objeto, a saber:

> 1°) como dialética estuda as Leis mais gerais do universo, Leis comuns de todos os aspectos da realidade, desde a natureza física, até o pensamento, passando pela natureza viva e pela sociedade; 2°) como materialismo, é uma concepção científica que pressupõe que o mundo é uma realidade material (natureza e sociedade), na qual o homem está presente e pode conhecê-la e transformá-la (GADOTTI, 2016, p.22).

Conceber a dialética-materialista como fundamento de pesquisa significa entender a concepção de mundo como um todo, articulando, de forma conjunta, a teoria e a prática.

Entendemos o pensamento correlacionado com o conhecimento em geral, como "[...] reflexo da realidade sob forma de abstrações. O pensamento é um modo de conhecimento da realidade objetiva pelo homem" (KOPNIN, 1978, p.121). Assim, ao realizamos uma investigação sobre um determinado conhecimento, analisamos, também, os processos de pensamentos, considerando que o conhecimento se constitui com base nas articulações de realidades objetivas e subjetivas. Sobre o pensamento, ressaltamos, ainda, que

> [...] enquanto reflexo, o pensamento não é uma cópia do objeto em certas formas materiais, não é criação do objeto-duplo, mas uma forma de atividade humana determinada pelas propriedades e Leis do objeto tomadas em seu desenvolvimento. A compreensão das peculiaridades do pensamento como reflexo pressupõe a elucidação da correlação entre subjetivo e objetivo que nele se verifica (Ibid, p.126).

Kopnin (1978) analisa que a objetividade do pensamento representa a realidade do homem, examina a atividade do sujeito e a reflete com plenitude, resulta da atividade do homem social. Já a subjetividade do pensamento deriva da imagem ideal do objeto, e não dele próprio. Além disso,

> [...] o objeto é representado com grau variado de plenitude, adequação e profundidade de penetração em sua essência. O pensamento não exclui a uniteralidade do reflexo do objeto, o divórcio entre a ideia e a realidade, a deformação do próprio objeto na imagem. O caráter da imagem cognitiva depende de muitas circunstâncias. A forma de existência do objeto no pensamento depende do sujeito, da posição do homem na sociedade. (KOPNIN, 1978, p.127).

Para alcançar a essência do objeto, além da *totalidade,* a *abstração* também é categoria fundamental (HUNGARO, 2014; NETO, 2011).

Sobre a abstração, Netto (2011) observa que o negar está relacionado à abstração, o que permite ao pesquisador ir além do aparente. Ela nos possibilita identificar a totalidade e apropriar-se dela.

> A abstração, possibilitando a análise, retira do elemento abstraído as suas determinações mais concretas, até atingir "determinações as mais simples". Neste nível, o elemento abstraído torna-se "abstrato" – precisamente o que não é na totalidade de que foi extraído: nela, ele se concretiza porquanto está saturado de "muitas determinações". A realidade é concreta exatamente por isto, por ser "a síntese de muitas determinações", a "unidade do diverso" que é própria de toda totalidade. (NETTO, 2011, p.44)

A análise dos elementos constituintes de uma totalidade, com base na abstração, complementará o estudo do objeto, quando o pesquisador estabelecer relações entre os processos que constituem a totalidade.

Considerando essa análise, a dialética-materialista implica relação entre os aspectos objetivo e subjetivo. As conexões internas do objeto nos revelam o seu movimento e sua essência. Contradições fazem parte de uma totalidade. Não há fragmentos isolados e nem processos estáticos. Os conhecimentos se desenvolvem, seus elementos se relacionam e revelam-se uma essência.

O fundamento epistemológico desta pesquisa integra conhecimentos de uma realidade sócio-histórica, pautando-se por características como a objetividade e subjetividade no movimento lógico-histórico, na abstração, no inter-relacionamento e na dimensão da totalidade e, assim, vislumbra a compreensão da realidade com o propósito de transformá-la.

2.2 As formas de pensamento: juízos, conceitos e dedução

O movimento do pensamento revela a essência do objeto e sua representação lógico-histórica, ou seja, ocorre, por meio de abstrações, a representação da realidade. Para Marx (2007, p.21), "o concreto [no pensamento] é concreto porque é a síntese de múltiplas determinações, pelo tanto, unidade do diverso". De acordo com o autor, o pensamento tem capacidade de síntese, relaciona-se com o problema prático, visto que, na prática, busca-se a verdade.

> A produção das ideais, as representações e a consciência aparecem, ao princípio, diretamente entrelaçada com a atividade material e o trato material dos homens, como a linguagem da vida real. A formação das ideias, o pensamento, o trato espiritual dos homens se apresentam aqui ainda como emanação direta de seu comportamento material. (MARX; ENGELS, 1973a, p. 20-21).

O pensamento sintetiza o resultado da atividade material analisada. A dialética estuda o pensamento, considerando a sua relação com o mundo objetivo. De acordo com Kopnin (1978), a prática introduz o material que, na esfera do sujeito, se converte em objeto. O referido autor observa que a prática diz respeito à interação do sujeito com objeto - produzindo transformações. Analisa que, ao realizar uma atividade prática, o homem influencia as coisas do mundo e passa a conhecê-las.

Kopnin (1978) observa, ainda, que o pensamento representa a relação teórica entre o sujeito e o objeto durante a ação prática, em que as propriedades dos objetos materiais se refletem na consciência humana. De forma recíproca, o homem atua sobre a natureza e seus objetos atuam sobre ele, provendo mudanças no homem e no objeto. Continuando com as ideias desse autor, o pensamento pode se apresentar de diferentes formas, sendo que cada uma delas representa de um modo o mesmo objeto e desempenha uma função no movimento do pensamento na busca da verdade objetiva. Apresenta que o movimento do pensamento tem como formas principais: conceito, juízo e dedução.

Na lógica dialética, o estudo sobre conceito, juízo e dedução ocorreu, historicamente, na verificação de diferenças entre eles, evidenciando qual seria mais importante em detrimento às outras, no movimento do pensamento na filosofia. Por exemplo, para os racionalistas, era empolgante a perspectiva que o conceito antecedia o juízo e a dedução. Já para Kant, os conceitos surgiam apenas como resultado dos juízos e das deduções. As interpretações sobre o funcionamento de cada uma dessas formas de pensamento se modificaram no decorrer do tempo e de acordo com a corrente a que os pensadores se filiam (KOPNIN, 1978).

Mediante essas discussões, Hegel[2] buscou dirimir tais contradições existentes, discriminando os conceitos, juízos e deduções, considerando o caráter de ligação neles existentes entre o universal, o singular e o particular.

> No conceito, esses momentos não são desmembrados, mas entendidos como algo totalizado; no juízo, eles se decompõem, os conceitos se subdividem em seus componentes, o singular e o universal atuam como sujeito e predicado unificados por uma cópula. Na dedução, restaura-se a unidade entre o singular e o universal [...] (KOPNIN, 1978, p.189).

A dedução é determinada e funciona como uma unidade entre o conceito e o juízo, afirma Kopnin (1978). O referido autor corrobora com a ideia de Hegel no sentido da existência de uma relação indissolúvel entre juízo, conceito e dedução; todavia, chama a atenção para o fato de que “[...] todas as formas de pensamento subentendem uma a outra e se transformam uma na outra; essa ideia, porém, é deturpada pela base objetivo-idealista da lógica hegeliana” (Ibid, p.190).

Em relação a isso, Kopnin (1978) analisa uma deturpação decorrente da base objetiva-idealista da lógica hegeliana. Ele nota que as formas de pensamento em Hegel

---

[2] Hegel. Obras, t. VI, pp. 105-106. (Ed. E, Russo)

apresentam apenas um sentido de que o conceito vai à dedução por meio do juízo, não dando importância às relações das diversas formas do pensamento. Para solução desse imbróglio, Kopnin (1978, p.190) anuncia como relevante a ideia de K.D. Uchinsky[3]:

> O juízo – escreve ele – não é mais que o próprio conceito, mas ainda em processo de formação. O juízo definitivo se converte em conceito. Do conceito e da noção especial ou de dois ou mais conceitos, pode-se mais uma vez, produzir-se um juízo; mas o definitivo torna a converter-se a um conceito e se traduz em uma palavra: por exemplo; esse animal tem duas pernas e um chifre na testa; ele rumina, etc. Todos esses juízos fundidos formam um conceito de animal bípede e ruminante. Podemos dividir cada conceito nos juízos que constituem cada juízo novamente em conceitos, os conceitos novamente em juízos, etc.

Os conceitos e juízos não são estáveis, por isso se movimentam numa via de mão dupla. Ao realizar uma analogia ao ensino da álgebra, percebemos, por exemplo, que se pode tratar o sistema de equações como um conceito, tendo como base juízos – que também podem assumir função de conceito, envolvendo, equações, incógnitas, igualdades, entre outros; do mesmo modo que a equação, até então um juízo, também pode se caracterizar como um conceito.

Kopnin (1978, p.190) acrescenta a dedução nesse processo e afirma que "[...] não é só o juízo que se converte em conceito, mas o conceito também se converte em juízo". Assim, ao mesmo instante que o sistema de equações é abordado como um conceito, também, pode ser compreendido como um juízo.

Esse autor ressalta a importância do juízo e da dedução na formação de conceitos, analisa que, para identificar o geral no objeto em análise, é preciso examiná-lo em diferentes perspectivas, evidenciando um conjunto de juízos do objeto. A busca pela essência de um objeto precisa considerar um sistema integral de deduções e, ao mesmo tempo, uma análise disjunta dos juízos.

> Na formação dos conceitos, cabe enorme papel à analise enquanto movimento que parte do concreto dado nas sensações, ao abstrato, cabendo também à síntese enquanto movimento do abstrato a um novo concreto, que é o conjunto das definições. O processo analítico é inconcebível sem indução e dedução. Constituído, o conceito leva implícitos, em forma original, todos os juízos e deduções que se verificaram no processo de sua formação. **O conceito é a confluência, síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento** (KOPNIN, 1978, p.191, grifo nosso)**.**

---

[3] K.D. Uchinsky. Obras escolhidas, t. 8. Moscou-Leningrado, 1950, p.477.

O processo de formação de conceitos está diretamente relacionado com as formas de analisar o objeto em estudo. Analisamos, concomitantemente, os juízos de forma separada, mas sem isolá-los do todo e das outras partes que compõem o conceito. Para a conceituação de um dado objeto, em sua totalidade, entendemos que suas partes – juízos, precisam ser evidenciadas com base num processo de dedução e indução, integrando-as na construção de um conhecimento constituído de uma série de fatores lógicos e históricos.

O conceito é formado e transformado com base em um processo dialético que relaciona as deduções, induções, juízos e o próprio conceito. A dedução é pautada por conceitos e juízos. E os novos conceitos e juízos resultam da dedução, num processo que se renova a todo instante e geram pontos de partidas para a produção de novos conhecimentos – novos conceitos.

Kopnin (1978, p.193) analisa que a diferença entre juízos, conceito e dedução está atrelada na conexão entre o universal e o singular – o autor pondera que, "no juízo, está nitidamente expressa a relação entre o singular e o universal, o sujeito e o predicado. No conceito, fixa-se a atenção principal no universal, que é o que se distingue, ao passo que se obscurece o singular". Já na dedução, o autor observa que é evidenciada a relação/ligação entre o singular e o universal, exemplificando: "relação do singular (ouro) com o universal (elemento químico) através do especial (metal)".

No quadro 1, explicitamos alguns significados de Kopnin (1978) sobre conceito, juízo e dedução.

Quadro 1 - Acepções de Kopnin (1978) sobre conceito, juízo e dedução.

Juízo	Conceito	Dedução
• O juízo é a forma mais simples e mais importante de abstração que constitui simultaneamente o traço característico de todo processo de pensamento (p.195). • O juízo está presente em toda abstração, existe em toda parte: nos conceitos, deduções, nas teorias, etc. (p.195). • A Teoria científica é um sistema, um conjunto de juízos unificados por um princípio único (p.195).	• [...] o conceito é um juízo, cujo predicado é a ideia universal no fenômeno. Os conceitos são indispensáveis no movimento do nosso pensamento no sentido da teoria científica, pois neles se concentra conhecimento de aspectos essenciais particularmente do objeto (p.196). • [...] o conceito é, até por estrutura, mais complexo que as formas que o antecederam: o juízo e a dedução (p.197).	• Na dedução, coloca-se, em primeiro plano, a justeza (correspondência de um juízo aos outros [...]) (p.196). • A dedução é uma forma de mediação dos juízos, um meio de obter de juízos antes estabelecidos um novo conhecimento. O juízo é a forma mais simples e mais importante de abstração (p.196).

Fonte: Elaborado pelo autor, de acordo com Kopnin (1978)

Entendemos a estreita relação entre conceito, juízos e dedução como uma unidade que expressa o pensamento, visto que ele não pode se fragmentar, ocorrer de forma isolada, no movimento e no sentido da verdade. Observamos que os juízos dizem respeito à representação das características do objeto em análise, já o conceito, evidencia aquelas que representam a essência do objeto, as que o diferenciam.

Nessa perspectiva, a dialética suscita, além da compreensão das formas do pensamento, a necessidade de convertê-las em teoria. As formas de pensamento precisam contribuir para o desenvolvimento da teoria cientifica, e os juízos, conceitos e as deduções precisam (re)construir teorias e identificar quais são os elementos essenciais para o desenvolvimento do conhecimento (KOPNIN, 1978).

Apresentamos essa discussão acerca da inter-relação de conceito, juízo e dedução com a intenção de evidenciar as construções, desconstruções e contradições existentes na teorização de um conhecimento. A definição de tais conceitos, de acordo com a perspectiva dialética, está imbuída de uma história de discussões teóricas no movimento do pensamento em busca do sentido da verdade.

Entender as formas de pensamento do modo que foi exposto nos auxilia a relacioná-las com o processo de ensino-aprendizagem, julgando que o conhecimento teórico/cientifico a ser ensinado se articula com a inter-relação de conceitos, juízos e deduções e resulta de um processo de construção permeado pelo movimento lógico-histórico.

2.3 A generalização e a abstração e a formação de conceitos

Entendemos a formação de conceito como um *"autêntico e complexo ato do pensamento"*, que necessita abranger, notadamente, intricadas formas do pensamento. A formação de conceito não se restringe a uma atividade mental mecânica e automática, não se refere, apenas, a um conjunto de conexões associativas que se assimilam com o auxílio da memória (VIGOTSKI, 1934).

O desenvolvimento das formas de pensamento do estudante é essencial, pois o conceito deve alcançar o consciente, num *ato de generalização.* O ato de generalização substantiva busca evidenciar a essência do conceito científico. Para isso, é preciso considerar suas características internas e o conjunto de suas relações.

Uma das maneiras que se desenvolve a formação de conceitos é por meio do uso de palavras, o que requer do intelecto as funções elementares do pensamento. As funções do pensamento desenvolvem a partir do primeiro conhecimento que o indivíduo estabelece com o novo conceito, e o desenvolvimento se estende até o momento em que a palavra e o conceito se convertem em propriedade do indivíduo. Para Vigotski (2008), esse processo se finda na acepção da nova palavra, que se desenvolve, gradativamente, na utilização dessa pelo sujeito e sua assimilação real com o conceito final.

Nesse contexto, a palavra se traduz, também, como uma unidade, uma vez que "[...] é no significado da palavra que o pensamento e a fala se unem em pensamento verbal" (Ibid., 2008, p.5). Para Vigotski (2008), uma palavra se refere a um grupo ou classe de objetos, representa uma **generalização**.

Os conceitos - como significados de palavras, se desenvolvem constantemente, dando movimento nas formas de generalização, gerando novos significados as palavras, construindo novos conceitos. Vigotski (2001) afirma que a palavra - generalização do tipo mais elementar- desenvolve-se.

A "generalização empírica" de um "objeto" de uma mesma classe contribui para a formação da consciência, do pensamento teórico, e dos conceitos escolares.

> Assim, a formação das representações gerais, diretamente enlaçadas com a atividade prática, cria as condições indispensáveis para realizar a complexa atividade espiritual que habitualmente se chama pensamento. Para este são características a formação e utilização das palavras-denominações que permitem dar à experiência sensorial a forma de universalidade abstrata. Graças a essa forma se pode generalizar a experiência nos juízos, utilizá-la nos raciocínios. Tal universalidade, baseada no princípio da repetibilidade abstrata, constitui uma das particularidades do pensamento empírico. Este se constitui como forma transformada e expressada verbalmente da atividade dos órgãos dos sentidos, enlaçada com a vida real; é o derivado direto da atividade objetal-sensorial das pessoas. (DAVIDOV, 1988, p. 125)

O processo de generalização empírica se caracteriza, por exemplo, no momento em que se analisa uma quantidade de "objetos" semelhantes, previamente selecionados pelo professor, verificam-se suas singularidades e, também, suas qualidades comuns. As qualidades dos objetos que se repetem e são estáveis, de determinada classe, perfazem o geral e o constituem a essência do objeto (DAVÍDOV, 1988).

Já a generalização substantiva diz respeito a "[...]uma inter-relação necessária dos fenômenos particulares e singulares com a base geral de certa totalidade, descobrir a lei de formação da unidade interna deste" (DAVÍDOV, 1988, p. 152). Ocorre pela análise da essência dos objetos e fenômenos – e não por uma comparação entre fragmentos isolados.

> A generalização substantiva se realiza pelo caminho da análise de determinado todo com a finalidade de descobrir sua relação geneticamente inicial, essencial, universal, como base da unidade interna deste todo. A relação essencial ou universal, descoberta no processo de generalização substantiva, tem forma objetal-sensorial.
> A abstração e a generalização de tipo substantiva encontram sua expressão no conceito teórico que serve de procedimento para deduzir os fenômenos particulares e singulares de sua base universal. Graças a isso, o conteúdo do conceito teórico são os processos de desenvolvimento dos sistemas integrais.
> Em certo sentido, pode-se dizer que a generalização substantiva consiste, predominantemente, na redução dos diversos fenômenos à sua base única; o conceito teórico, na dedução da correspondente diversidade como certa unidade. O resultado da redução tem que assegurar a dedução, isto é, ser ao mesmo tempo a forma inicial do conceito; a realização da dedução deve explicitar a legitimidade da redução, isto é, ser ao mesmo tempo a forma da generalização. Ou seja, a redução e a dedução estão indissoluvelmente ligadas e se realizam uma por meio da outra (DAVÍDOV, 1988, p.152).
> .

Sobre a generalização substantiva, Davídov (1988) apura sua estreita relação com a abstração. Segundo o autor, no processo de generalização, quando se identifica ("separa") uma qualidade essencial comum a um conjunto de objetos, desmembram-se outras qualidades, isso possibilita o entendimento da qualidade geral em um objeto independente. "O movimento da percepção para o conceito é a passagem do concreto, do sensorial para o abstrato, imaginável". (DAVÍDOV, 1988, p.103, tradução nossa).

A percepção reflete a realidade como uma forma de conhecimento que busca o desenvolvimento histórico do homem. Ressalta que a percepção está relacionada à capacidade sensorial e "[...] para que, no pensamento do homem surja uma imagem tátil, visual e auditiva do objeto, é necessário que entre o homem e o objeto se estabeleça uma relação ativa" (LEONTIEV, 1983, p.21, tradução nossa).

No que tange ao processo de ensino-aprendizagem, consideramos que o primeiro contato como o objeto ocorre pelo concreto real, sensorial, analisa-se como ele se manifesta, sua característica externa – com base na profícua relação entre homem e objeto. Em seguida, busca-se identificar as propriedades do objeto em análise, com a percepção, iniciam-se as abstrações.

O movimento do abstrato ao concreto tem o concreto real como ponto de partida e chegada do conhecimento, afirma Kopnin (1978). Davídov (1988) analisa que o concreto real surge como o que é dado sensorialmente; e, no pensamento, o concreto configura-se como processo de síntese. Nesse processo, em busca da essência do objeto, estão presentes: a abstração e a generalização substantivas ou essenciais.

Chamamos a atenção, primeiro, para a tarefa da abstração substantiva, que, de acordo com Kopnin (1988, p.161), “[...] não é separar uns dos outros indícios sensorialmente perceptíveis, mas através deles descobrir novos aspectos no objeto que traduzam as relações de essência”.

A abstração substantiva pode comportar-se de duas maneiras, como objeto simples, que não proporcionou que as diferenciações necessárias fossem realizadas; e como um objeto sem suas distinções particulares, apontando suas relações gerais, afirma Davídov (1988).

> Assim, a abstração substantiva tem pelo menos duas formas. Em primeiro lugar, ela pode aparecer como objeto simples, não desenvolvido e homogêneo, que “não chegou” a adquirir as diferenciações necessárias; esta será a abstração geneticamente inicial de determinado todo. Em segundo lugar, pode ter a forma de um objeto que em determinado grau do desenvolvimento já perde suas distinções particulares, convertendo-se em homogêneo; neste caso, suas diferenças se nivelam na real redução mútua dos tipos particulares do objeto. No exame da questão sobre a abstração substantiva no que diz respeito à ascensão do abstrato ao concreto, aquela se caracteriza como teórica em contraposição à empírica. (DAVÍDOV, 1988, p.150)

O referido autor assegura que a base desse processo é “[...] a relação objetal absolutamente real, sensório-perceptível, a “célula” desta concretude” (Ibid., p.145). A abstração está relacionada na tradução do concreto por um processo de síntese. A ascensão do abstrato ao concreto contempla contradições, apoia-se na compreensão da realidade, desvela o geral, sintetiza e expressa no conceito sua essência.

Junto à abstração substantiva ocorre a generalização substantiva. Na abstração substantiva - inicial, analisam-se as especificidades do objeto; enquanto, nas generalizações, revelam-se as características gerais. Para Davídov (1988, p.152) “fazer uma generalização substantiva significa descobrir certa sujeição à Lei, uma inter-relação necessária dos fenômenos particulares e singulares com a base geral de certa totalidade, descobrir a Lei de formação da unidade interna deste”.

O referido autor analisa que a generalização é indutiva e tem como propósito revelar a relação essencial ou universal do objeto que tem forma objetal-sensorial. Com base nesse movimento, deduzimos as particularidades do objeto, reduzindo os fenômenos a sua forma geral. Nesse processo, o conceito teórico reflete os "[...] processos de desenvolvimento, da relação entre o universal e o singular, da essência e os fenômenos; por sua forma aparece como procedimento da dedução do singular a partir do universal, como procedimento de ascensão do abstrato ao concreto (DAVÍDOV, 1988, p.152).

O conceito é resultado de um processo de reprodução no plano do pensamento de um dado objeto, evidenciando suas características gerais. Com base nos estudos de Davídov (1988, 154-155), apresentamos as principais diferenças entre abstrações, generalizações, conceitos empíricos e teóricos.

Quadro 2 - Movimento dos conhecimentos empíricos e teóricos de acordo com Davídov (1988, p.154-155).

Conhecimento empírico	**Conhecimento Teórico**
• "Elaborado no processo de comparação dos objetos e representações sobre eles, que permite separar as propriedades iguais, comuns" (ibdem, p.154-155). • "No processo de comparação ocorre a separação da propriedade formalmente geral de certo conjunto de objetos, o conhecimento desta propriedade permite relacionar objetos isolados a uma classe determinada, independentemente de eles estarem ou não vinculados entre si." (ibdem, p.154-155). • "Refletem nas representações as propriedades externas dos objetos." (ibdem, p.154-155). • "Formalmente, a propriedade geral se separa como algo pertencente à ordem das propriedades particulares e singulares dos objetos." (ibdem, p.154-155). • "O processo de concretização dos conhecimentos empíricos consiste em selecionar ilustrações, exemplos, que se encaixam na correspondente classe dos objetos." (ibdem, p.154-155). • "As palavras-termos são o meio indispensável para expressar os conhecimentos empíricos." (ibdem, p.154-155).	• "Surgem no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral que, ao mesmo tempo, serve de base genética inicial do todas as manifestações" (ibdem, p.154-155). • "O processo de análise permite descobrir a relação geneticamente inicial do sistema integral como sua base universal ou essência." (ibdem, p.154-155). • "Os teóricos, que surgem sobre a base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas "saindo" assim dos limites das representações." (ibdem, p.154-155). • "Nos conhecimentos teóricos se determina o nexo da relação universal, realmente existente, do sistema integral com suas diferentes manifestações, o elo do universal com o singular." (ibdem, p.154-155). • "A concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir de seu fundamento universal." (ibdem, p.154-155). • "Os conhecimentos teóricos se expressam, sobretudo, nos procedimentos mentais da atividade mental e posteriormente com a ajuda de diferentes meios simbólicos e semióticos, em particular as linguagens natural e artificial. " (ibdem, p.154-155).

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em Davídov (1988, p.154-155).

As acepções apresentadas são inerentes ao processo de construção do conhecimento abstrato e científico, engendrando a ascensão do abstrato ao concreto na produção do conhecimento. Tais conhecimentos estão presentes no desenvolvimento dos alunos, no âmbito escolar, propiciando a evolução das formas de pensamento e a produção de novos conhecimentos.

Avaliamos que o processo de ensino-aprendizagem da álgebra, nessa perspectiva, é resultado de um longo processo de formação de conceitos. Situação essa que pode justificar a dificuldade dos alunos do Ensino Médio de se apropriarem de determinados conceitos algébricos.

No que diz respeito ao pensamento empírico, Davidov (1988) entende esse pensamento como uma característica direta, manifesta o imediato e exterioridade do objeto expressando sua existência. Já a formação de conceito, que leva ao desenvolvimento do pensamento teórico, diz respeito a uma atividade mental, as formas de pensamento como um reflexo do objeto material reproduzem-se mentalmente o concreto, possibilitando a sua compreensão e transformação.

Tem-se, então, a necessidade do pensamento teórico como

> [...] o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como experimentação objetal sensorial peculiar. Depois, este experimento adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, aos experimentos realizados mentalmente (DAVÍDOV, 1988, p. 127).

O pensamento teórico se constitui com base na dialética entre o concreto real e o concreto pensado, em um movimento de abstração em que o particular engendra o geral, ao mesmo tempo em que o concreto pensado engenha o concreto real. “O pensamento teórico reflete o objeto no aspecto das relações internas e leis do movimento deste, cognoscíveis por meio da elaboração racional dos dados do conhecimento empírico” (KOPNIN, 1978, p.152).

O pensamento teórico utiliza a objetivação idealizada, como símbolos e signos, como parte de um sistema de abstração para explicar o objeto analisado. A modelação, de acordo com Davídov (1988, p.134), é uma forma de idealização, assim, compreendida, em conformidade com V. Shtoff: “Por modelo se compreende um sistema representado mentalmente ou realizado materialmente que, refletindo ou reproduzindo o objeto de investigação, é capaz de substituí-lo de modo que seu estudo nos dê uma nova informação sobre este objeto”[4].

> Assim o pensamento teórico se realiza em duas formas fundamentais: 1) pela análise dos dados reais e sua generalização separa-se a abstração

[4] V. Shtoff. *La modelación y la filosofía.* Moscú-Leningrado, 1966, p. 19.

> substantiva, que estabelece a essência do objeto concreto estudado e que se expressa no conceito de sua "célula"; 2) depois, pelo caminho da revelação das contradições nesta "célula" e da determinação do procedimento para sua solução prática, segue a ascensão a partir da essência abstrata e da relação universal não desmembrada, até a unidade dos aspectos diversos do todo em desenvolvimento, ao concreto (DAVÍDOV, 1988, p. 150).

De acordo com os autores, os modelos são demonstrativos e precisam evidenciar as especificidades do objeto, requerendo, assim, ações do pensamento, conhecimentos teóricos e da experiência. Ponderam que os modelos semióticos evidenciam as relações internas do objeto, resultando na elaboração de novos conhecimentos e perfazendo uma forma de abstração pautada por uma unidade entre o singular e o geral.

Bernardes (2012, p.22) analisa que o desenvolvimento do pensamento teórico "[...] é mediado em condições e circunstâncias particulares organizadas intencionalmente para que os indivíduos singulares se apropriem das características universais do gênero humano". No âmbito escolar, reforçarmos que o planejamento e a organização do conteúdo são fundamentais para o efetivo desenvolvimento do pensamento do aluno, o professor precisa saber o porquê de realizar ou não cada intervenção em sala de aula.

Concebemos que o docente, ao ter domínio do conteúdo a ser ensinado, conhecendo as formas lógico-históricas de seu desenvolvimento, terá maiores condições para elaborar atividades de ensino. Para Davídov (1988), o ensino escolar precisa promover o desenvolvimento das formas de pensamento e, para isso, é necessário organizar de modo didático os conteúdos.

O ensino pode dar vida (significado e sentido) aos conteúdos escolares e, consequentemente, desenvolver as capacidades psíquicas daquele que o aprende. O autor ressalta que o ensino e a educação são fatores indispensáveis ao desenvolvimento das capacidades infantis, visto que Vigotski postula que o ensino e a educação das crianças determinam o caráter de seu desenvolvimento psíquico.

No contexto escolar, o processo de aprendizagem corresponde às atividades que vão além da reprodução de conhecimentos e habilidades conseguintes das formas de consciência social; inclui, também, o desenvolvimento de capacidades construídas historicamente, como a reflexão, a análise e o experimento mental, aspectos fundantes da consciência e do pensamento teórico que proporcionam a formação humana (DAVÍDOV, 1988).

2.4 A formação de conceitos e os processos de ensino-aprendizagem

O conceito, de acordo com Davidov (1988), no seu processo de formação, comporta-se como uma atividade mental que reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas relações.

> O conceito atua, simultaneamente, como forma de reflexo do objeto material e como meio de sua reprodução mental, de sua estruturação, isto é, como ação mental especial. Ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo a ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência. (DAVIDOV, 1988, p. 128)

Para o referido autor o conceito integra o seu conteúdo, com seu movimento de construção e idealização. Observa que os conceitos são produtos da atividade humana, ou seja, os símbolos – que expressam o universal nos objetos - são resultados da ação do homem.

Sobre o desenvolvimento dos conceitos científicos, de outro modo, dos conceitos reais, verdadeiros, Vigotski (2001) nos permite compreender as regularidades e as realidades fundamentais no processo de formação de conceitos, provocando-nos a repensar os processos de ensino-aprendizagem.

> A tarefa geral do conhecimento consiste, como escreveu V. I. Lênin, em abarcar "... a regularidade universal da natureza em eterno desenvolvimento e movimento". Dentro do todo natural em desenvolvimento, as coisas mudam constantemente, passam a ser outras, desaparecem. Mas, cada coisa não muda e desaparece, senão para passar a ser outra, a que dentro de certa interação mais ampla das coisas aparece como a consequência indispensável da existência da coisa desaparecida, que conserva dela o positivo (nos limites de toda a natureza isto constitui a relação universal). (DAVIDOV, 1988, p. 139)

No processo de apropriação do conceito científico, Vigotski (2001) chama atenção para a cooperação entre professor e aluno, em que o adulto proporciona à criança a possibilidade de desenvolver as funções psíquicas superiores. As funções psíquicas superiores, de acordo com Vigotski e Luria (2007), compreendem um sistema geneticamente distinto e constituído de estruturas heterogêneas, em que funções se formam com base no desenvolvimento histórico social.

As funções psíquicas superiores, desde suas formas mais elementares à realidade objetiva e à atividade mediadora - pelo uso das palavras, estão atreladas à formação de conceitos, que não acontece de maneira linear. As formas de pensamentos variam nas suas diferentes fases, num movimento dialético que permite o desenvolvimento do indivíduo e a apropriação do conceito.

Com base nesse movimento, o aluno em idade escolar desenvolve a atenção e memória; a atenção voluntária e memória lógica – funções psíquicas superiores. A capacidade do aluno em tomar consciência das funções superiores intelectualiza-o – engendrando o seu desenvolvimento.

A *colaboração* com outras pessoas é a origem do desenvolvimento do indivíduo. Para Vigotski (1997, p.270)

> [...] quando aplicamos o princípio da colaboração para estabelecer a área de quase desenvolvimento, obtemos a possibilidade de investigar diretamente o fator mais determinante da maturação intelectual que culminará nos períodos da próxima e subsequente idade de seu desenvolvimento".

O ensino e a prática docente têm a característica de potencializar o desenvolvimento do aluno. O professor, ao ensinar e/ou propor uma atividade em grupo – colaborativa, abordando processos *imaturos* – aqueles que o indivíduo não tem total domínio, mas em vias da maturação, está trabalhando na *zona de desenvolvimento proximal (ZDP),* que é*:*

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VIGOTSKI, 2007, p.97).

No que tange à *colaboração,* Vigotski (2008) coloca a *mediação* como um contributo à transmissão racional e intencional da experiência e do pensamento humano. As mediações permitem a compreensão e a aproximação entre as partes que constituem uma totalidade – proporciona a maturação dos processos, sua negação ocasiona a produção de um todo fragmentado.

Depreende-se da obra de Vigotski (2001, 2008) que a *atividade mediadora* se relaciona com a função desempenhada pelo professor no âmbito escolar, no que se refere ao planejamento, à elaboração, à organização, ao desenvolvimento de uma aula, aos atributos da docência, à formação dos conceitos, aos meios de ensino, aos artefatos da cultura material e espiritual, às tecnologias, entre outros aspectos essenciais para promover o desenvolvimento do aluno.

O professor, então, apresenta-se como organizador dos elementos mediadores durante a aprendizagem do aluno, organizando o conteúdo e conduzindo o processo de ensino-aprendizagem. O docente, de modo intencional e consciente, atua na ZDP, potencializando o desenvolvimento dos alunos. Considerando que o ensino se dá de maneira conjunta com a aprendizagem, a atividade mediadora contribui para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos e a realidade objetiva tem influência nesse processo.

A comunicação tem caráter fundamental nesse contexto, e a docência requer o aprimoramento da comunicação, devendo a linguagem do professor ser clara e condizente com a realidade dos alunos, além de ser coerente com os objetivos da aula, para, assim, efetivar-se o processo de ensino-aprendizagem.

Ainda, em relação à comunicação, que é necessária à mediação, ela precisa ter significado, ou seja, os conhecimentos a serem transmitidos necessitam estar generalizados para serem traduzidos em símbolos. Para Vigotski (2001, 2008), a comunicação expõe a influência das experiências socioculturais de um indivíduo em sua linguagem e, por conseguinte, no pensamento humano: "*A natureza do próprio desenvolvimento se transforma*, do biológico para o sócio-histórico" (Ibid., 2008, p. 63, grifos do autor).

A investigação sobre o ensino-aprendizagem requer uma unidade de análise que expresse/contemple as *experiências socioculturais de um indivíduo.* Os alunos e os professores, ao adentrarem em uma sala de aula, como seres-humanos, estão carregados de anseios, dúvidas, expectativas, vivenciaram/vivenciam aspectos culturais de um determinado grupo, aos quais pertencem, possuindo uma concepção de mundo. Além disso, a sala de aula já se apresenta como um espaço tipificado socialmente.

As socializações permitem que crianças se apropriem de manifestações empíricas, compreendam regras e condutas. De forma gradativa, observam o concreto, analisam o material, interpreta-o logicamente para iniciar o processo de abstração.

A relação entre *atividade mediadora*, comunicação e as experiências socioculturais de um indivíduo não ocorrem, apenas, no plano biológico e cognitivo. A realidade objetiva, presente em uma sociedade, influencia a comunicação e, consequentemente, também, os processos de ensino-aprendizagem.

Desse modo, fundamentamos este estudo nas discussões referentes aos pressupostos da Teoria da Atividade de Estudo, que estabelece um conjunto de pressupostos e de ações que direcionam o processo de formação de um conceito, com base nas abstrações e generalizações. Considera que o conteúdo e suas formas influenciam no processo aprendizagem e no desenvolvimento do pensamento teórico. Ao se apropriar dos conteúdos, o aluno tende a desenvolver o pensamento teórico, promovendo a reflexão, análise e o experimento mental, afirma Davídov (1988).

Compreendemos o conceito de “atividade”, que tem origem na dialética-materialista, na descoberta de esquemas universais da atividade humana e as leis gerais do seu desenvolvimento histórico-cultural, sendo que “[...] a lógica dialética estuda e descreve as formas historicamente significativas e universais da atividade prática e mental das pessoas, formas que estão na base do desenvolvimento de toda a cultura material e espiritual da sociedade” (DAVÍDOV, 1988, p.22, tradução nossa).

“A atividade - em qualquer uma de suas formas - está incluída no próprio processo de reflexão psíquica, no próprio conteúdo desse processo, de sua gênese (LEONTIEV, 1983, p. 55)”. Esse autor afirma que a atividade pode se manifestar de diferentes formas: comunicação emocional, manipulação objetal, brincadeira, estudo, atividades socialmente úteis – por exemplo, o trabalho. Para Davidov (1979, p.171), “[...] somente dentro da atividade propriamente de estudo, os processos de assimilação intervêm como seu objeto direto e como sua tarefa”.

No tópico seguinte, discorremos sobre a atividade de estudo, discutindo sua definição, características e contribuições para o processo de ensino-aprendizagem, visto que essa teoria fundamenta o trabalho desenvolvido nesta pesquisa.

2.5 A Atividade de Estudo: fundamentos para a realização do experimento didático-formativo

A Atividade de Estudo, segundo Puentes (2019), é uma teoria que se desenvolveu por décadas na antiga ex-União Soviética. A essência do conceito de Atividade de Estudo “[...] consiste no desejo de abordar a análise da transição da atividade para seu “produto subjetivo’ – na análise de novas formações, mudanças qualitativas na psique da criança, seu desenvolvimento intelectual e moral.” (DAVIDOV, 2019, p194).

Desenvolver uma Atividade de Estudo contribui para o processo de ensino-aprendizagem que vai além da apropriação do conteúdo previsto para sua aplicabilidade, como também proporciona o desenvolvimento da personalidade do aluno e das suas funções superiores. O aluno, ao desempenhar ações autônomas na execução das tarefas de estudo, tende a engendrar mudanças internas – na sua estrutura, que gera a maturação dos processos.

Para Leontiev (1983), a estrutura geral da atividade apresenta o objeto como elemento principal, é resultado das relações sociais e relaciona-se com as necessidades, os motivos, as ações e as operações.

A *necessidade* e o *motivo* inerentes a uma Atividade de Estudo se revelam com base na relação entre teoria, prática e mediação. Considera-se que uma atividade não pode existir sem um motivo, ou seja, o processo de ensino é dificultado quando o aluno não apresenta vontade e interesse em aprender e é submetido a um ensino que tem como base, repetições e explanações sem significado, analisa Tolstoi[5] (1903).

Promover o desenvolvimento de uma Atividade de Estudo com o aluno, "significa colocá-lo em uma situação que requer uma orientação para um modo generalizado de ação, desde o ponto de vista do conteúdo de sua solução em todas as variantes particulares e concretas possíveis das condições" (DAVIDOV, 2019, p.172).

O processo ensino-aprendizagem precisa apresentar uma necessidade e um motivo, um problema desafiador para o aluno, que potencialize a capacidade de evidenciar a relação geral, utilizando-a na compreensão de problemas específicos.

Uma abordagem que envolve a problematização dos conteúdos é interessante no processo de formação de conceitos, uma vez que se não há novas exigências, não há estímulo ao intelecto e, consequente, o cognitivo não se desenvolverá em estágios mais avançados. Além disso, ao formar novos conceitos, o indivíduo se desenvolve nas dimensões sociais e culturais, para além de uma aprendizagem de, apenas, um conteúdo; contempla, também, sua formação humana. Desse modo, "[...] o novo e significativo uso da palavra e sua utilização *como um meio para a formação de conceitos* é causa psicológica imediata da transformação radical por que passa o processo intelectual no limiar da adolescência" (Ibid., 2008, p.73).

O referido autor, ao estabelecer a formação do pensamento teórico como foco da Atividade de Estudo, evidencia que são componentes principais do pensamento teórico: a reflexão, a análise e o plano interno de ação.

---

[5] TOLSTOI, L. N. *Pedagoguícheskie statí (Artículos pedagógicos). Moscú, 1903*

Para Davídov (1988), ao mesmo tempo em que os conhecimentos teóricos compõem a atividade de estudo, representam as necessidades da atividade. O referido autor analisa que a atividade humana corresponde a uma dada necessidade; e as ações correspondem aos motivos. No processo escolar, é importante que os motivos e as necessidades das atividades estejam claros, visto que elas estimulam o desenvolvimento do conhecimento teórico.

As atividades de estudo são compostas por tarefas de estudo que, conforme Davídov (1988, 171), precisam exigir dos alunos:

> 1*)* a análise do material factual a fim de descobrir nele alguma relação geral que apresente uma vinculação governada por uma Lei com as diversas manifestações deste material, ou seja, a construção da generalização e da abstração substantivas;
> **2)** a dedução, baseada na abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em algum objeto integral, ou seja, a construção de seu "núcleo" e do objeto mental concreto; e
> ***3)*** o domínio, neste processo de análise e síntese, do procedimento geral ("modo geral") de construção do objeto estudado.

De acordo com Davídov (1988), durante a tarefa escolar, os alunos precisam identificar a essência do objeto, com base na abstração visando a apropriação dos conhecimentos teóricos. As tarefas consideram a análise de situações particulares, propiciando a evidência da característica geral nas situações específicas. Precisam oferecer autonomia aos alunos, fazendo com que eles desenvolvam as ações no sentido da formação do conceito.

Um dos componentes significativos da Atividade de Estudo é o sistema de ações particulares para a solução das tarefas. Desse modo, a aprendizagem é produzida a partir da realização das seguintes ações:

Quadro 3 - Sistema de ações particulares para a solução das de acordo com Davídov (1988, p173-174).

Ação	Descrição/Operacionalização
Transformação dos dados da tarefa de aprendizagem, com a finalidade de descobrir a relação universal do objeto, que deverá ser refletida no	"[...] descobrir e distinguir uma relação completamente definida de certo objeto integral, constitui sua relação universal"(Ibdem, p.174).

Ação	Descrição/Operacionalização
correspondente conceito teórico.	
Modelação da relação universal em forma objetal, gráfica ou com letras.	“Estabelece a relação universal de um objeto integral e possibilita sua análise ulterior, o conteúdo deste modelo estabelece as características internas do objeto” (Ibdem, p.174).
Transformação do modelo com a finalidade de estudar a propriedade da relação universal que foi identificada no objeto	“Esta relação aparece no modelo e pode-se dizer, “em forma pura”. O trabalho com o modelo de aprendizagem é um processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substantiva da relação universal” (Ibdem, p.174). Além disso, nesse momento, recorre-se a dedução visando alcançar o conceito/ “núcleo” correspondente.
Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;	Dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares. Esta ação permite que as crianças concretizem a tarefa de aprendizagem inicial e a convertam na diversidade de tarefas particulares que podem ser solucionadas por um procedimento único (geral), assimilado durante a execução das ações anteriores de aprendizagem.
Controle da realização das ações anteriores	“O controle consiste em determinar a correspondência entre outras ações de aprendizagem e as condições e exigências da tarefa de aprendizagem. Permite aos alunos, ao mudar a composição operacional das ações, descobrir sua conexão com umas e outras peculiaridades dos dados da tarefa a ser resolvida e do resultado a ser alcançado. O monitoramento então assegura a plenitude na composição operacional das ações e a forma correta de sua execução” (Ibdem, p.174).
Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada.	“A ação de avaliação possibilita determinar se está assimilado, ou não, e em que medida, o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem correspondem, ou não, e em que medida, ao objetivo final” (Ibdem, p.174).

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Davídov (1988, p.176-174)

Essas ações fundamentam a construção das tarefas de estudo e o exercício de análise do experimento didático-formativo. Relacionam-se às operações que podem ser alteradas no seu processo de execução, considerando as diversas realidades concretas.

Na realização da tarefa, o professor, inicialmente, orienta seus alunos, podendo propor ações de aprendizagem coletiva de modo a contribuir com a percepção individual de cada aluno (DAVÍDOV, 1988).

A organização do conteúdo – a forma como ele vai ser ensinado, tem fundamental importância no processo do desenvolvimento da aprendizagem do aluno. Avaliamos que no processo de construção de um experimento didático-formativo uma das principais incitações refere-se à organização da atividade de estudo, ou seja, como o conteúdo vai ser ensinado.

Se, na escola, as tarefas propostas pelos docentes versarem, apenas, sobre conteúdos e exercícios que os alunos já sabem e sem organização adequada, quais novos conceitos serão formados, efetivamente, por esses alunos? É preciso que os professores desafiem seus alunos, pautando-se na organização adequada do conteúdo, promovendo motivos que incitem a necessidade de aprendizagem de novos conceitos, atuando na zona de desenvolvimento proximal.

Na organização da assimilação dos conteúdos científicos, necessita-se conhecer sua essência, ou seja, conhecer sua história. Vigotski (1934/2001) ressalta, ainda, que o desenvolvimento de um conceito não pode ocorrer com base na assimilação de algo pronto, acabado, vazio de sentido e significado. Davídov (1988) destaca a importância de conhecer e dominar o conteúdo a ser ensinado, o seu movimento lógico-histórico, uma vez que de sua essência serão “evidenciadas” para a construção das formas (modelos) para a aprendizagem.

Para Bernardes (2012, p.21), a organização do conteúdo é fundamental para modelar sua forma de ensino e ter efetivo processo de aprendizagem, considera que “[...] a partir do entendimento de que, ao criarem condições favoráveis para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos indivíduos, criam-se também condições para que os mesmos analisem criticamente a realidade concreta da qual fazemos parte”. A forma como está organizado um conteúdo e sua exposição influi na potencial aprendizagem ou não do aluno.

As ações de aprendizagem, conforme apresentado no quadro anterior, projetam o caminho para a formação do conceito. Consideram o primeiro contato com o objeto em pauta, identificando suas características gerais, enaltecendo suas semelhanças e diferenças. Seguidamente, tem-se a modelação como ação que possibilita entender o objeto para além de sua aparência, analisando suas características internas e estabelecendo relações entre suas partes.

O modelo proporciona a investigação do objeto na sua forma “pura”, com a abstração substantiva, a dedução e a generalização. A identificação do geral permite a resolução da tarefa. Essas ações precisam desenvolver no aluno a capacidade a que tal procedimento geral está relacionado na superação de diferentes tarefas particulares.

Nesse processo, o professor precisa monitorar as ações dos alunos, mediando-as com o intuito de potencializar suas aprendizagens e dirimir suas dificuldades. A avaliação configura-se como ação preponderante para o sucesso da tarefa proposta. Ela constata não apenas se o conceito foi assimilado, mas evidencia o processo como um todo, os erros e os acertos. Possibilita ao docente refletir sobre as tarefas, a forma como foi organizada, suas intervenções. Avaliação permite que o docente reveja os processos de ensino-aprendizagem e aprimore seus próximos planejamento e ações

Com a colaboração e a mediação, o aluno tende a desenvolver o pensamento teórico - promovendo a reflexão, a análise e o experimento mental, afirma Davídov (1988). O ensino desenvolvimental compreende um conjunto de ações que direcionam o processo de formação de um conceito, com base nas abstrações e generalizações. Considera que o conteúdo e suas formas influenciam no processo aprendizagem e no desenvolvimento do pensamento teórico.

O conhecimento teórico é resultante/constituído de um processo histórico de estudos, discussões, experimentos, entre outros, sua aprendizagem não pode reduzir-se à sua *"aparência"*. Assim, o ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares – objeto desta pesquisa, no âmbito do ensino desenvolvimental, precisa considerar o seu movimento lógico-histórico.

A relação entre atividade de estudo e conhecimento teórico (conteúdo), para Davídov (1988), fundamenta-se nos resultados de uma análise da história da educação em massa e na investigação da forma como se expõe o conteúdo no processo de sua assimilação por um indivíduo.

Em relação aos procedimentos de exposição e de investigação, Davidov (1983), com base em *Marx*, ressalta que a investigação antecede a exposição. Durante a investigação o professor/pesquisador apropria-se do conteúdo, analisa seu desenvolvimento e capta a sua essência; com o "domínio" do conteúdo, procede sua exposição. Na escola, o ensino dos conteúdos precisa pautar-se nessa perspectiva, afinal, como expor um conteúdo sem conhecê-lo?

Sobre a *exposição* do conhecimento científico, realiza-se pelo "[...] procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, em que se utilizam as abstrações e generalizações substantivas e os conceitos teóricos" (DAVÍDOV, 1988, p.165). O referido autor ressalta que a atividade de estudo se estrutura nessa perspectiva, em que o conhecimento teórico exposto, resultado de uma investigação, influencia o movimento do abstrato ao concreto, como uma unidade lógico-histórica, no processo de humanização do indivíduo. Contudo, como se caracteriza o procedimento do pensamento do abstrato ao concreto na Atividade de Estudo?

De acordo com Davídov (1988), esse procedimento ocorre na apropriação de um dado conhecimento e com as orientações do professor, analisa-se o conteúdo e identifica-se sua característica (relação) geral principal – *núcleo do assunto*, que, também, se manifesta nos aspectos particulares desse material. A identificação da relação geral principal pelos alunos provoca a abstração substantiva do objeto (conteúdo) em estudo. Ao estabelecer a relação geral desse conteúdo nas particularidades do mesmo gera a generalização substantiva do conteúdo estudado.

Por exemplo, no estudo de Sistemas de Equações Lineares, considera-se a resolução das equações (incógnitas) como a relação geral principal desse assunto, o aluno ao conhecer os métodos para resolver um sistema de equações está desenvolvendo sua abstração substantiva, ao identificar que a solução do sistema é também valida para cada uma das equações que compõem o sistema, instaura-se a generalização substantiva. Ou seja, para entender um sistema de equações – que é o todo, é necessário a generalização do resultado para as equações – as partes, advindo da abstração substantiva. Isso expressa a essência de um sistema, a simultaneidade da solução. A solução do sistema o é também para cada uma das equações que o compõe, se ela existir

Desse modo, vislumbramos a fluência de movimento do geral para o particular – sistema para as equações, e do particular para o geral – equações para o sistema - que tem como essência a presença de incógnitas que têm que satisfazer a determinadas condições, presentes nas equações, cuja solução deve satisfazer de modo simultâneo a todas elas.

Para clarificar os pressupostos fundamentais da Atividade de Estudo, cumpre esclarecer a compreensão sobre "assimilação', "desenvolvimento" e 'aprendizagem" nessa teoria.

De acordo com Davídov (2019, p. 196)

> A assimilação é o processo de reprodução dos modos de ação formados pelo indivíduo durante o processo histórico de transformação dos objetos e da realidade circundante, de seus tipos de relações e o processo de conversão desses padrões sociais em formas de subjetividade individual.

A reprodução da experiência socialmente desenvolvida, então, refere-se à assimilação. O referido autor, ao buscar uma correlação entre assimilação e desenvolvimento, analisa ainda que "[...] o desenvolvimento acontece por meio da assimilação (apropriação) do indivíduo da experiência histórico-social (DAVÍDOV, 2019, p.196). Ressalta, ainda, que esses processos não são independentes, no entanto, a assimilação pode não promover, necessariamente, o desenvolvimento.

Nesse contexto, Davídov (2019) relaciona a aprendizagem desenvolvimental como sendo a maneira de organizar a assimilação nas condições históricas e concretas determinadas pela sociedade. Ademais, ressalta que é na Atividade de Estudo que é desenvolvida a assimilação da experiência socialmente elaborada.

Sobre a atividade de estudo e sua estrutura, Elkonin (1961) afirma que a tarefa de estudo é sua unidade básica. Segundo esse autor, a tarefa de estudo modifica o sujeito da atividade, transformando-o e provendo o seu desenvolvimento. Analisa que essa mudança diz respeito aos novos modos de ação com os conhecimentos científicos.

Fazendo uma analogia com o ensino-aprendizagem dos conhecimentos algébricos, por exemplo, buscamos prover uma a atividade de estudo que fosse além da apropriação de técnicas e procedimentos matemáticos, mas que também gerasse a autotransformação do indivíduo no que tange às suas ações humanas. Logo, "o principal conteúdo da Atividade de Estudo é a assimilação dos modos generalizados de ação na esfera dos conceitos científicos e as mudanças qualitativas no desenvolvimento psíquico [...] (DAVÍDOV, 2019, p.199).

Neste sentido, de acordo com Davídov (2019, p. 199-200) a estrutura da Atividade de Estudo apresenta estes componentes:

> 1. Compreensão do aluno das tarefas de estudo. A Tarefa de Estudo está intimamente relacionada com a generalização substantiva (teórica). Seu propósito é levar o aluno a dominar as relações generalizadas na esfera do conhecimento a estudar, e estimulá-lo a dominar novas formas de atuação. A aceitação da tarefa de estudo, pelo, aluno, "para si mesmo" e a sua formulação autônoma está intimamente relacionada com a motivação para aprender, com a transformação da criança em sujeito da atividade.
> 2. A realização, pelo estudante, das ações de estudo – com uma organização correta do processo de aprendizagem, que se orientam pelo objetivo de revelar as relações gerais, os princípios orientadores, as ideias-chave de uma dada esfera do conhecimento, de modelar essas relações de dominar os modos de transição das relações universais para sua concretização e vice-versa, bem como os modos de transição do modelo para o objeto e vice-versa.
> 3. A realização, pelo próprio estudante, das ações de controle e avaliação.

O referido autor observa que esses aspectos ocorrem, primeiro, em uma atividade conjunta em que o aluno tem o apoio do professor ou de um colega de sala. Analisa que a formação do aluno na Atividade de Estudo necessita da orientação de um professor ou experimentador, pressupondo a elaboração e o aperfeiçoamento de cada um de seus componentes – motivacionais e operacionais, suas inter-relações e transições mútuas, entre outros, tais aspectos contribuem para os níveis de maturidade da Atividade de Estudo.

Nesta pesquisa, buscamos estabelecer um diálogo entre esses pressupostos e a realidade da aprendizagem da álgebra no Ensino Médio brasileiro. Julgamos que experimentos didático-formativos, com base nos estudos de Davídov, nos auxiliaram na revisão e na reconstrução das formas de ensino.

2.6 A Atividade de Estudo e a Idade psicológica

A "atividade de estudo" começa a transparecer nos anos escolares iniciais, quando a criança tem idade entre sete e dez anos. Na adolescência, a atividade principal é a "atividade socialmente útil", sendo que

> É necessário considerar suas particularidades (correspondente ao processo de assimilação) no contexto da substituição evolutiva das etapas principais da atividade, quer dizer, no contexto do desenvolvimento da psique do homem (nessa plano se revela o desenvolvimento da Atividade de Estudo e dos componentes do seu processo) (DAVIDOV, 1979, p.172).

Ao propor a organização de um conteúdo para os alunos do ensino médio, além de identificar e analisar o perfil dos alunos que constituem esse nível escolar, precisamos entender, também, as características de sua idade psicológica. Afinal, podemos conceber atividades de ensino iguais a públicos distintos como o do Ensino Fundamental e o do Ensino Médio? Considerando o conteúdo de sistemas lineares, presente nesses dois níveis escolares, seria conveniente organizá-los do mesmo modo para ensinar públicos com idades psicológicas distintas? Ou seja, os interesses de alunos de 12/13 e 16/17 anos são os mesmos?

Para esses questionamentos, consideramos relevante compreender a idade psicológica dos alunos do ensino médio, visando à construção de atividades de ensino coerentes com ela, atendendo seus anseios e interesses.

A psicologia da primeira juventude, de acordo com I.S. Kon (1985), no âmbito da idade escolar, considera, primeiro, que o desenvolvimento ocorre de modo diferente, com base nos meios sociais e culturais.

Transpondo tais considerações para a realidade dos jovens brasileiros, temos de nos atentar à diversidade sociocultural presente neste país. Salientamos que esta pesquisa foi construída de acordo com uma dada realidade, não podendo, necessariamente, ser generalizada em sua plenitude para qualquer público.

Nesse sentido, ressaltamos que o processo de ensino-aprendizagem diferencia-se conforme as regiões, estados, municípios, escolas e, até mesmo, as turmas, considerando que a formação dos indivíduos e seus anseios sociais são distintos, ou seja, cada grupo (turma/classe) desempenha uma função social específica.

Com base nas experiências e socializações ocorridas na escola – no ensino médio, o jovem desenvolve sua autoconsciência, que inclui as consciências da sua própria identidade, do seu próprio "eu" como princípio ativo, das próprias qualidades psíquicas e uma sistematização de autoavaliações sociomorais. Reconhece, assim, suas mudanças físicas, tem a necessidade de autoafirmação e se manifesta de acordo com seus interesses e a juventude é a etapa final de amadurecimento e formação da personalidade. (I.S. KON, 1985).

Os argumentos do referido autor nos confirma que o Ensino Médio impacta diretamente na formação da personalidade do jovem, pois, no espaço escolar, ele desenvolve a autonomia para a tomada de decisões e vivencia suas principais experiências, socializando-se nos aspectos físico, social, sexual, cognitivos e emocionais.

O jovem sente a necessidade de saber o seu valor, do que é capaz, de auto se afirmar, ao mesmo tempo, é sensível à opinião dos outros. Nesse processo, o seu "eu" se conjuga de diferentes maneiras, como "eu real – como me vejo", "o eu dinâmico – como procuro ser", "o eu ideal – como devo ser com base nos princípios morais, "o eu fantástico – como queria ser se tudo fosse possível", entre outros "eu's" (I.S. KON, 1985). Logo, as contradições é uma das características da juventude. Ao mesmo tempo em que um jovem necessita se autoafirmar, num período que ele começa a ter autonomia nas suas escolhas e formar sua personalidade, muitas vezes ele não se reconhece.

Por isso, é importante nos atentarmos à necessidade de (re)pensarmos a organização dos conteúdos escolares e as formas de ensino-aprendizagem para os jovens, considerando as dimensões sociais, emocionais, morais cognitivas, entre outras. I .S. Kon (1985) observa que o desenvolvimento da personalidade individual do jovem está diretamente relacionada ao mundo social que essa personalidade vivenciará. Ressalta que esse processo inclui fatores sociais – contexto social, nível de ensino, individuais, tipológicos – grau de introversão, e biográficos – relações com as famílias, contemporâneos, entre outros.

Nesse processo em que o jovem vivencia constantes autoanalises e constrói sua personalidade, o "coletivo" também caracteriza essa idade, afirma I. S. Kon. Os adolescentes começam a ter uma vida coletiva, sentindo-se necessidade de fazer parte de um determinado grupo – para conhecer o outro e se reconhecer.

Com o crescimento de uma vida coletiva o referido autor ressalta que os jovens sentem a necessidade de estabelecer uma amizade íntima. Encontram nos amigos interesses comuns e atividades conjuntas. Compartilham vivências e buscam a confirmação do seu "eu". Para Elkonin (1987), as relações pessoais íntimas é uma atividade especial da adolescência, assim como a atividade da comunicação, tais relações contribuem para a formação da personalidade do adolescente. No entanto, ele considera que atividade fundamental continua sendo o estudo escolar.

O estudo aprofundado dos conhecimentos escolares, na adolescência, modifica as operações intelectuais dos jovens, exigindo-lhes à compreensão dos conceitos com base nas suas características gerais. Na adolescência, desenvolvem-se as formas de pensamento, do concreto ao abstrato, reestruturando as representações dos adolescentes (BOZHOVICH ,1976).

Essa mudança na organização escolar influencia no comportamento dos alunos que precisam, então, organizar suas atividades, saber controlar-se, ter mais responsabilidade sobre seus atos, resolver com independência situações do seu cotidiano, ter opinião própria, entre outros (BOZHOVICH ,1976).

A idade psicológica dos alunos do Ensino Médio é marcada por um momento de mudanças e transformações, diretamente influenciado pelo contexto social de cada jovem. Na adolescência, forma-se a personalidade, tendo como base as relações sociais. O jovem tem a necessidade de se comunicar, exercer trabalhos colaborativos e pertencer a um grupo - para se autoavaliar e reconhecer. Começa a ter autonomia para tomar decisões e a ser responsabilizado por aquilo que faz. É exigido a se preparar para o mercado de trabalho e/ou escolher sua futura profissão.

Sabemos que o Ensino Médio é constituído de diferentes professores e alunos com uma ampla diversidade e pluralidade cultural, e os conteúdos escolares apresentam-se de forma abstrata, o que requer a assimilação com base nas características gerais dos objetos, e não, apenas, em fatos concretos.

Com base nessas afirmações, temos o desafio de promover um processo de ensino-aprendizagem que contribuía para a formação da personalidade desses jovens que vivenciam um contexto de mudanças, incertezas e de busca por autoafirmação.

2.7. Experimento didático-formativo: uma perspectiva para a abordagem metodológica

O conceito Atividade de Estudo utiliza como método principal o experimento formativo, o mais adequado na psicologia do desenvolvimento e na pedagogia, afirma Davídov (1981/2019). De acordo com esse autor, esse método foi utilizado em programas escolares experimentais, na ex-União Soviética, na segunda metade do século passado. Suas raízes estão no método genético-experimental de Vigotski, utilizado para o estudo do desenvolvimento psíquico. (LONGAREZI, 2019).

Ressaltamos que esta pesquisa baseia-se em pressupostos do método de aprendizagem experimental, que visa promover o desenvolvimento do indivíduo, considerando que "[...] a aprendizagem experimental é organizada não como uma adaptação ao nível já existente, mas como utilização daqueles meios que formam ativamente nelas um novo nível desenvolvimento, indispensável para assimilação integral do conteúdo introduzido" (DAVÍDOV, 2019, p.201).

Na construção de um sistema experimental de ensino, Aquino (2013) ressalta o embasamento nos estudos de I. Pávlov (1849-1936) que argumenta que "o sistema dos processos internos é condicionado por certo sistema de ações externas" (*Ibid*.); e de L. Vigotski "somente no sistema o conceito pode adquirir qualidade de consciente e arbitrário. O consciente e o sistemático são sinônimos em plena medida com referência aos conceitos" (AQUINO, 2013, p. 3, a*pud*. ZANKOV, 1984). Tais fundamentos são pressupostos para o experimento didático que contribui para o processo de aprendizagem e desenvolvimento dos sujeitos nele envolvido.

Esse método traz como contribuições, também, para o tratamento do conteúdo a ser ensinado na sua forma integral, opondo-se a fragmento dos conhecimentos, o que possibilita identificar a influência da aprendizagem desses conhecimentos sobre o desenvolvimento. Outra contribuição, de acordo com Davídov (2019/1979), refere-se à possibilidade de analisar características integrais do desenvolvimento psíquico.

O modelo metodológico do experimento formativo, desenvolvido por Davídov e seus colaboradores, tinha um formato longitudinal, o que implica longos períodos de estudo, envolvendo a preparação, o teste e o redesenho. Assim, muitos pesquisadores desenvolvem microciclos do experimento, o que também era utilizado por Davídov, quando realizava estudos que se limitavam à formação de conceitos particulares. (LONGAREZI, 2019).

Nesta pesquisa, adotamos o experimento como *didático-formativo* por entender que se constitui como uma unidade dialética entre "experimento didático" e "experimento formativo", visando à formação de um conceito particular, o de "sistema de equações", desenvolvido num tempo menor, e, de acordo com as condições de realização do estudo, poderíamos dizer um microciclo de experimento.

O experimento de ensino – o didático, é o meio pelo qual se realiza o processo formativo – "o experimento formativo", que envolve o planejamento e a execução das atividades, uma intervenção pedagógica intencional que visa promover o desenvolvimento mental dos alunos. Além disso, esse processo é mediado e avaliado por professores e pesquisadores, com o intuito de estabelecer resultados significativos para o desenvolvimento dos processos de ensino-aprendizagem nas dimensões individuais e coletivas (LIBÂNEO, 2007; AQUINO, 2013).

O experimento de ensino (didático) apresenta relação dialética com o formativo, complementam-se e constituem uma unidade, didático-formativo, uma vez que o ensino planejado e estruturado didaticamente contribui para a formação e o desenvolvimento do aluno. Desse modo, uma análise fragmentada apenas sobre a dimensão didática ou formativa do experimento se caracterizaria como incipiente, visto que tais processos se entremeiam.

O experimento formativo, de acordo com Libâneo (2007), é decorrente dos estudos de Vigotski que analisa o processo de evolução do objeto, considerando modelos que envolvem os sujeitos, os meios ou condições, e a interação entre os envolvidos. Entendemos o "formativo" como um conjunto de atividades e interações presentes em uma sala de aula e que interferem os processos de pensamento dos alunos, modificando-os (LIBÂNEO, 2007). O experimento formativo, em conjunto com o didático, visa propiciar condições para analisar o ensino-aprendizagem, evidenciando os fatores intervenientes nesse processo.

A formação ainda pode ser compreendida como um processo e como um resultado do desenvolvimento integral de um indivíduo, abrangendo, assim, dimensões: cognitiva, mental, física, ética, moral, afetiva e volitiva, afirma Aquino (2013). Segundo o autor, a aprendizagem contribui para a formação do indivíduo de modo que ele se desenvolva no sentido de entender/resolver problemas inerentes à prática social e individual. A formação integral de um indivíduo se materializa a partir da unidade ensino-aprendizagem-desenvolvimento.

O experimento didático-formativo tem fundamentos na dialética-materialista e contempla/evidencia o princípio sobre a compreensão da essência do objeto e todas as dimensões que a constituem, seus vínculos e mediações (AQUINO, 2013; ZANKOV, 1984). De acordo com Aquino (2013), esses fundamentos proporcionam o entendimento da lógica objetiva relacionada à ordem, à relação causal, necessária e estável presente nos processos de ensino-aprendizagem-desenvolvimento.

A organização do sistema didático para o ensino de conteúdos de sistema de equações lineares no Ensino Médio – objeto desta - foi elaborada tendo como referência estudos sobre experimento didático- formativo, baseando-se em obras de Davídov (2019), Libâneo (2007), Freitas (2010), Moura e Cedro (2010), Aquino (2013), entre outros autores.

O experimento didático-formativo[6], proposto nesta pesquisa, trata de modo específico o ensino de Sistemas de Equações Lineares, porém busca ultrapassar a dimensão conteudista, considerando também os contextos e as condições em que ocorre o processo de ensino-aprendizagem-desenvolvimento. Envolve o planejamento e a organização do conteúdo, o conhecimento logico-histórico do conteúdo e suas formas de ensino, os meandros da sala de aula, os meios e os recursos, a avaliação, e outros aspectos.

No momento da intervenção, uma situação é analisada com a supervisão do pesquisador, de modo que o mesmo tenha condições de estabelecer relações entre ensino-aprendizagem-desenvolvimento inerentes ao objetivo do experimento (LIBANÊO, 2007). Examina-se não apenas o resultado final, mas, também, os meios em que ele ocorreu, discutindo acertos, erros, ações significativas, operações sem sucesso, de modo a contribuir integralmente com pesquisas correlatas.

Longarezi (2019, p. 200), citando Pidkasisti, enumera alguns indicadores da eficácia do ensino-aprendizagem[7] nos experimentos formativos:

> [...] a quantidade, a profundidade interpretativa e a capacidade de operar com os conhecimentos por parte dos alunos; o grau de desenvolvimento e de independência da atividade intelectual; grau de domínio dos métodos racionais de ações mentais (análise, síntese e generalização) e as habilidades de fazer comparações, distinguindo o principal do secundário e extraindo as correlações fundamentais dos fenômenos, bem como o grau de domínio das ações voltadas à elaboração do objetivos e do programa da atividade.

No primeiro momento, o diagnóstico contemplou uma revisão da literatura, análise de documentos/ diretrizes que regulamentam, orientam e avaliam a aprendizagem no ensino

---

[6] Nesta pesquisa, denominamos o processo de elaboração, aplicação e análise/avaliação das atividades de ensino-aprendizagem e seus resultados como experimento *didático-formativo*. Essa denominação pode se apresentar de modo diferente, conforme as concepções de cada pesquisador.

[7] Longarezi utiliza em seu texto a palavra obutchénie, por não encontrar na língua portuguesa uma palavra que a traduza em seu sentido conceitual.

médio, observações dos espaços escolares e da sala de aula – no ato de ensino de Sistemas de Equações Lineares. Para os alunos participantes do experimento, propusemos, ainda, um questionário para caracterização dos participantes.

No processo de elaboração das tarefas de aprendizagem, com base no conceito a ser ensinado, direcionamos o pensamento dos alunos para que compreendessem as características gerais do objeto. Consideramos o movimento lógico-histórico do conteúdo escolar estudado e utilizamos situações concretas, com o objetivo de apresentar o conhecimento como algo significativo para o aluno, propiciando a busca das relações gerais.

Os professores da escola participante do experimento analisaram as tarefas que compuseram esse instrumento, sugerindo modificações, exemplos, entre outros. Descreveremos tais ponderações no capítulo de análise.

Utilizamos, principalmente, a observação como instrumento de coleta de dados. A filmagem, gravação de áudios, anotações contribuíram para o registro dos dados e, posteriormente, suas análises; as produções dos alunos foram objeto de análise. Ao final do experimento, o pesquisador, ainda, recorreu a um questionário e/ou avaliação escrita de modo complementar à avaliação sobre a efetividade do experimento.

Após o desenvolvimento e a organização dos dados, realizamos a análise do material. De acordo com Aquino (2013), as análises apoiam-se em um conjunto de categorias preestabelecidas e nas evidências identificadas durante o experimento – falas, comportamentos, hábitos, entre outros. O referido autor ressalta a importância de evidenciar nas análises as relações essenciais, que nem sempre são aquelas que estão aparentes.

Os fundamentos estudados neste tópico, ao mesmo tempo que sustentam um método de pesquisa, não podem se fragmentar-se dos demais. Assim, no capítulo a seguir, retomaremos bases teóricas e conceitos para tratar aspectos lógicos e históricos do objeto matemático – sistema de equações lineares.

3 – O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DOS CONTEÚDOS ALGÉBRICOS: EM ANÁLISE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES, EQUAÇÕES E COMPARAÇÕES

Neste capítulo apresentamos discussões sobre os conhecimentos específicos da álgebra e do seu ensino, fundamentais para a elaboração de um experimento didático-formativo sobre os Sistemas de Equações Lineares. Ao investigar a história e discutir sobre a essência desses conhecimentos - inerentes ao sistema de equações lineares, revelou-se a necessidade de se aprofundar nas discussões sobre: Sistemas de Equações Lineares, equações e comparações.

3.1 O movimento lógico-histórico na construção do conhecimento

Formar um conceito, de acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014, p.95), significa "reproduzir mentalmente seu conteúdo, bem como, compreender sua essência". Assim, a formação de conceito deve articular-se com o movimento lógico-histórico, pois sua apropriação ultrapassa a assimilação de uma definição, priorizando a essência do conteúdo a ser aprendido.

O lógico-histórico é reconhecido como uma unidade dialética, embora cada um tenha as suas especificidades. Kopnin (1978, p. 183) esclarece a respeito do lógico e do histórico:

> Por histórico subtende-se o *processo de mudança* do objeto, as etapas se seu surgimento e desenvolvimento. *O histórico atua como objeto do pensamento,* o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico do real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. *O lógico é o meio* através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento do sistema de abstrações (grifos nossos).

No desenvolvimento do pensamento, o histórico antecede o lógico, pois é seu objeto, aquilo que nos é dado a conhecer, enquanto o lógico é o meio como o pensamento opera com o histórico por meio das abstrações, para chegar à essência do objeto. Esse processo é dialético, nas diversas aproximações entre o pensamento e o objeto. Ambos têm presença na transformação contínua da realidade, por meio do trabalho físico e intelectual, durante a trajetória de vida dos indivíduos, e pressupõe o entendimento da:

> [...] relação existente entre a mutabilidade e a imutabilidade das coisas; a relatividade existente entre o pensamento humano e a realidade da vida, bem como compreender que tanto o lógico como o histórico da vida estão inseridos na Lei universal, que é o movimento (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p.86).

De acordo com os referidos autores, o lógico-histórico concebe que o conhecimento é constituído pelo conflito entre o passado, presente e futuro, sendo sua totalidade o movimento da realidade objetiva iminente. O ensino-aprendizagem, fundamentado no movimento lógico-histórico, possibilita aos estudantes a apropriação dos conhecimentos nas suas formas mais elaboradas, para além do seu valor utilitário e tecnicista – promove o desenvolvimento do pensamento teórico. A aquisição dos conhecimentos, nessa perspectiva, considera a interiorização de diferentes saberes, visando à transformação da sociedade e a formação humana.

Estudamos o movimento do conhecimento algébrico, notadamente, do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, bem como suas formas de ensino-aprendizagem, com o propósito de apropriar-nos da essência desse conhecimento e propor um sistema didático-formativo.

Discutimos, então, sobre o histórico e o lógico – entendendo-os como uma unidade denotada por lógico-histórico ou lógico-histórica, e, também, ora por lógico, ora por histórico; contudo, expostos de modo dialético. Tais aspectos estão articulados com as formas do pensamento que buscam entender a verdade objetiva, apresentando fundamentos da lógica dialética, aponta Kopnin (1978).

Nesse processo, o lógico e o histórico se entremeiam, de forma dialética, em que a apropriação da realidade objetiva, pelo pensamento, ultrapassa as descrições do concreto. O lógico se traduz nas formas com que esse pensamento é executado, sendo reflexo do histórico em forma teórica (KOPNIN, 1978). Para Davidov (1988), a figura lógica tem sua origem na atividade real, na prática-sensorial do homem e, a partir disso, pode-se compreender, cientificamente, o pensamento verbal como forma derivada da prática.

Na análise de um objeto, a sua essência é revelada com base na articulação dos conhecimentos sobre seu desenvolvimento e suas abstrações; interpretando sua história, reproduzida nas formas de pensamento, entendendo-a como fenômeno social. “A reprodução da *essência* desse ou daquele fenômeno no pensamento constitui ao mesmo tempo a *descoberta da história* desse fenômeno, que a teoria de qualquer objeto não pode deixar de ser também a sua história” (KOPNIN, 1978, p.185).

Supracitado autor enfatiza que o movimento das formas de pensamento do simples ao complexo reflete as mudanças do objeto. Logo

> O lógico atua como meio de conhecimento do histórico, fornece o princípio para o estudo multilateral deste. Quando se toma por base a explanação da história do objeto o conhecimento da essência, tornam-se então compreensíveis e explicáveis todas as demandas históricas, causalidades e desvios, que, sem obscurecerem a necessidade, encontram seu lugar na manifestação e complementação desta. A história do objeto se manifesta viva, vigorosa no pensamento (KOPNIN, 1978, p.185-186).

Para Kopnin (1978), o estudo da história do desenvolvimento de um objeto possibilita a compreensão profunda de sua essência, além disso, "[...] enriquece a teoria, corrigindo-a, complementando-a e desenvolvendo-a" (KOPNIN, 1978, p.186). Julgamos que para o processo de ensino-aprendizagem, o estudo da história do conteúdo a ser ensinado pode também, trazer contribuições ao conhecimento teórico e, consequentemente, às suas formas de ensino.

Nesse sentido, o lógico-histórico corrobora ao desenvolvimento do conhecimento, na análise de suas categorias, de sua estrutura interna, manifestando-se, em sua unidade, como "[...] premissa metodológica indispensável na solução dos problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história e seu desenvolvimento" (KOPNIN, 1978, p.186). Assim, segundo o autor a unidade lógico-histórico favorece a construção da ciência, principalmente, no que tange a sua estrutura interna.

Para revelar a essência do objeto precisamos reproduzir o processo histórico real do seu desenvolvimento. Assim, o caminho para a evidenciarmos sobre sistema de equações lineares, por exemplo, pressupõe o conhecimento de sua história e do seu desenvolvimento – lógico. (KOPNIN, 1978).

Com base na definição geral de sistemas de equações, precisamos identificar conhecimentos elementares sobre esse conceito, pois, segundo a dialética, a busca da essência inicia-se pelo "[...] mais simples, massiforme, mais frequentemente encontrado na forma desenvolvida do objeto, sendo, ademais, um simples que contenha na sua forma embrionária toda a riqueza e os traços característicos do complexo, desenvolvido" (KOPNIN, 1978, p.195).

Entendemos que o estudo de sistemas lineares versa no âmago da equação linear e, para sua interiorização, necessita-se um movimento lógico-histórico dos conceitos algébricos e seus nexos – internos e externos. Conhecer a história do conteúdo de equações e o seu movimento lógico – bem como sua essência é fundamental para pensarmos as formas de ensino, avaliar os conceitos e desenvolver o pensamento teórico dos alunos. Sabendo-se que isso é processo, é movimento, que envolve idas e vindas, além de múltiplas aproximações do objeto.

Assim, discutiremos nos tópicos a seguir sobre o movimento lógico-histórico da álgebra, seguidamente, das especificidades do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares visando evidenciar sua essência.

3.2 A álgebra e seu movimento lógico-histórico: situando o objeto analisado

Começamos este tópico com a questão: *o que é álgebra?* Para além dessa questão, refletimos: qual o *movimento lógico-histórico da álgebra?*

Sousa, Panossian e Cedro (2014) ressaltam que, atualmente, diferentes livros escolares – didáticos da educação básica, respondem sobre qual seria o significado de álgebra; no entanto, tal resposta não é algo simples. Roque (2012) analisa que quando se "fala em álgebra", atualmente, pressupõe-se uma subdisciplina da Matemática que aborda equações e símbolos. Porém, essa concepção se diferencia da maneira que esse conhecimento se produziu/produz na história da Matemática.

No que tange ao movimento histórico da álgebra, de acordo com Radford (2011), verificou-se que o pensamento algébrico foi desencadeado a partir do raciocínio proporcional necessário à resolução de problemas práticos e "não práticos".

O autor analisa que a função do simbolismo algébrico precisa considerar o seu significado social e cultural. Observou-se que o raciocínio proporcional mesopotâmico – desenvolvido com base nas necessidades oriundas da expansão das cidades e sua organização (comércio, construção, etc) e em problemas que não se relacionavam com atividades práticas, tinha como forma de resolução, os métodos da *Falsa Posição*.

> Estes métodos são baseados na ideia de que se pode supor alguns valores falsos para as quantidades buscadas e, então, ajustá-los através de um 'fator de ajuste proporcional', que permite modificar – de um modo proporcional – os valores falsos, a fim de transformá-los em verdadeiros (RADFORD, 2011, p.120)

Para Radford (2011, p. 123), esse método sugere pensarmos sobre a reconstrução histórica da transição da aritmética para a álgebra na Mesopotâmia. No método da Falsa

Posição o número *um* se refere à representação de uma incógnita, no entanto, isso não era explícito pois escribas não tinham um símbolo para representá-la. Assim, “[...] a *noção algébrica de incógnita* parece ter sido imaginada como se fosse uma *metáfora* de ‘falsas quantidades’ utilizadas no antigo método da falsa posição”. Essa análise sugere que o pensamento algébrico já estava presente nesse período.

Nessa região Mesopotâmica, os povos babilônicos – cerca de 2.300 a.C., registrando em tabletes, desenvolveram, então, uma geometria de caráter algébrico, de acordo com Ribeiro (2007, p.51), “[...] resolviam equações lineares e quadráticas com duas incógnitas, tanto pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, como pelo método de completar quadrados”.

De acordo com Roque (2012, p.49), os problemas resolvidos pelos babilônios correspondem aos problemas que tratamos, no presente, como equação. Para a autora, é possível identificar em tais resoluções uma característica geral que, na álgebra atual, corresponde à constatação de “[...] um tipo de generalidade nos algoritmos usados na solução. Atualmente, resolvemos dois problemas de mesma natureza por meio de regras gerais que podem ser especificadas para os exemplos particulares, os quais são vistos como “casos” de um problema genérico”. Eles desenvolveram um certo tipo de generalidade, em que resolviam tais problemas “[...]pelo método de interpolação, incorporando-se sub-algoritmos dados por certos exemplos previamente resolvidos*”.* Ao analisarem um problema, buscavam reduzi-lo a um dos exemplos base – dos quais já conheciam o método de resolução.

Nesse contexto, Roque (2012, p.55) analisa:

> Se definíssemos álgebra como um conjunto de procedimentos que devem ser aplicados a entidades Matemáticas abstratas, poderíamos até concluir que os babilônios realizavam uma álgebra de comprimentos, larguras e áreas. Mas, nesse caso, deveríamos ter o cuidado de definir a álgebra dos babilônios de um modo particular, e não por extensão do nosso conceito moderno de álgebra.

Já no Egito, os papiros de Rhind e de Moscou continham 110 problemas que abordavam métodos de multiplicação, divisão, o uso das frações, o método da falsa posição, a resolução de problemas práticos, entre outros. Tais problemas se apresentavam de maneira simples - equações lineares com uma incógnita, representada por *hau* ou *aha*. O método mais utilizado para a resolução dos problemas era o da falsa posição - “método das tentativas”. Além disso, destaca-se nas resoluções instruções diretivas – como “faça isto”, sem uma descrição e/ou demonstração lógica do processo de construção do resultado. (RIBEIRO, 2007).

Cabe destacar que no Egito, o avanço da Matemática relacionava-se com as necessidades administrativas – por exemplo, quantificação de dados, bens, empregados, sistema de medidas, coleta e a distribuição dos insumos (ROQUE, 2012). Contudo, a referida autora ressalta que mesmo tendo a Matemática e, principalmente, o conceito de números impulsionado por necessidades concretas, implicava-se um tipo de abstração.

> Quando dizemos “abstrato” é necessário tornar preciso o significado desse termo, pois a dicotomia entre concreto e abstrato, evocada frequentemente em relação à ideia de número, dificulta a compreensão do que está em jogo. Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato. A Matemática antiga não era puramente empírica nem envolvia somente problemas práticos. Ela evoluiu pelo aprimoramento de suas técnicas, que permitem ou não que certos problemas sejam expressos. Afinal, uma sociedade só se põe as questões que ela tem meios para resolver, ou ao menos enunciar. As técnicas, no entanto, estão intimamente relacionadas ao desenvolvimento da Matemática e não podem ser consideradas nem concretas nem abstratas. (ROQUE, 2012, p. 27).

Na perspectiva dialética, concordamos com a autora. Mesmo numa fase rudimentar do desenvolvimento humano, ao exercer o ato de pensar, a dicotomia concreto-abstrato não faz sentido. A história da Matemática não é única e não há motivos para se ter a ideia de um conhecimento pronto e acabado. Os conceitos precisam estar situados historicamente, no seu contexto de produção, a partir das necessidades humanas em cada época. Eles se modificam nas sucessivas aproximações do objeto.

De acordo com a autora, é preciso desmitificar algumas formas de fazer a leitura histórica da Matemática. A Matemática antiga, a mesopotâmica e a egípcia são, muitas vezes, tratadas com o olhar da tradição ocidental, numa visão linear, como se fosse uma única Matemática, que se transformou de concreta para abstrata.

Traços da cultura oriental se faziam presentes na Grécia, sobretudo, referentes às formas de cultivo, desenvolvimento de tecnologias e atividades administrativas. Com o surgimento da cidade grega - *a polis,* desenvolveu-se a economia, a política e a cultura e, assim, contribuíram para desenvolvimento da Matemática, o que evidencia o porquê das definições, demonstrações e resultados (ROQUE, 2012; RIBEIRO, 2007).

Na Grécia, de acordo com Roque (2012, p.151), é possível identificar uma suposta “álgebra geométrica”, com base nos enunciados dos *Elementos* de Euclides, visto que: “Seus problemas e teoremas têm um caráter essencialmente geométrico e devem ser demonstrados para as figuras empregadas consideradas do modo mais geral possível, ou seja, sem associar suas dimensões a medidas precisas”. A autora, apoiada em matemáticos e historiadores, como H. Zeuthen e B.L. van der Waerden, considera que as proposições do Livro II dos Elementos “seriam, na verdade, propriedades algébricas enunciadas sob uma roupagem geométrica”.

Entre 250 a 350 d.C., Diofanto de Alexandria elaborou a obra *Arithmética*, contribuindo para o desenvolvimento da álgebra, notadamente sobre a simbologia. Esse matemático trabalhava com problemas que consistiam na identificação de soluções racionais, que ficaram conhecidos como problemas diofantinos.

Desse contexto, surgiram as equações diofantinas, atualmente expressadas como: $ax + by = c$ onde a, b, c são conhecidos e x, y são desconhecidos. A obra de Diofanto contribuiu para o desenvolvimento de técnicas de natureza algébrica tais como: transformações de expressões, substituição, eliminação, etc., mesmo que implícitas (RIBEIRO, 2007).

De acordo com Roque (2012), os trabalhos desenvolvidos pelos gregos Euclides, Arquimedes, Apolônio, Diofanto e Ptolomeu, foram fundamentais para a Matemática árabe, a partir das traduções dessas obras. Para os árabes, a Matemática também se relacionava com problemas do cotidiano – comércio, arquitetura, astronomia, geografia, apresentando, ainda relação com um trabalho teórico. Já os povos Hindu abordavam a Matemática da maneira intuitiva, utilizam os métodos da falsa posição ou de inversão (RIBEIRO, 2007).

Para Roque (2012, p. 196), Al-Khwarizmi, no século IX, foi o matemático árabe que mais participou do desenvolvimento da álgebra. A autora analisa que o estudo sistemático dos métodos para resolver equações teve como principal influência esse matemático. Dessa maneira, possibilitou aprimorar o conhecimento desenvolvido pelos gregos: “Além da teoria das equações, eles criaram um cálculo algébrico sobre expressões polinomiais e estenderam as operações aritméticas a essas expressões, bem como a quantidade que os antigos não consideravam números, caso dos irracionais”.

Desse contexto, cabe destacar a presença do termo “álgebra em um livro árabe:

> *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarizmi. A palavra *al-jabr*, ou “álgebra”, em árabe, era utilizada para designar “restauração”, uma das operações usadas na resolução de equações. Já a *al-muqabala* queria dizer algo como “balanceamento”.

> Trata-se, de fato, de duas etapas do método para resolver equações (ROQUE, 2012, p. 196).

De acordo com Baumgart (1992, p.1), a palavra álgebra foi retirada de uma obra em que a tradução literal do seu título é “ciência da restauração (ou reunião) e redução, mas matematicamente seria melhor “ciência da transposição e do cancelamento”. Ele considera que, talvez, a melhor tradução seria a ciência das equações.

Roque (2012) observa que a palavra “álgebra” e a linguagem algébrica se associam com o processo de abstração. Assim, independente da grandeza, objeto de conhecimento, o modo de generalização e a maneira de trabalhar com as incógnitas são os mesmos. Isso mostra que os processos de desenvolvimento do pensamento teórico vão ganhando em generalidade.

Na Europa, Luca Pacioli (1447-1517) elaborou uma das provinciais obras sobre a Álgebra denominada “*A Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita".* Utilizavam-se as letras *p* (piu) e *m* (meno) para indicar a adição e a subtração e as abreviaturas *co*, *ce* e *al* para *cosa* (incógnita), *censo* (quadrado da incógnita) e *aequalis* (igualdade), respectivamente. Pacioli acreditava ainda que equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente; porém, no século XVI matemáticos italianos descobriram a solução algébrica das equações cúbicas e quárticas (RIBEIRO, 2007).

Tartaglia, por volta de 1535, investigou o processo de resolução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Posteriormente resolveu a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Tais resoluções contribuíram efetivamente para o processo de resolução de equações evidenciando a generalização nesse processo (RIBEIRO, 2007).

De acordo com Ribeiro (2007), François Viète (1540-1603) – francês, foi percursor da Álgebra Simbólica, demonstrando a importância de utilizar letras para representar quantidades desconhecidas e incógnitas. De acordo com Rocha (2012), Viète afirma ter fundado a “arte analítica” – que disseminou um novo modelo que utilizava a álgebra para resolver problemas geométricos.

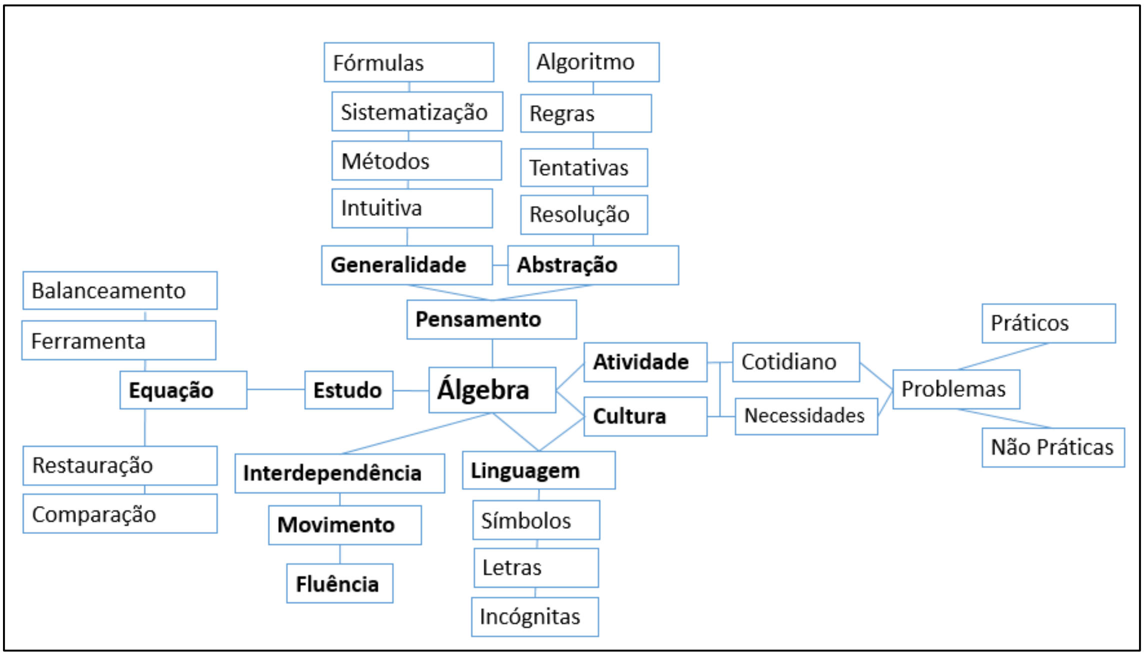
Roque (2012) observa que Viète, ao elaborar esse modo de resolução analítica manipulava as grandezas independente da sua natureza. Nesse sentido, surgiu a necessidade de utilizar símbolos que pudessem representar grandezas geométricas e numéricas. Outro francês, Descartes (1596-1650) deu continuidade ao desenvolvimento da linguagem algébrica, elaborando um método cartesiano para a resolução de equações.

A álgebra atingiu os graus mais elevados de generalização, quando passou a contar com uma linguagem adequada para isso – a linguagem simbólica. A álgebra é o estudo de uma linguagem e sua sintaxe; o estudo das regularidades que governam as relações numéricas; o estudo das quantidades que variam; uma atividade; um modo de pensamento; uma cultura; uma ferramenta; um componente curricular; uma aritmética generalizada; entre outros (SOUSA, PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

De acordo com Vigotski (2008, p.151) "os conceitos algébricos representam abstrações e generalizações de certos aspectos dos números, e não dos objetos, indicando assim uma nova tendência – um plano de pensamento novo e mais elevado". Segundo o autor, quando o estudante apropria-se dos conceitos algébricos, ele está conseguindo enxergar a aritmética numa perspectiva mais ampla, indicando que o pensamento de um nível mais elevado é pautado pelas "relações de generalidade entre os conceitos".

Ao analisarmos o movimento lógico-histórico da álgebra, não temos a pretensão de identificar o momento de seu surgimento, e sim, conforme apontam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), promover uma leitura que evidencia elementos característicos – e lógicos, do pensamento algébrico de cada cultura. Desse modo, na figura a seguir buscamos retratar com base no movimento histórico apresentado, elementos e/ou palavras, recorrentes, que tendem a caracterizar a álgebra.

Figura 1 - Elementos e/ou palavras que caracterizam a álgebra em sua história



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 22), apoiados em Katz (2007), evidenciam, com exemplos extraídos do século XVIII, que "[...] a álgebra poderia lidar tanto com a determinação de incógnitas, por meio do uso de signos e símbolos e de certa quantidade de bem definidos métodos de manipulação desses signos e símbolos, como ser considerada como uma 'aritmética generalizada'". Analisamos que, nesse movimento lógico-histórico da álgebra, evidencia-se a atividade do ser-humano, mediante as diferentes culturas e necessidades, como produtora de conhecimento. A linguagem algébrica caracterizada pelo uso de símbolos, letras e a noção *de incógnita – como uma generalização,* são elementos fundamentais para a compreensão da álgebra.

Esses elementos facilitam a compreensão das diferentes concepções de álgebra que interferem no planejamento e organização do seu ensino. Nesse sentido, Moura e Sousa (2005) afirmam que observaram uma utilização frequente de uma abordagem formalista nas salas de aula, dando ênfase na manipulação simbólica, da resolução de problemas e listas de exercícios, no uso de algoritmos entre outros.

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 83), a Educação Algébrica predominante no Brasil no século XIX e meados do século XX pode ser denominada como *linguístico-pragmática,* na qual "[...]prevalece a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo "transformismo algébrico" seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas [...]. Segundo os autores, essa abordagem caracterizava-se pelo ensino de uma sequência de tópicos – expressões algébricas, operações com expressões, equações e, por fim, resolução de problemas.

Posteriormente, a Matemática Moderna se opôs a essa concepção de Educação Algébrica, apresentando outra, denominada *fundamentalista-estrutural (*FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Os autores ressaltam que em relação à abordagem do conteúdo esperava-se que "[...] a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos que estivessem subjacentes" (ib., p. 84).

Outra concepção da Educação Algébrica os referidos autores denominaram de *fundamentalista-analógica,* que procura resgatar o valor instrumental da álgebra, principalmente para resolução de problemas, e manter seu caráter fundamentalista.

Conforme os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) tais concepções evidenciam, de modo comum, a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica – alertando que isso poderia impactar negativamente na sala de aula.

Na perspectiva de Vigotski (2008), tem-se uma maior dificuldade com a álgebra - em relação à aritmética, devido à qualidade abstrata da escrita. De acordo com o autor, ao ensinar a escrita – bem como a álgebra, tem-se pouca motivação natural por parte dos alunos, não sentem necessidade de aprender esse conhecimento e não reconhecem sua utilidade. Isso ocorre, pois, os motivos para escrever e apropriar-se dos conhecimentos algébricos são mais abstratos e mais distantes das realidades imediatas. No entanto, a aprendizagem desses conhecimentos.

> [...] influencia o desenvolvimento das funções psíquicas superiores para além dos limites dessa matéria específica; as principais funções psíquicas envolvidas no estudo de várias matérias são interdependentes – suas bases comuns são a consciência e o domínio deliberado, as contribuições principais dos alunos escolares (VIGOTSKI, 2008, p.127-128).

O ensino-aprendizagem da álgebra, com base no movimento lógico-histórico, de acordo com Moura e Sousa (2005), precisa contribuir para que professores e alunos compreendam as relações conceituais presentes no processo histórico da álgebra simbólica. Desse modo, é incoerente apresentar aos alunos conceitos prontos e acabados.

Almejamos, então, uma organização do ensino, fundamentada na Teoria da Atividade de Estudo, que possibilite ao estudante o exercício da criatividade, promovendo a humanização pelo conhecimento matemático. Considerar o movimento lógico-histórico na elaboração das tarefas de estudo possibilita o envolvimento de um conjunto de conceitos e juízos - que o constituem, e a reprodução da essência do objeto, fundamentais para a formação de um conceito.

3.3. Sistemas de Equações Lineares

Ao analisarmos o movimento histórico da álgebra, verificamos que as equações constituem um componente de estudo fundamental dessa área da Matemática. Em relação ao nosso objeto de estudo, o sistema de equações lineares, em alguns livros didáticos encontramos a seguinte definição:

> É um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Assim, o sistema é linear, se for do tipo:
>
> $$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
>
> (IEZZI; HAZZAN, 1985, p.116).

Chamamos a atenção para a definição de Sistemas de Equações Lineares, para a forma como que ela é expressa, atualmente, como resultado de um processo histórico e lógico em que se desenvolveu o conhecimento matemático – mesmo que isso não esteja explicito para o aluno, ao se deparar com essa definição, que poderá não ter qualquer significado para ele.

Essa definição formal tem uma longa trajetória histórica e lógica, que, de forma sucinta, trataremos a seguir, o que poderá contribuir para a compreensão dessa síntese teórica.

O conhecimento sobre sistema de equações lineares, juntamente com a Álgebra Linear, teve seus primeiros registros de desenvolvimento, na Babilônia, com problemas com duas equações e duas incógnitas há 4 000 anos. O avanço dessa sociedade – região explorada pela agricultura, comércio, entre outros, contribuiu, também para o aprimoramento dos modos de resolverem problemas matemáticos. Os babilônicos, utilizando tábulas de calcular, resolviam equações quadráticas, cúbicas e biquadradas (EVES, 2011).

De acordo com Santos e Zuin (2017), as resoluções dos babilônicos apresentavam uma linguagem algébrica retórica. Muitos problemas retratavam a vida cotidiana, sendo resolvidos pelos atuais chamados sistemas de duas equações e duas incógnitas – equações lineares, pelos métodos, hoje conhecidos como substituição e mudanças de variáveis. A denominada álgebra retórica foi estruturada por uma linguagem comum atrelada ao número, no entanto, observa-se a dificuldade de utilizar as palavras – sem símbolos, para representar quantidades desconhecidas (PANOSSIAN, 2008).

Os chineses, também, propiciaram significativas contribuições no que tange ao desenvolvimento de Sistemas de Equações Lineares. Cerca de 200 a.C., eles resolviam sistemas de ordem dois e três, sendo a forma de resolução utilizada, referência para o desenvolvimento do método de eliminação de Gauss. De acordo com Lima *et al*. (2006), esse método, também conhecido como método de escalonamento é elementar e consagrado pelo seu uso secular e, ao mesmo tempo, atual.

Para os autores, o escalonamento é um método extremamente eficiente para resolver o sistema linear, baseia-se no fato de que todo o sistema é *equivalente* a um sistema escalonado, sendo que:

> [...] chega-se a um sistema escalonado equivalente por meio de uma sequência de operações elementares, que são as seguintes: (1) Trocar a ordem de equações do sistema; (2) Substituir uma equação do sistema por sua soma com um múltiplo de outra equações do mesmo sistema (LIMA *et al*, 2006, p.135).

Assim, ao submeter um sistema a um conjunto de operações elementares, obtém-se um sistema equivalente. O método de resolução, também, se aproximava ao processo de eliminação por adição (BOYER, 2003).

Os indianos apresentavam um método retórico para a resolução de sistemas de equações – várias equações e várias incógnitas. O método de resolução poderia ser classificado como *Eliminação* (EVES, 2004). Já na Grécia foram identificados problemas lineares geométricos em que o seu processo de resolução requeria o uso de sistemas lineares (EVES, 2004).

Como já discutido, a Matemática árabe proporcionou muitas contribuições para a álgebra. Nesse contexto, Eves (2004) pondera que nesse período foram trabalhados métodos de resolução de problemas por sistemas de equações, com diferentes incógnitas e podendo chegar à uma resolução indeterminada.

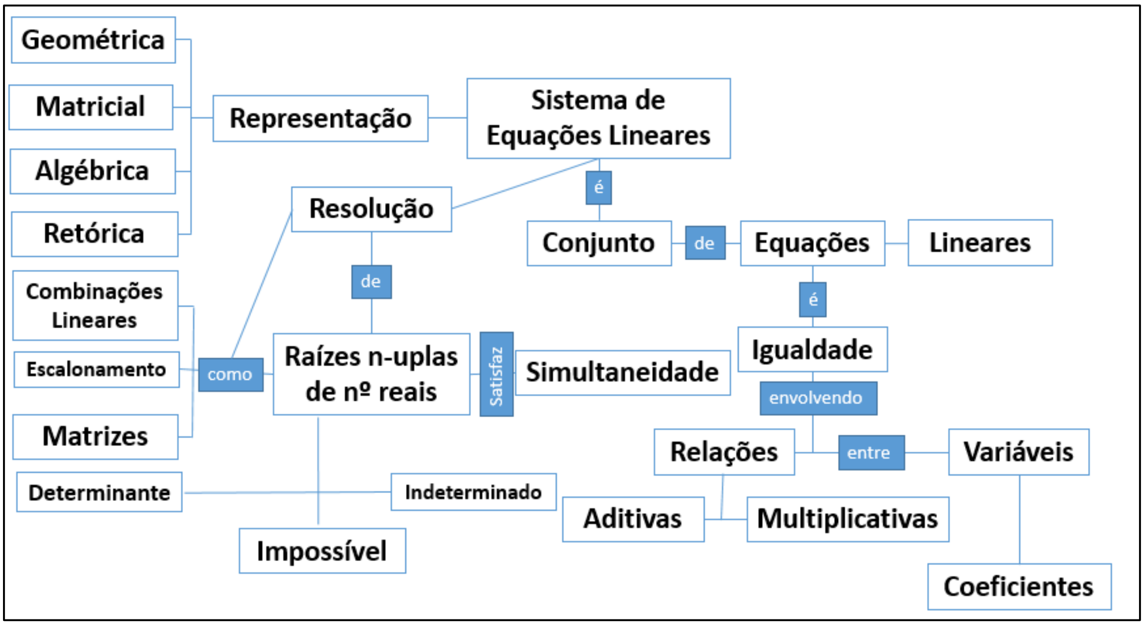
Já o estudo moderno de Sistemas de Equações Lineares, de acordo com Assis (2018), pode ter se originado com o alemão Leibniz, no período de 1693, com a noção de determinante como um contributo à resolução dos sistemas lineares. A autora observa que "o conceito de determinante não nasceu ligado ao conceito de matriz quadrada como temos hoje nos livros didáticos, isso veio posteriormente com a evolução da teoria de matrizes" (Ib. p.40). Isso nos remete a pensarmos sobre a organização do conhecimento para o processo de ensino-aprendizagem, visto que não, necessariamente, a forma mais eficiente de ensinar um conteúdo converge com sua evolução histórica.

Sobre o ensino de Sistemas de Equações Lineares na educação básica verificamos com base em diagnóstico apresentado no próximo capítulo, poucas pesquisas que avaliaram a situação da realidade do ensino desse conteúdo escolar. Além disso, na observação das aulas sobre esse conteúdo ficou evidenciado a ênfase no método de resolução.

Lima (2006) analisa que o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, caracteriza-se como um tópico de interesse prático. Essa característica endossa o proposto nos documentos curriculares, que defendem a necessidade de os conteúdos escolares apresentarem relevância para a vida cotidiana dos alunos.

A análise do movimento histórico de sistema de equações lineares e sua definição lógica, nos permitem evidenciar a relação dos elementos apresentados na figura a seguir.

Figura 2 –– Elementos e/ou palavras que caracterizam sistema de equações lineares



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

O conceito de sistema de equações lineares está intimamente relacionado com o conceito de equação, sua essência. Nos processos de ensino-aprendizagem, bem como no movimento histórico desse conhecimento, a sistematização e/ou o método de resolução de um sistema linear é evidenciado parecendo ser sua característica principal.

Entendemos que o processo de resolução de um sistema e, notadamente, o uso de algoritmos para encontrar o valor de determinada incógnita não traduz a essência do conceito de Sistemas de Equações Lineares. Para compreendermos a essência desse conhecimento precisaríamos identificar e clarificar quais são os direcionamentos e/ou propriedades que são consideradas no processo de resolução dos sistemas.

Na figura apresentada, evidenciamos que um conjunto de equações e o inter-relacionamento entre elas constituem um sistema. E o processo de resolução de um sistema, necessita considerar que o valor de cada incógnita a ser encontrada deve satisfazer, simultaneamente, as "condições" de todas as equações que constituem o sistema.

Desse modo, a apropriação do conceito de Sistemas de Equações Lineares pressupõe a assimilação do conceito de equações e tem como característica um método de resolução que permite encontrar soluções, simultâneas, de um conjunto de equações.

Logo, um sistema linear pode ter uma única solução - determinando, uma infinidade de soluções - indeterminado, ou nenhuma solução – impossível. Um sistema é classificado como impossível, quando as informações fornecidas para encontrarmos os valores das incógnitas são incompatíveis.

Determinadas situações que envolvem sistemas lineares podem, ainda, ser interpretadas graficamente/geometricamente. Por exemplo, um sistema de duas equações, tem como solução para cada uma delas as coordenadas (x,y) dos pontos de uma reta, sendo que o sistema é indeterminado, impossível ou determinado, de acordo com as retas representadas pelas equações, coincidam, sejam paralelas ou sejam concorrentes, respectivamente (LIMA et al, 2006).

Desse modo, no movimento necessário para a apropriação do conceito de Sistemas de Equações Lineares é essencial o estudo sobre equações e seu movimento lógico-histórico.

3.4 Equações

A definição de equação linear carrega consigo a acepção de conhecimentos inerentes a outros conceitos: incógnitas, equações, coeficientes, termo independente, entre outros. Para investigarmos o conceito de sistemas lineares é necessário a compreensão de diferentes conhecimentos, juízos e conceitos matemáticos. Dessa forma, analisamos a definição de equação linear, a saber:

> Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b$. Os números $a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{1n}$, todos reais, são chamados *coeficientes* e b, também real é o *termo independente* da equação (IEZZI; HAZZAN,1985, p.115).

Já Caraça (1951, p.152) define equação algébrica, conceito mais geral que o de equação linear, como sendo “[...] toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, em que *n,* número inteiro e positivo, chama-se grau da equação, *x* chama-se incógnita e aos números $a_0, a_1, ..., na,$ coeficientes da equação”. Além disso, o autor ressalta que o problema fundamental da teoria das equações é a determinação de suas raízes, entendendo-se por raiz da equação todo número α tal que $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\,\alpha + a_n = 0$. A partir disso, o autor questiona quantas raízes uma determinada equação possui e quais as formas (processo) de determiná-las. O número de raízes de uma equação está atrelado ao seu grau, assim, tem-se equações 1º, 2º, 3º e “n” graus. Nesta pesquisa, direciona-se o estudo para as equações de 1ºgrau, uma vez que elas compõem os Sistemas de Equações Lineares.

Neste sentido, Caraça (1951, p.154) entende que uma equação algébrica de grau um é da seguinte forma: $ax + b = 0,\ a \neq 0$; podendo ser resolvida pela propriedade de *unicidade*, da adição, em que $a = a',\ b = b',\ \rightarrow a + b = a' + b'$. Assim, "resulta que se somarmos a ambos os membros da igualdade o número –b, ela não se altera; a equação dada equivale, portanto, a esta ax + b – b = 0 – b, ou seja, aplicando propriedade bem conhecida, a equação se transforma em ax = -b". Posteriormente, utiliza-se a propriedade da unicidade da multiplicação, em que $a = a',\ b = b',\ \rightarrow a\ .\ b = a'\ .\ b'$, resultando, sem alterar a igualdade, que, ao multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$, tem-se $a\,.\frac{1}{a}\ x = -b\,.\frac{1}{a}$, sendo $a\ .\ \frac{1}{a} = 1$, conclui-se que $x = -\frac{b}{a}$, raiz da equação de 1º grau.

A discussão anterior precisa estar articulada com a realidade concreta, com o movimento histórico que propiciou que essa definição alcançasse tal representação geral.

Na constituição histórica de equações, foram registrados nos tabletes babilônicos um conjunto de "exercícios resolvidos" que hoje trataríamos como equações. Neles foi possível identificar a busca por um tipo de generalidade nos algoritmos usados na solução. Porém, a "generalidade dos algoritmos babilônicos é distinta, pois eles constroem uma lista de exemplos típicos, interpolando-os, em seguida, para resolver novos problemas" (ROQUE, 2012, p.48).

No Egito, o processo de resolução dos problemas visava encontrar uma quantidade desconhecida para a qual se utilizava a palavra *"aha"* - traduzida por "número" ou "quantidade". Nesse período, o método da Falsa Posição [8]contribuiu para as resoluções de problemas que atualmente seriam traduzidos por equações (ROQUE, 2012).

Na Babilônia e no Egito, de acordo com Ribeiro (2007), as equações apresentavam um caráter pragmático e de modo intuitivo – por tentativas, buscava-se igualar (ou comparar ou balancear) duas quantidades em identificar o valor da quantidade desconhecida. Nessa época os métodos de resolução não evidenciavam um processo de generalização, que pudesse ser utilizado para uma deversidade de problemas do mesmo tipo. Era direcionado para solução de problemas particulares e relacionava-se às ideias da aritmética.

---

[8] De acordo com Baumgart (1992, p.103), "[...] é um método de resolver equações atribuindo um valor à incógnita; se, fazendo a verificação as condições dadas não satisfeitas, esse valor é alterado através de uma simples proporção. Por exemplo, para resolver x + x/4= 30, assuma qualquer valor conveniente para x, digamos x = 4. Então x +x/4 = 5, em vez de 30. Como 5 deve ser multiplicado por 6 para dar o desejado 30, a resposta correta deve ser 4. 6 ou 24".

Já na Grécia, para Ribeiro (2007), a noção de equação apresentava-se de forma dedutiva e contemplava um caráter geométrico. A busca pelo resultado ainda estava relacionado com procedimentos particulares.

Os trabalhos de Al-Khwarizmi analisavam que a igualdade na equação precisaria ser "restaurada" pelo procedimento de *al-jabr*. Esse procedimento poderia ser traduzido atualmente, de acordo com Roque (2012, p. 200), que "[...]o termo subtraído no primeiro membro deve ser adicionado ao segundo membro, de forma a se obter uma igualdade com todos os termos positivos". De acordo com a referida autora, consideravam a necessidade de equilibrar os "dois lados da equação" - balanceá-los pelo procedimento de *al-muqabala*, reduzindo os dois números a um só.

O matemático hindu Brahmagupta, em 628, apresentou, também, contribuições ao desenvolvimento das equações, identificando soluções gerais das equações quadráticas. Trabalhou para evidenciar representações gerais para as incógnitas, denotando-as por *ay* (RIBEIRO, 2007). De acordo com Ribeiro (2007, p.68) os árabes e hindus contribuíram "[...]no sentido de se observar as características e propriedades definidas em uma classe de equações e não mais em equações relacionadas a situações particulares".

Na Europa, Viète (séc XVI), conforme já descrevemos, proporcionou significativas contribuições à álgebra e ao seu simbolismo, fundamentais para a representação das equações na sua forma geral. Representava por vogais uma determinada quantidade 'desconhecida'; e uma grandeza por consoante (RIBEIRO, 2007). Já Descartes, colabora "[...] utilizando a ideia de supor conhecido o que é desconhecido, continuando o desenvolvimento de seu método no que diz respeito à transformação das equações" (RIBEIRO, 2007, p.73).

De acordo com Roque (2012), na Europa do século XVI, os estudos relacionados à resolução de equações promoveram a evidencia de uma quantidade de símbolos, como

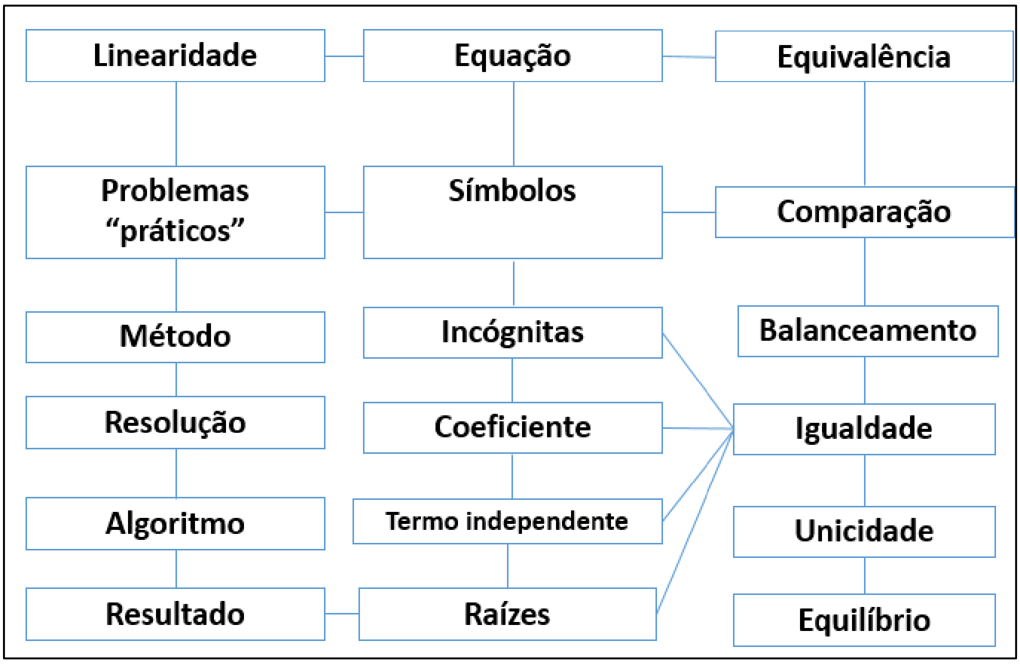
> Os símbolos de + (mais) e − (menos) já eram usados na Alemanha. O símbolo para raiz quadrada, por exemplo, foi introduzido em 1525 pelo matemático alemão Christoff Rudolff. Seu aspecto vem de uma abreviação da letra *r*, inicial de "raiz". Em 1557, o inglês Robert Recorde publicou um livro de álgebra no qual introduziu o símbolo "=", usado por nós para a igualdade: um par de retas paralelas, pois "não pode haver duas coisas mais iguais". Os símbolos para o quadrado e o cubo da quantidade desconhecida provinham de abreviações das palavras latinas (ROQUE, 2012, p. 200).

Contudo, a padronização dos símbolos matemáticos ocorreu partir do final do século XVII, com a divulgação e popularidade dos estudos de Descartes, Leibniz e Newton. Roque (2012) nota ainda que a álgebra entre os séculos XV e início do XVI se aproxima do que tinha sido desenvolvido pelos árabes.

Euler, colaborou com a álgebra e com as equações, a simbologia utilizada por ele foi estabelecida universalmente, como *f (x)* para funções, e ***e*** para base dos logaritmos naturais. Gauss, na Alemanha, cooperou com a teoria das equações com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra (RIBEIRO, 2007).

A análise do movimento lógico-histórico das equações lineares mostra como ocorre o desenvolvimento do pensamento teórico, no movimento do abstrato ao concreto, na produção de sínteses cada vez mais gerais e complexas, a partir do já produzido (o histórico) por meio do lógico. Essa análise nos permitiu evidenciar a relação/presença dos elementos apresentados na figura a seguir.

Figura 3 - Elementos e/ou palavras que caracterizam o movimento lógico-histórico das equações.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

O movimento lógico-histórico de Sistemas de Equações Lineares tem como essência as equações – ora juízo, ora conceito, que se inter-relacionam de modo que a resolução de um sistema almeja um resultado que, simultaneamente, satisfaça as "condições" de todas as equações que compõem o sistema.

Sobre o movimento lógico-histórico das equações, analisamos que os símbolos – representações gerais das quantidades, as comparações e os métodos de resolução são a essência desse conhecimento. Indicamos que a ação de desenvolver comparações, estabelecendo equivalência, balanceamento, utilizando a propriedade da unicidade, a fim de encontrar uma solução, pode ser considerada como um juízo – conceito, fundamental para assimilação do conceito de equações.

3.5 Comparações

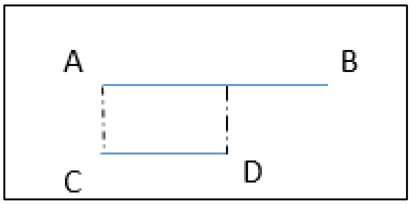
No processo de identificar a essência dos sistemas de equações, evidenciamos que desenvolver comparações é uma ação necessária a um aluno no estudo das equações. Nessa perspectiva, no campo da Matemática, situamos a ação de comparar com a *construção do campo racional.*

A construção do campo racional, de acordo com Caraça (1951), relaciona-se com as operações de medir e contar. A necessidade de medir está presente no nosso cotidiano, em situações da vida particular e do contexto profissional, do ato de fazer um café ao descobrimento de um novo planeta no universo. Contudo, o que é *medir?* Para Roque (2012), "'medir' significa, essencialmente, "comparar", precisamos, na maioria das vezes, subdividir uma das grandezas para obter uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas".

De acordo com, Caraça (1951, p.36) "Todos sabem em que consiste o **comparar** de duas grandezas da mesma espécie, dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc".

O referido autor, analisa que para comparar segmentos, conforme os da figura a seguir, tem-se que aplicar um sobre o outro, fazendo coincidir os extremos.

Figura 4 - Ilustração sobre a comparação entre segmentos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Ao realizar essa operação – comparação, constata-se que o segmento AB é *maior que* o segmento CD ou que o segmento CD é *menor que* AB. De acordo com Caraça (1951, p.39) " a ordenação do campo racional estabelece-se dando as definições de *igualdade e desigualdades".*

A ação de medir e, consequentemente, de comparar, esteve/está presente no movimento histórico da sociedade, desde dos povos babilônicos até os dias atuais do século XXI. Observamos que os babilônios e os egípcios elaboravam cálculos e demonstrações – de áreas e volumes, consistentes e necessários às cuturas locais – atividade de agricultura, comércio, monumentos, entre outros (ROQUE, 2012). Na Grécia, as medidas e comparações estavam presentes nos registros de atividades admnistrativas, no desenvolvimento de tecnologias e organização das cidades.

Nesse contexto, situamos que a ação de comparar – significado de medir, está presente no movimento e evolução histórica da mamática, relacionando-se com diversos conceitos, dentre eles, o de equações. A igualdade, o balanceamento e o equílibrio, presentes no método de resolução de uma equação, advém de uma ação de medir, ou seja, comparar.

Este estudo nos direcionou para a elaboração das tarefas de estudo do experimento didático-formativo. Assim, com base nos elementos presentes no movimento lógico-histórico de sistema de equações lineares, evidenciamos conceitos e juízos essenciais para aprimorar e ressignificar os processos de ensino-aprendizagem da álgebra.

Neste capítulo apresentamos discussões sobre os conhecimentos específicos da álgebra e do seu ensino, fundamentais para a elaboração de um experimento didático-formativo sobre os Sistemas de Equações Lineares. Ao investigar a história e discutir sobre a essência desses conhecimentos - inerentes ao sistema de equações lineares, revelou-se a necessidade de se aprofundar as discussões sobre: Sistemas de Equações Lineares, equações e comparações.

4. A ÁLGEBRA NO ENSINO MÉDIO: ENTRE O PREVISTO E O REALIZADO

Neste capítulo, apresentamos resultados de pesquisa que subsidiaram as tarefas de estudo do experimento didático-formativo. Realizamos um levantamento das produções que abordam o processo ensino-aprendizagem de sistemas lineares no Ensino Médio e produções que se fundamentam na Teoria Histórico-Cultural para o ensino de álgebra, para conhecermos e nos apropriarmos do que vem sendo desenvolvido sobre essa temática.

Ademais, analisamos documentos curriculares para verificar como se propunha/propõe a organização e o ensino da álgebra e, notadamente, dos conteúdos de Sistemas de Equações Lineares. Também investigamos itens de avaliação do conteúdo em pauta, presentes no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, com o objetivo de verificar as apropriações no campo da álgebra, indício do que se passa em nível nacional.

4.1 Pesquisas sobre o ensino de Sistema Lineares e o ensino de álgebra fundamentado na Teoria Histórico-Cultural

No que diz respeito ao estudo bibliográfico, realizamos um levantamento das produções que abordam o processo ensino-aprendizagem de sistemas lineares no Ensino Médio e produções que se fundamentam na Teoria Histórico-Cultural para o ensino de álgebra, para conhecermos e nos apropriarmos do que vem sendo desenvolvido sobre essa temática. Em seguida, fizemos um mapeamento e análise dessas produções.

De acordo com Fiorentini *et al* (2016), o mapeamento diz respeito à identificação, à localização e à descrição das pesquisas realizadas, considerando a delimitação do tempo, espaço e campo de conhecimento. Para a efetivação desse mapeamento, analisamos as produções publicadas entre os anos de 2004 e 2017 – esse período justifica-se uma vez que as produções sobre a referida temática iniciaram nos anos 2000 e o começo desta pesquisa ocorreu em 2016, consultando o Banco de Teses e Dissertações da CAPES, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (*BDTD*).

Entendemos que pesquisar sobre essa produção científica nos possibilitou evidenciar contribuições para o ensino da álgebra e lacunas nos estudos sobre a referida temática, o que aponta para a relevância da presente pesquisa. Além disso, nos permitiu situar este estudo no cenário das pesquisas com o mesmo tema.

Para tanto, buscamos os termos “ensino de sistemas lineares no ensino médio” na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD); “ensino-aprendizagem AND álgebra” e “teoria-histórico-cultural AND ensino-de-álgebra” no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Ressaltamos que esse levantamento contemplou teses e dissertações. Esses estudos têm rigor científico e deles originam-se vários artigos publicados em anais de eventos e periódicos científicos.

Analisamos os títulos e, posteriormente, os resumos dos trabalhos encontrados, a fim de verificar quais pesquisas tratam, especificamente, nas suas temáticas, do ensino de sistemas lineares/álgebra no Ensino Médio e/ou a Teoria Histórico-Cultural como fundamento para o ensino da álgebra. Identificamos 51 trabalhos que abordavam as referidas temáticas, publicados entre 2004 e 2017, cuja evolução de produção por período pode ser visualizada no Gráfico 1.

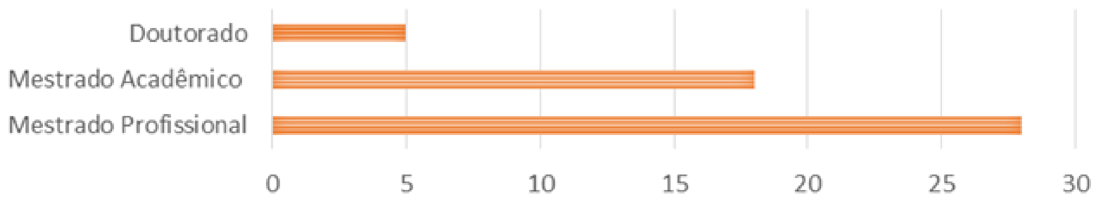
Gráfico 1 Publicações de teses e dissertações sobre a temática no período de 2004 a 2017

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa, 2019.

Observamos que, de acordo com a busca, as pesquisas que versam sobre tal temática começaram a ser realizadas a partir de 2004. Salientamos que os bancos de dissertações e teses contemplam resumos de trabalhos defendidos desde 1987 - e, no decorrer dos anos, gradativamente, a temática vem se tornando mais procurada, como aponta o Gráfico 1. Isso nos mostra que pesquisas sobre ensino da álgebra na educação básica tem se consolidado, caracterizando-se como uma temática atual, relevante e em ascensão - com o ápice de publicações entre os anos de 2012 e 2015.

Conjecturamos que o crescimento das investigações sobre o referido assunto se relaciona com a implementação dos mestrados profissionais, iniciada em 2002 com a aprovação pela Capes do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na PUC-SP e com o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), em andamento, desde de 2011. Assim, no Gráfico 2, verificamos que os estudos encontrados foram feitos, predominantemente, em mestrados profissionais, a destacar o PROFMAT com 19 trabalhos; e o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PUC-SP, com 5 dissertações.

Gráfico 2 - Nível/modalidade em que os trabalhos selecionados foram desenvolvidos



Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa, 2019.

Os mestrados profissionais despontaram discussões sobre o ensino de conteúdos escolares de Matemática na educação básica, uma vez que investigações sobre sistemas lineares/álgebra no ensino médio/educação básica se fizeram presentes como produto de tais programas. Nesse sentido, ressaltamos também que foi encontrado uma maior quantidade de dissertações, inferindo-se a necessidade de mais pesquisas aprofundadas sobre tal temática, que podem ocorrer pela realização de teses sobre o referido assunto.

No que diz respeito à natureza das pesquisas, verificamos na Tabela 1, a seguir, que a maior frequência é de pesquisas empíricas e/ou de campo, sobretudo, atividades de ensino. Contudo, no que tange às produções realizadas no âmbito do PROFMAT, evidenciam-se pesquisas que estudaram o conteúdo algébrico, com o propósito de desenvolver uma abordagem didática para ser trabalhada no ensino médio, porém, a experimentação dessas propostas não foi realizada.

Tabela 1 - Natureza das pesquisas selecionadas

Natureza da Pesquisa	**n**	**%**
Teórica e/ou Bibliográfica	23	45,1
Empírica e/ou de Campo	28	54,9
Total	51	100,0

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa, 2019.

Examinamos, também, os assuntos recorrentes nas pesquisas analisadas, com a intenção de verificar o direcionamento de tais estudos. Desse modo, apresentamos, na Tabela 2, os assuntos/objetivos que foram frequentes neste levantamento.

Tabela 2 - Principais assuntos/objetivos frequentes nos trabalhos analisados

Assuntos/Objetivos	**n**	**%**
Propostas e/ou realização de atividades de ensino da álgebra	19	37,25
Análise do desenvolvimento do pensamento, da linguagem e do aprendizado do aluno	10	19,61
Estudo teórico de conteúdos algébricos	10	19,61
Análise do conteúdo algébrico presente nos materiais didáticos	5	9,80
Contribuições para a formação de professores	3	5,88
Análise da álgebra presente nos currículos e documentos oficiais	3	5,88
Dificuldades dos alunos no aprendizado do conteúdo de álgebra	1	1,96
Total	51	100,00

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa, 2019

As pesquisas sobre o ensino de sistemas lineares/álgebra no Ensino Médio fundamentadas na teoria histórico-cultural configuram-se majoritariamente como propostas de atividades de ensino como, por exemplo, sequências didáticas, resolução de problemas, práticas lúdicas, envolvendo aparatos tecnológicos e *softwares* matemáticos. Além disso, são representativos os estudos que buscam compreender o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica e, consequentemente, do aprendizado do aluno. Também é relevante o número de trabalhos sobre o tratamento teórico dos conteúdos algébricos, visando à sua "aplicação" na educação básica.

Entretanto, diante dos assuntos/objetivos dos trabalhos analisados, constatamos uma ínfima quantidade de pesquisas sobre, especificamente, o ensino de sistemas lineares/álgebra no ensino médio, pois, quando realizadas, não foram feitas no âmbito do Ensino Médio e/ou não apresentaram como fundamentação a Teoria Histórico-Cultural.

Dentre as teses, não há pesquisas que tratam, nomeadamente, do ensino de sistemas lineares/álgebra no Ensino Médio com base no levantamento bibliográfico em pauta e, ainda, há escassos experimentos didáticos que abarcam o ensino da álgebra no âmbito do referido nível escolar.

As temáticas/assuntos das pesquisas presentes no levantamento contribuem e apresentam relação com a presente pesquisa, visto que este estudo, mesmo tratando de modo específico Sistemas de Equações Lineares, fundamenta-se na totalidade dos objetos e dos fenômenos que o constituem.

Apresentamos, também, discussões sobre as contribuições dos referidos estudos em relação os processos de ensino-aprendizagem da álgebra. De forma sintetizada, buscamos evidenciar os principais achados dos pesquisadores sobre a supracitada temática, sobretudo sobre sistemas de equações.

Nesta perspectiva, Battaglioli (2008), ao analisar livros didáticos verificou a ausência de uma abordagem gráfica no ensino de Sistemas de Equações Lineares, sobretudo, de 3 incógnitas. Do mesmo modo, Pedrini (2013) analisou livros didáticos do ensino fundamental e médio e constatou, também, a falta do uso da representação gráfica (geométrica) dos Sistemas de Equações Lineares.

Battaglioli (2008) considera que já existem *softwares* que possibilitam aos alunos interpretar graficamente um sistema de equações e que tal atividade pode ser melhor explorada pelos livros didáticos. Ela observa que o registro gráfico pode contribuir para uma melhor compreensão do conjunto solução do sistema e de sua classificação. Conclui, ainda, que a modelagem predominante nos livros didáticos se refere à tradução da linguagem natural para o registro algébrico.

A representação gráfica, de acordo com Dias (2014), pode ser explorada com softwares, como o *Winplot*, para potencializar o ensino de sistemas de equações, despertando o maior interesse dos alunos. Prezotti Filho (2014) ressalta que a utilização desses softwares permite que o aluno, ao analisar os gráficos, dê sentido a esse conteúdo, tendo uma visão que vai além da abordagem tratada nos livros didáticos. Rufato (2014) complementa essa discussão evidenciando que os softwares de geometria dinâmica proporcionam aos alunos uma compreensão diferenciada desse conteúdo, para além daquela tratada nos livros didáticos.

Nesse sentido, Rodrigues (2011) identificou que nenhum documento oficial, em especial os PCN, recomendam a utilização gráfica para representação de sistemas lineares 3x3. Contudo, Freitas (2013), ao desenvolver uma sequência didática sobre esse conteúdo, com o auxílio do Geogebra, constatou, inicialmente, que os alunos não dominavam as diferentes formas de um registro de sistemas lineares. Em seguida, verificou que o registro gráfico possibilitou que os alunos tivessem uma efetiva compreensão de sistemas lineares - que poderiam ter infinitas soluções e/ou nenhuma solução.

No que tange às pesquisas que utilizaram como fundamento a teoria histórico-cultural para ensino da álgebra, evidenciamos a pesquisa de Sousa (2004). A referida autora, ao propor o estudo da álgebra com base no movimento lógico-histórico dos conceitos de *fluência*, *variável,* e as palavras *particular* e *universal*, verificou que os alunos conseguiram estabelecer uma relação entre a álgebra com ações práticas do seu cotidiano.

Porém, a mesma autora, ressalta que os alunos apresentavam dificuldades, indicando que o movimento dos seus pensamentos estava limitado a determinadas representações da álgebra simbólica. Por exemplo, utilizam de forma recorrente a letra-variável *x*, mas, muitas vezes, sem dar significado a ela. Sousa (2004) ressalta a importância das atividades que se fundamentam num movimento lógico-histórico, visto que elas apresentam como uma atividade formadora e de pesquisa.

Khidir (2006) analisou a aprendizagem da álgebra no ensino fundamental à luz da teoria do ensino desenvolvimental de Davidov (1988). Ele constatou a presença dos cálculos mecânicos e descontextualizados nas salas de aula, um ensino reduzido ao pensamento empírico, a exposição de uma linguagem algébrica sem significado para o aluno, observando que a organização dos conteúdos propostos não proporcionava o desenvolvimento do pensamento teórico. Desse modo, o autor analisou que a teoria do ensino desenvolvimental pode colaborar para dirimir a dicotomia existente entre aritmética e álgebra, a proposição de atividades significativas para os alunos e o desenvolvimento do pensamento teórico.

Panossian (2008), ao estudar as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica, ressalta a necessidade de oportunizar ao aluno não apenas aplicação de um conceito e, também, a sua formação. Para isso, a autora observa que precisam ser trabalhados os nexos conceituais e a historicidade inerentes a um conceito, possibilitando que os alunos se apropriem de sua essência.

Supracitada autora, analisou que a proposição de um problema estruturado a um grupo de estudantes impacta positivamente no processo de ensino-aprendizagem, contribuindo para o processo de generalização, abstração e formação do conceito nas formas empírica e teórica.

Neste sentido, Panossian (2014, p. 270), também investigou as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra, defendendo a tese de que "[...] o movimento histórico e lógico dos conceitos é a fundamentação que, pela via da lógica dialética e do pensamento teórico, revela a essência do conhecimento algébrico".

Já Silva (2015) utilizou a teoria histórico-cultural para fundamentar análises sobre materiais didáticos que abordam o ensino da álgebra, constatou que eles apresentam aspectos relacionados à historicidade da álgebra, mas sem estabelecer relações com as atividades de ensino. Nota que há uma tentativa recorrente de buscar uma contextualização dos conteúdos algébricos em detrimento da abordagem teórica e da essência do conteúdo em pauta.

Neves (2015), nessa perspectiva, ao realizar um trabalho sobre a formação do conceito de função, verificou a dificuldade dos alunos em entender, primeiro, o significado da álgebra. Além disso, evidenciou que o processo de formação de conceitos não é vivenciado nas salas de aulas, revelou que o ensino se dá por meio da repetição de simbologias. Com a proposta de elaborar atividades de ensino fundamentadas na teoria histórico-cultural, o referido autor destacou a dificuldade de elaborar tarefas que tivessem como foco o conhecimento teórico. Contudo, sinalizou que tal abordagem contribui para uma reflexão e participação ativa dos estudantes nas atividades, propiciando o desenvolvimento do pensamento teórico.

Silva (2015) ao pesquisar sobre as potencialidades da atividade de estudo para o ensino da álgebra no ensino fundamental, constatou contribuições para o processo de aprendizagem dos alunos. De acordo com a autora, a atividade de estudo possibilitou aos alunos o desenvolvimento da atenção voluntária, do raciocínio lógico, da autoconfiança, do pensamento teórico, entre outros, tornando-os ativos no processo de ensino-aprendizagem.

O sistema didático proposto nesta pesquisa considerou as lacunas identificadas neste levantamento, abrangendo de forma integrada a modelagem gráfica, recursos digitais – como aplicativos, vídeos e softwares matemáticos. Para além da aprendizagem dos conteúdos matemáticos, também, almejou o desenvolvimento do pensamento teórico, com base no movimento lógico-histórico do conteúdo, engendrando a humanização.

4.2. Os currículos que orientam o Ensino Médio: identificando as proposta de ensino de álgebra

O movimento se faz presente no processo de desenvolvimento do ser-humano, a sociedade não é estática e sim marcada por mudança. Observamos, ao longo do tempo, alterações no comportamento das pessoas, influências da tecnologia no modo de vida das pessoas, o surgimento de novas culturas, dentre outros.

Nesse sentido, concebemos que a educação escolar necessita, também, acompanhar as mudanças que circundam a sociedade, visto que não é possível ensinar as mesmas coisas, da mesma forma, em uma sociedade caracterizada pelo movimento. Os estudantes de hoje, diferenciam-se daqueles de 10 anos atrás, atualmente o jovem é abarcado por muitas informações, tem acesso a diferentes tecnologias, e possui outras prioridades e perspectivas para o futuro.

Além disso, na realidade brasileira, marcada por profundas desigualdades sociais, pode-se falar em diferentes juventudes. Nesse sentido, não podemos formar um indivíduo moderno apenas reproduzindo os mesmos conteúdos, da mesma forma, com a mesma finalidade.

As políticas públicas educacionais brasileiras neste cenário descrito, propuseram alterações na legislação do ensino médio, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB/1996, com a aprovação da Lei nº 13.415/2017, bem como a homologação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC, instrumento normativo, aprovado em dezembro de 2018, já previsto na Constituição Federal de 1988. Ressaltamos que, não iremos discutir as formas como as mudanças no Ensino Médio foram determinadas, com muitas críticas e contradições. Teremos como foco a concepção de quais conteúdos são prioritários no processo de formação dos estudantes do ensino médio, sobretudo, do campo algébrico.

Assim sendo, direcionamos nossa discussão/investigação no que tange à presença do conteúdo algébrico nos documentos (PCN, PCN+, CBC/MG) que, ainda, sustentam um currículo para o ensino médio, buscando dialogar com as discussões que estão sendo realizadas para a implantação da BNCC. Dessa forma, estamos em um momento de transição e questionamos: qual álgebra esta proposta nos documentos legais?

De acordo com os PCN, o currículo do ensino médio, em relação ao ensino da álgebra, precisaria garantir a compreensão e o aprofundamento dos conteúdos algébricos de forma integrada com outros conceitos, e com a perspectiva sócio histórica que está na origem desses temas. Considera que tal conhecimento se relaciona com o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Nas orientações educacionais complementares aos PCN (PCN+), primeiro, é expressa a importância da linguagem algébrica para compreender e subsidiar análises em diferentes áreas do conhecimento. Denotam atenção para o ensino das equações algébricas, como algo abstrato, mas que pode assumir diferentes significados num contexto social, podendo estar presente em diferentes ciências, representando igualdades e variações. Assim, o documento exemplifica que, na Física, o balanço energético, representado por uma equação algébrica, pode significar a transformação e conservação de energia.

Deste modo, verificamos que a álgebra está diretamente relacionada com esta competência apresentada no referido documento: "Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências". Assim, consideram que o desenvolvimento dos conhecimentos algébricos contribui para a resolução de problemas e para a tomada de decisão, por exemplo, numa dada situação o aluno precisaria reconhecer a necessidade de utilizar o recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.

No mesmo documento, a álgebra é colocada como um tema estruturante do ensino da Matemática "*Álgebra, números e funções*". Nesse eixo estruturador evidencia-se a álgebra como linguagem e sua importância para a vida cotidiana, ilustrada com a presença das variações, números e gráficos no noticiário. Apresentam que os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais - consequentemente, os números complexos, e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Propõem as unidades variações de *grandezas* e *trigonometria* para desenvolverem esse eixo estruturante (BRASIL, 2012).

Em relação ao ensino de equações e Sistemas de Equações Lineares, o referido documento recomenda que o tratamento desses conteúdos precisa incluir sua importância cultural, ou seja, aplicar o estudo à resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento. Observa que uma abordagem mais qualitativa e profunda poderá ser feita na parte flexível do currículo.

Nesta perspectiva, em Minas Gerais, tem-se o Currículo Básico Comum, documento que está fundamentado nas diretrizes nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e nos PCN+ e tem como objetivo operacionalizar princípios apresentados nesses documentos, detalhando unidades temáticas e sugerindo formas de ensino.

Neste documento, observamos a importância apresentada em relacionar os conhecimentos algébricos com a geometria. Por exemplo, indicam a algebrização da geometria através da introdução de um modelo para a geometria euclidiana plana (geometria analítica). Recomendam a possibilidade de tratar lugares geométricos planos por meio de equações, possibilitando também a representação gráfica (MINAS GERAIS, 2005).

Em relação ao conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, o referido documento ressalta a necessidade de desenvolver estas habilidades: I) *Reconhecer se uma tripla ordenada é solução de um sistema de equações lineares. II) Resolver um sistema de equações lineares com duas variáveis e interpretar o resultado geometricamente. III) Resolver problemas que envolvam um sistema de equações lineares.*

Ressaltamos que nos PCN as habilidades não são especificadas e não é incentivada a intepretação geométrica dos sistemas lineares, conforme verificado por Rodrigues (2011). Do mesmo modo, verificam-se nos livros didáticos poucas atividades que promovam a modelagem/representação gráfica de sistemas lineares (BATTAGLIOLI, 2008; PEDRINI, 2013). Porém, as atividades que visam desenvolver a habilidade de interpretar geometricamente o resultado do sistema lineares contribuem para o processo de aprendizagem desse conteúdo (BATTAGLIOLI, 2008; DIAS, 2014; PREZOTTI FILHO, 2014).

Na área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC do ensino médio, apresenta-se a necessidade de garantia de cinco competências específicas. Ressalta-se que elas formam um conjunto de ações e conhecimentos que os jovens precisam desenvolver, não havendo uma ordem preestabelecida entre elas. Visam desenvolver a cognição, aspectos sócio emocionais, a capacidade de resolver problemas, o respeito à diversidade e pluralidades de ideias e trabalhos colaborativos.

Sobre as competências específicas para a área de Matemática e suas tecnologias, analisamos a competência 4 que se refere a: “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (BRASIL, 2018, p.538).

Essa competência requer o desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à aprendizagem de conhecimentos algébricos, como a representação de situações-problema na sua forma mais geral. Utiliza-se a álgebra para realizar conversões entre os diferentes tipos de representações, visto que uma representação pode facilitar a compreensão da outra. Incentivam a utilização de mais de um registro de representação. Nesse sentido, verificamos avanços nessa base curricular – BNCC, no que tange à iniciativa de incentivar a utilização de diferentes registros.

Assim, destacamos estas habilidades:

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais (BRASIL, 2018, p.539).

Verificamos que tais habilidades contemplam indicativos de pesquisas sobre o ensino da álgebra, sobretudo do conteúdo de sistemas lineares no ensino médio, que sugeriam a necessidade de utilizar as representações gráficas e o uso as tecnologias digitais, como aplicativos e softwares (BATTAGLIOLI, 2008; DIAS, 2014; PREZOTTI FILHO, 2014).

Entretanto, apoiando-nos em Davidov (1988), consideramos a *conversão* uma etapa da atividade de estudo, mas ela, isoladamente, não permite a formação do conceito e do pensamento teórico. Davidov analisa que a ação da aprendizagem se fundamenta na modelação da relação universal em forma objetal gráfica ou com letras, sendo essenciais no processo de assimilação dos conhecimentos teóricos, porém inclui outras ações (transformação dos dados da tarefa, modelação, transformação, construção do sistema de tarefas particulares, controle e avaliação).

Outra competência específica relacionada aos conhecimentos algébricos, destaca: "Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades Matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas" (BRASIL, 2018, p.540).

Em relação a essas habilidades, avaliamos a importância de se expressar algebricamente as generalizações. Os conteúdos escolares referentes ao ensino médio, para sua efetiva assimilação, precisam ser estudados considerando seus aspectos gerais, fato, inclusive, inerente à idade psicológica dos adolescentes.

Davidov (1988) observa que a abstração e generalização substantivas consideram a relação entre as conexões essenciais entre objetos do mundo circundante. Ressalta que para o processo de generalização é preciso que identifique o que há de essencial no objeto de estudo.

Ao analisar os documentos PCN, PCN+, CBC-MG e BNCC, com relação ao ensino de álgebra/sistemas lineares, verificamos avanços significativos. Nos PCN e PCN+, o currículo direcionava-se para a resolução de problemas, interpretação da realidade e a representação/significado da linguagem algébrica. Já no CBC-MG, acrescentou-se que diferentes representações poderiam contribuir para aprendizagem de um dado conteúdo.

Na recente BNCC, em fase de implementação, que além de abordar a importância dos conteúdos algébricos para a compreensão da realidade e sua aplicabilidade para a resolução de problemas, sugere, a necessidade de incluir as tecnologias digitais nesse processo (*Apps*, *softwares*, etc) e o uso de diferentes representações (aritmética, algébrica, geométrica, etc), conforme já recomendavam estudos sobre essa temática. Indica, ainda, a necessidade de expressar as relações gerais para a compreensão do conteúdo.

Desse modo, pode-se ressignificar as formas de ensinar a álgebra no ensino médio. Contraditoriamente, os conteúdos poderão ser esvaziados pela limitação da carga horária destinada à base comum, pois foram incluídos os itinerários formativos[9], cuja oferta não está garantida em sua totalidade, pois dependem das possibilidades dos sistemas de ensino e da relevância para o contexto local.

4.3 O Exame Nacional do Ensino Médio e o desempenho dos alunos nas questões algébricas

Com o objetivo de diagnosticarmos a situação do ensino de sistemas lineares nas avaliações externas, realizamos, também, um estudo sobre as questões do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, verificando a abordagem e o direcionamento dos

---

[9] De acordo com a Lei nº 13.415/2017,
“o Art. 4º O art. 36 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 , passa a vigorar com as seguintes alterações:
“ Art. 36 . O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
I - linguagens e suas tecnologias;
II - Matemática e suas tecnologias;
III - ciências da natureza e suas tecnologias;
IV - ciências humanas e sociais aplicadas;
V - formação técnica e profissional.
§ 1º A organização das áreas de que trata o caput e das respectivas competências e habilidades será feita de acordo com critérios estabelecidos em cada sistema de ensino” (BRASIL, 2017).

itens que contemplam o conhecimento de Sistemas de Equações Lineares e, também, averiguando o desempenho dos alunos nessa avaliação, evidenciando possíveis dificuldades no aprendizado do referido conteúdo.

Para tal, analisamos no caderno[10] Matemática e suas Tecnologias do ENEM, as avaliações ocorridas entre os anos de 2012 e 2014, considerando que, a partir do ano de 2012, as questões com a indicação da habilidade contemplada, referente aos descritores, foram disponibilizadas. Utilizamos os *microdados* do ENEM liberados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), e o Microsoft Excel para executarmos esses procedimentos.

Cabe considerar que o ENEM tem se constituído no principal meio de acesso ao ensino superior público. Assim, o currículo e os documentos oficiais como os PCN, PCN+, CNC e BNCC são importantes direcionadores para o ensino médio, porém a matriz de referência da avaliação do ENEM passa a ter um peso maior que esses documentos.

No quadro a seguir, apresentamos os conhecimentos, as competências e habilidades avaliadas no ENEM, em relação à área de álgebra.

Quadro 4 - Conhecimentos, competência e habilidades de Álgebra presentes na matriz de referência do ENEM

Álgebra na matriz de referência do ENEM	
Conhecimentos associados à matriz do ENEM	• Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. • Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.
Competências do ENEM	Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
Habilidades do ENEM	H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas. H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação. H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base na matriz de referência do ENEM.

[10] Os cadernos de prova do ENEM são organizados de 4 formas – identificadas por cores, sendo que em cada caderno a sequência das questões se alteram. Eles são entregues de forma aleatória para os alunos. Nesse sentido nas análises apresentadas, consideramos os dados oriundos de apenas do caderno cinza – escolha feita de forma aleatória, visto que o grupo de respondentes perfazem uma amostra significativa.

Chamamos a atenção para os conhecimentos denominados algébricos/geométricos que pressupõe a necessidade de avaliar diferentes representações/modelagens. Observamos que a relação entre aritmético, algébrico e geométrico vem sendo sinalizado como aspecto importante para o processo de ensino-aprendizagem, sobretudo, na BNCC.

Analisamos que a principal competência relacionada à álgebra a ser avaliada, refere-se a: "Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas". Afirma-se a álgebra como um importante recurso para resolver situações-problemas presentes em diferentes contextos do cotidiano. Porém, não é explícita nessa competência a necessidade de avaliar conhecimentos específicos ou teóricos da álgebra e ela aponta uma direção que se limita utilização das representações algébricas.

Para aprofundarmos a compreensão sobre essa competência, analisaremos a seguir as habilidades que a compõem. Além disso, apresentaremos uma tabela indicando quais questões foram relacionadas a tal habilidade e o desempenho de um grupo de alunos na questão em análise.

Conforme já anunciamos, utilizamos os microdados do ENEM para identificar as questões e suas habilidades. O INEP disponibiliza desde de 2012 essa informação, assim, fizemos um recorte das provas ocorridas entre 2012 e 2014 – quando iniciamos esta pesquisa, em 2016, os dados a partir de 2015, ainda, não estavam disponíveis. Consideramos uma amostra, filtrando os alunos que realizaram a prova de cor cinza da cidade de Uberaba, posteriormente, calculamos o desempenho deles em cada questão. Discutimos, então, cada uma das habilidades, verificando o desempenho dos alunos, seguido de algumas questões para analisarmos suas abordagens e as respostas dos alunos.

A habilidade 19 da matriz visa avaliar a capacidade dos alunos em identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas. O desempenho dos alunos no conjunto de questões que contemplaram essa habilidade teve uma média, aproximadamente, de 30%. Não teve nenhuma questão com índice de acertos superior a 45%, no entanto, teve uma questão, com apenas, 12,2% de acertos

Tabela 3 - Percentual de acertos nos itens do ENEM que avaliaram a Habilidade 19

N	Ano	Cor	Item	Hab.	Gab.	% Acertos
1	2012	Cinza	170	19	E	43,39
2	2012	Cinza	172	19	A	43,14
3	2013	Cinza	149	19	D	20,89
4	2013	Cinza	167	19	B	22,31
5	2014	Cinza	165	19	D	12,20
6	2014	Cinza	179	19	D	41,28
	Média					30,53

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Para exemplificarmos o conteúdo avaliado nessa habilidade, apresentamos uma das questões e a análise das respostas dos alunos. Essa questão foi escolhida, porque exige que o aluno tenha domínio de vários conceitos e procedimentos, para fazer a modelação, estando diante de uma situação-problema contextualizada. A modelação exige a transformação da situação de uma linguagem natural para uma linguagem algébrica.

Figura 5 - Item do ENEM/2013, avaliando a habilidade 19 e sua resolução

QUESTÃO 167

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

A) $5X - 3Y + 15 = 0$
B) $5X - 2Y + 10 = 0$
C) $3X - 3Y + 15 = 0$
D) $3X - 2Y + 15 = 0$
E) $3X - 2Y + 10 = 0$

Resolução:

Seja Z o tempo que a luz vermelha fica acesa, em cada ciclo. De acordo com enunciado, temos:

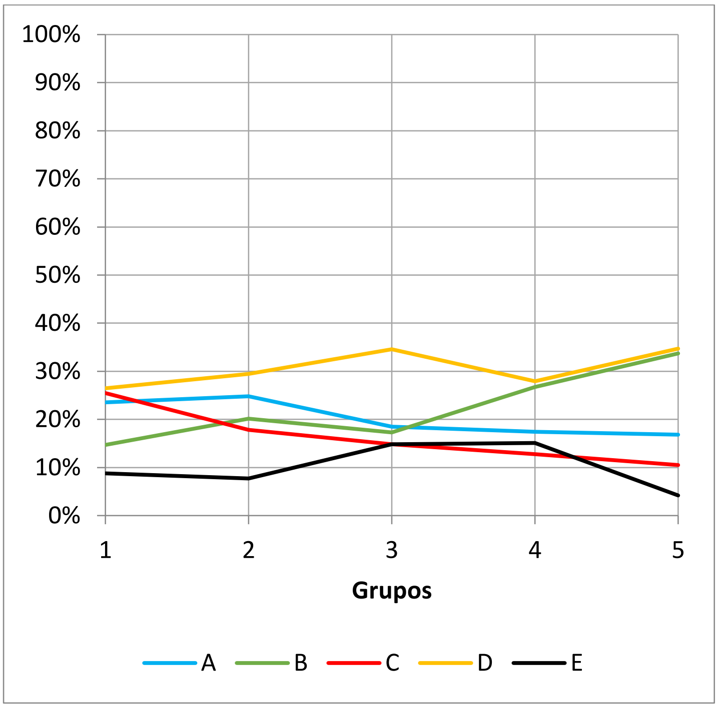
I) $X = \frac{2}{3}Z \leftrightarrow Z = \frac{3X}{2}$
II) $X + 5 + Z = Y$

Substituindo I em II, temos: $X + 5 + \frac{3X}{2} = Y \leftrightarrow 5X - 2Y + 10 = 0$

Fonte: ENEM, 2013

Para a análise das respostas dos alunos, dividimos a amostra (respostas dos alunos) em 5 grupos, de acordo com o desempenho total nas 45 questões da prova de Matemática, por exemplo, Grupo 1- alunos com menor desempenho até o Grupo 5 – alunos com melhor desempenho. Em seguida, verificamos o comportamento das respostas de cada um desses grupos (1, 2, 3, 4, 5), em cada alternativa da questão (A, B, C, D, E).

Gráfico 3 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho



Fonte: Elaboração do autor, 2019, a partir dos microdados do ENEM

Observando o Gráfico 3, constatamos que essa questão, cuja resposta correta estava na alternativa B, teve baixo percentual de acertos, inclusive pelos alunos de melhor desempenho (Grupo 5), que atingiram 33%. A linha para a resposta correta (B) tende a uma inclinação positiva (sobe da esquerda para a direita), o que significa que os alunos com escores mais altos tenderam a responder corretamente com mais frequência, ainda que nesse grupo seja inferior a 34%. Entretanto, as linhas para as opções incorretas, chamados *distratores*, devem ter uma inclinação negativa, o que não ocorreu com todas elas.

Na Tabela 4, constam os valores traduzidos pelo gráfico, na qual se pode verificar como os grupos se comportaram. Os dados podem ser usados para examinar, de forma detalhada, o desempenho na questão e ajudar a diagnosticar possíveis problemas. Podemos verificar, ainda, que, em média, apenas 22,3% assinalaram a alternativa correta (B) e 30,4% marcaram o distrator correspondente à letra D.

Tabela 4 - Distribuição (%) das respostas por grupos de desempenho

Grupos	A	B	C	D	E
1	23,53	14,71	25,49	26,47	8,82
2	24,81	20,16	17,83	29,46	7,75
3	18,52	17,28	14,81	34,57	14,81
4	17,44	26,74	12,79	27,91	15,12
5	16,8	33,68	10,53	34,74	4,21

Fonte: Elaboração do autor, 2019, a partir dos microdados do ENEM

Outra análise que pode ser feita é do Índice de Dificuldade (Dif) da questão calculado com base na proporção de respostas corretas ao item, assim, varia de 0 a 1, ou, na forma percentual, de 0 a 100%, sendo que o índice 1(100%) significa que todos responderam de forma correta (SARTES E SOUZA-FORMIGONI, 2013).

Também se pode calcular o Índice de Discriminação (Discrim) de um item, que é uma medida de consistência do item com todo o teste. Refere-se à diferença de comportamento entre dois grupos: o grupo superior – 27% dos que tem melhor desempenho, e o grupo inferior - 27% com menor desempenho (SILVEIRA, 1980). A correlação bisserial é também uma medida da discriminação calculada entre o item e a pontuação total, e varia entre -1,0 a 1,0.

Tabela 5 - *Índice de Discriminação e o bisserial da questão*

	Dif	Bisserial	27menor	27maior	Discrim
A	20,7	-0,080	24,6	18,7	-0,060
B	22,3	0,204	18,3	30,0	0,117
C	16,6	-0,177	23,2	12,0	-0,112
D	30,4	0,079	25,4	32,7	0,073
E	9,7	-0,097	7,7	6,7	-0,011

Fonte: Elaboração do autor, 2019, a partir dos microdados do ENEM

As medidas de discriminação apresentaram resultado positivo em duas alternativas, indicando que os alunos que obtiveram um melhor desempenho do exame de Matemática tiveram como tendência assinalar as alternativas (b) e (d) como possíveis afirmativas corretas. Tais alternativas nos permitem inferir que uma das dificuldades dos alunos foi traduzir o problema para a linguagem algebricamente.

Os resultados também mostram que a modelação de uma situação exige conhecimentos de uma rede conceitual complexa. Na situação específica em análise, envolve: o conceito de variável, de relações numéricas que devem ser estabelecidas entre elas, a abstração de elementos envolvidos e a síntese numa lei, que é uma equação linear, além de procedimentos de transformação dos dados. "Os conceitos científicos, com o seu sistema hierárquico de inter-relações, parecem constituir o meio no qual a consciência e o domínio se desenvolvem, sendo mais tarde transferidos a outros conceitos e outras áreas do pensamento" (VIGOTSKI, 2008, p.115).

Outra análise depreende-se do fato de que a questão representa um problema do cotidiano, para Vigotski (2008), a dificuldade nessas situações refere-se ao fato de que os alunos podem não ter consciência dos seus conceitos e, assim, não conseguirem operar com eles à vontade, conforme a tarefa exige. Nesse sentido, reforçamos a importância de uma proposta de ensino que, além de contemplar a aplicabilidade do conhecimento, desenvolva os juízos e conceitos do objeto estudado.

Com relação à habilidade 20 da matriz do ENEM, que visa avaliar interpretação de gráfico cartesiano que representa relações entre grandezas. O desempenho dos alunos no conjunto de questões que contemplaram essa habilidade teve uma média inferior a 50% e com alto desvio padrão (30,07). Ou seja, teve-se uma questão com um alto índice de acertos de número 136 (93,77%) e nas demais o percentual de acertos foi inferior a 45%. O desempenho em relação a essa habilidade é melhor do que nas questões da habilidade 19 (Tabela 3).

Tabela 6 - Itens do ENEM 2012 - 2014 que avaliaram a Habilidade 20.

N	Ano	Cor	Item	Hab.	Gab.	% Acertos
7	2012	Cinza	136	20	E	93,77
8	2013	Cinza	143	20	E	19,68
9	2014	Cinza	143	20	A	54,41
10	2014	Cinza	173	20	D	25,52
11	2014	Cinza	175	20	C	33,58
Média						45,39

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

A questão, que utilizamos para ilustrar a habilidade 20, avalia a capacidade do aluno de traduzir da linguagem algébrica para a geométrica, diferentemente do item anterior em que era da linguagem escrita na língua materna para a algébrica.

Figura 6 - Item do ENEM/ 2013 avaliando a habilidade 20 e sua resolução

QUESTÃO 143

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de −1 a 1;

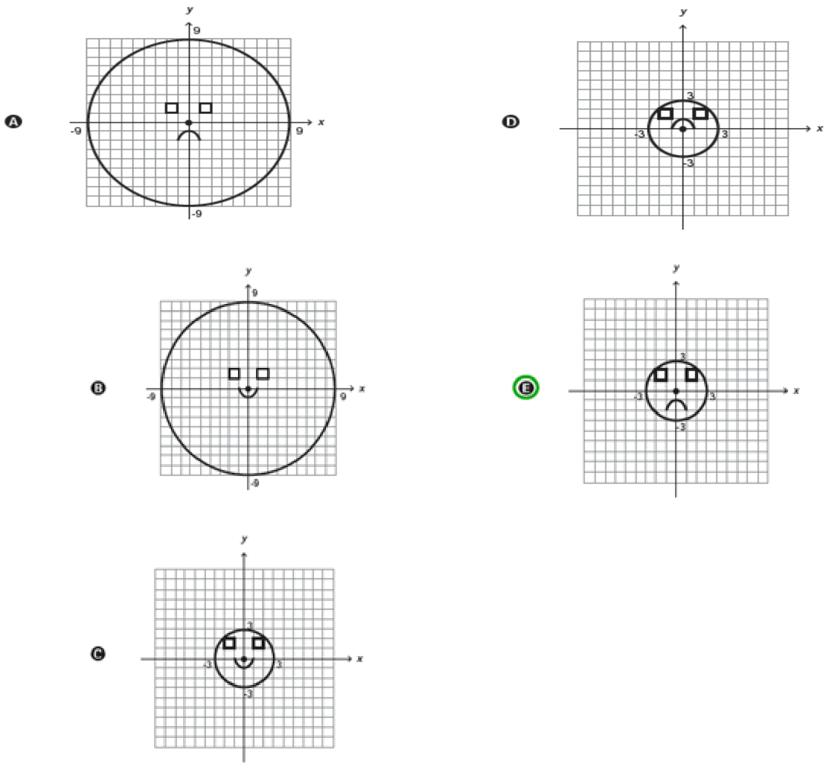
III — é o quadrado formado pelos vértices (−2, 1), (−1, 1), (−1, 2) e (−2, 2);

IV — é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);

V — é o ponto (0, 0).

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?



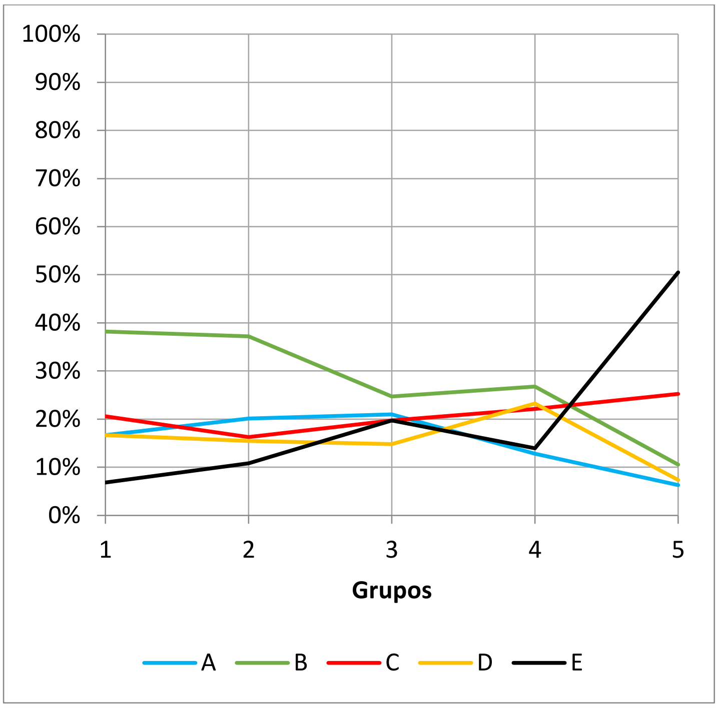
Resolução:

- Circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, cujo o centro é o ponto (0,0) e o raio é 3.
- Parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com $-1 \leq x \leq 1$
- Quadrado de vértices (– 2; 1), (– 1; 1), (– 1; 2) e (– 2; 2),
  Quadrado de vértices (1; 1), (2; 1), (2; 2) e (1; 2) e ponto (0,0)

Fonte: ENEM,2014.

No gráfico a seguir, verificamos que o grupo que apresentou menor desempenho no exame assinalou significativamente a alternativa A, indicando que eles conseguiram reconhecer a interpretação geométrica apenas dos vértices dos quadrados, desconhecendo a representação geométrica da equação da parábola e da circunferência. Assim, indica-se que a dificuldade foi na representação da parábola – a direção de sua concavidade, e no tamanho do raio da circunferência. Apenas o Grupo 5 – alunos que obtiveram melhor desempenho, conseguiram identificar a representação geométrica da parábola e da circunferência.

Gráfico 4 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho



Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Inferimos que os alunos não conseguiram estabelecer uma relação correta entre as representações algébrica e gráfica, visto que, nas salas de aulas, os conteúdos são ensinados de forma fragmentada e destina-se pouca ênfase nas diferentes representações/modelagem de um objeto conteúdo (BATTAGLIOLI, 2008; DIAS, 2014; PREZOTTI FILHO, 2014; PEDRINI, 2013)

Tabela 7 - Distribuição (%) das respostas por grupos de desempenho

Grupos	A	B	C	D	E
1	16,67	38,24	20,59	16,67	6,86
2	20,16	37,21	16,28	15,50	10,85
3	20,99	24,69	19,75	14,81	19,75
4	12,79	26,7	22,09	23,26	13,95
5	6,32	10,53	25,26	7,37	50,53

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Observamos que o índice de acertos (alternativa E) foi de, apenas, 19,7%, sendo que os distratores referentes às alternativas B e C foram mais assinalados, 28,4% e 20,5%, respectivamente. Contudo, o bisserial (Tabela 8) indica que tal item conseguiu discriminar os alunos com melhor desempenho (0,541), ou seja, metade dos alunos com melhor desempenho não teve dificuldades em resolver essa questão.

Tabela 8 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão

	Dif	Bisserial	27menor	27maior	Discrim
A	15,6	-0,198	18,3	6,7	-0,116
B	28,4	-0,289	38,0	18,7	-0,194
C	20,5	0,092	16,9	24,0	0,071
D	15,4	-0,113	17,6	10,7	-0,069
E	19,7	0,541	8,5	39,3	0,309

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

A habilidade 21 da matriz do ENEM que se refere à capacidade dos alunos de resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos. O desempenho dos alunos no conjunto de questões que contemplaram essa habilidade teve uma média inferior a 30%.

Tabela 9 - Itens do ENEM que avaliaram a Habilidade 21.

N	Ano	Cor	Item	Hab.	Gab.	% Acertos
12	2012	Cinza	143	21	B	51,87
13	2012	Cinza	165	21	B	26,18
14	2012	Cinza	166	21	E	28,18
15	2013	Cinza	148	21	E	13,79
16	2013	Cinza	158	21	E	14,60
17	2014	Cinza	146	21	B	32,27
Média						**27,8**

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Na figura a seguir apresentamos o item que os alunos obtiveram o melhor desempenho em relação a habilidade 21, a questão diz respeito a uma situação-problema em que os estudantes precisam igualar duas equações – já explícitas no enunciado da questão, com o propósito de encontrar o valor do preço de equilíbrio. Ponderamos que o fato de ter explícita as equações no enunciado contribuiu para o melhor desempenho dos alunos na referida questão.

Figura 7 - Item do ENEM e resolução, habilidade 21.

QUESTÃO 143

As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$Q_O = -20 + 4P$

$Q_D = 46 - 2P$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_D é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

A 5

B 11

C 13

D 23

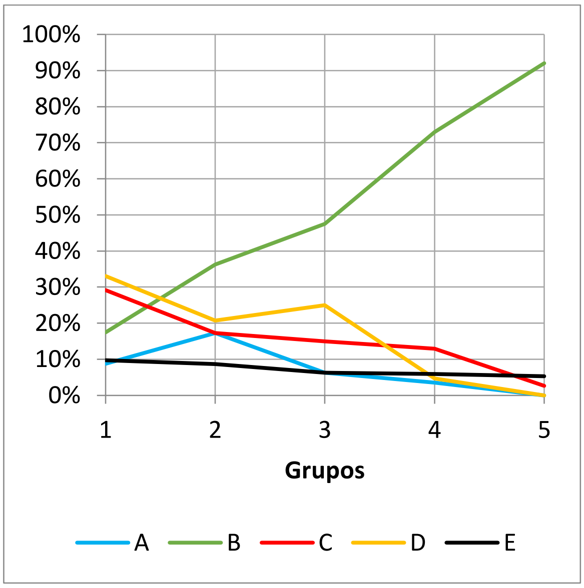
E 33

Resolução:
O preço de equilíbrio é encontrado igualando-se as funções quantidade demandada (Q_D) e quantidade ofertada (Q_O).
Assim, 46-2P=-20+4P.
Consequentemente 6P=66. Logo P=11, sendo P o preço de equilíbrio.

Fonte: ENEM, 2012.

Percebemos que a linha que representa a alternativa correta (B) é ascendente, mostrando que os alunos de melhor desempenho marcaram corretamente a resposta. As demais são descendentes.

Gráfico 5 - Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho



Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Ao analisarmos o comportamento das repostas dos alunos, verificamos a existência de uma boa discriminação (0,66), com um pequeno grupo de alunos – de menor desempenho, assinalando as alternativas C e D.

Tabela 10 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão

	Dif	Bisserial	27menor	27maior	Discrim
A	6,7	-0,260	11,1	0,9	-0,102
B	51,9	0,617	21,4	87,6	0,662
C	16,2	-0,286	27,4	4,4	-0,229
D	17,5	-0,450	29,9	0,9	-0,290
E	7,2	-0,117	8,5	6,2	-0,024

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

O índice dificuldade foi de 51,9% Os distratores indicam possíveis erros no processo de resolução de equações. Por exemplo: após terem igualado as equações, procederam da seguinte forma:

46 – 2P = -20 + 4P (não inverteu o sinal de + 4P e de 46)

+4P - 2P = -20 + 46 → 2P = 26 → P = 13

Tabela 11 - Distribuição das respostas por grupos de desempenho

Grupos	A	B	C	D	E
1	8,74	17,48	29,13	33,01	9,71
2	17,24	36,21	17,24	20,69	8,62
3	6,25	47,50	15,00	25,00	6,25
4	3,53	72,94	12,94	4,71	5,88
5	0,00	92,00	2,67	0,00	5,33

Fonte: Elaboração do autor, 2019.

Nas observações das aulas realizadas para a construção do experimento didático-formativo desta pesquisa, constatamos que erros em operações e procedimentos básicos da Matemática são recorrentes na realização de exercícios. A falta de pré-requisitos prejudica a compreensão de novos conceitos e o desenvolvimento dos conteúdos essenciais.

Sobre a habilidade 22 da matriz do ENEM – utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção da argumentação, identificamos apenas um item no período analisado. Percebemos, no período analisado, apenas um item que abordou a referida habilidade, em que índice de acertos dos alunos em tal questão foi de 44,86%.

Tabela 12 *- Item do ENEM que avaliou a Habilidade 22.*

N	Ano	Cor	Item	Hab.	Gab.	% Acertos
18	2013	Cinza	178	22	E	44,83
Média						44,83

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Considerando a pouca relação desse item (habilidade 22) com o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, não aprofundaremos a análise sobre ele neste momento.

Com relação à habilidade 23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos, distinguimos 4 itens. Verificamos que os alunos apresentaram dificuldades em responder as questões que envolviam essa habilidade.

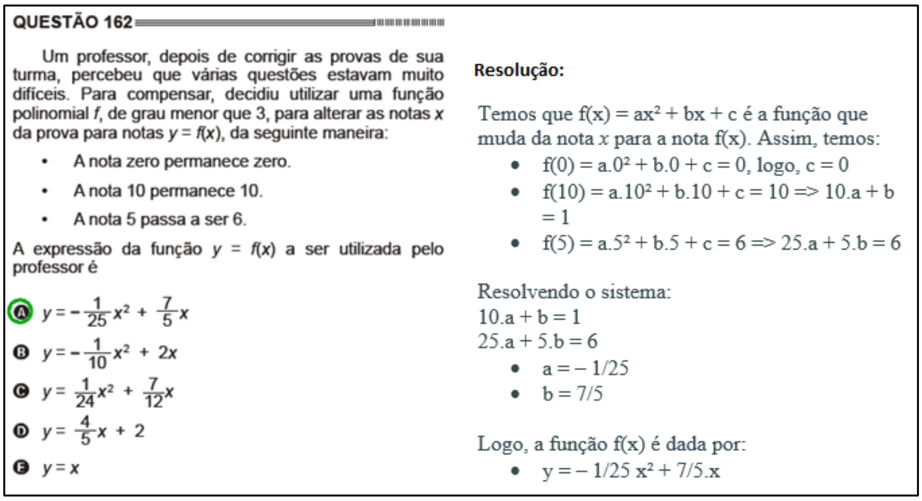
Tabela 13 - Itens do ENEM que avaliaram a Habilidade 23.

N	Ano	Cor	Item	Hab.	Gab.	% Acertos
19	2012	Cinza	169	23	D	46,1
20	2013	Cinza	168	23	D	23,1
21	2014	Cinza	147	23	D	21,4
22	2014	Cinza	162	23	A	19,9

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Para ilustrar essa habilidade, trazemos uma questão da prova de 2014, em que se apresenta uma questão contextualizada numa situação, em que o aluno deveria ter conhecimento da lei geral de polinômios de grau dois, ter se apropriado dos conceitos de variável dependente e independente nessa lei geral, resolver um sistema de equações lineares de duas variáveis.

Figura 8 - Item do ENEM e resolução, habilidade 23.



QUESTÃO 162

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial *f*, de grau menor que 3, para alterar as notas *x* da prova para notas *y* = *f*(*x*), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função *y* = *f*(*x*) a ser utilizada pelo professor é

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

Resolução:

Temos que f(x) = ax² + bx + c é a função que muda da nota *x* para a nota f(x). Assim, temos:

- $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 0$, logo, $c = 0$
- $f(10) = a.10^2 + b.10 + c = 10 \Rightarrow 10.a + b = 1$
- $f(5) = a.5^2 + b.5 + c = 6 \Rightarrow 25.a + 5.b = 6$

Resolvendo o sistema:
$10.a + b = 1$
$25.a + 5.b = 6$

- $a = -1/25$
- $b = 7/5$

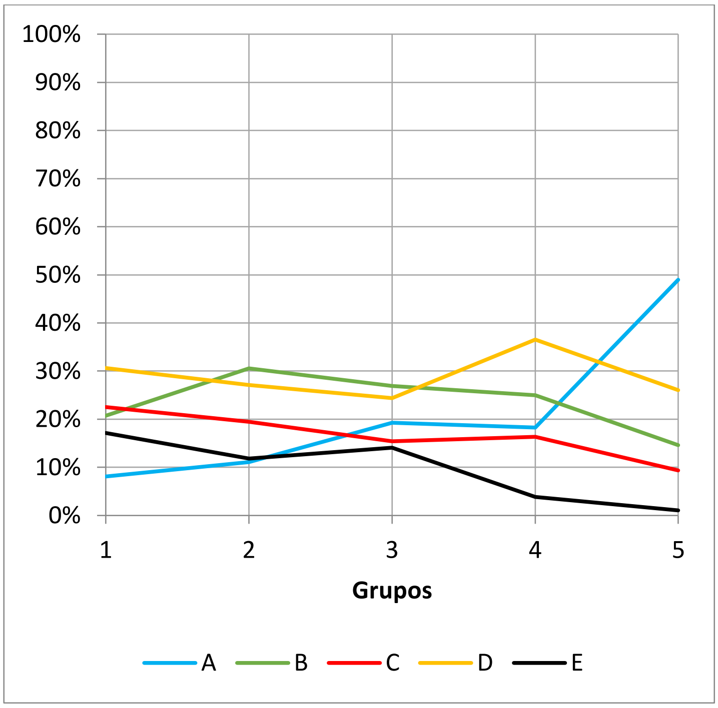
Logo, a função f(x) é dada por:

- $y = -1/25\ x^2 + 7/5.x$

Fonte: ENEM, 2014.

Ao analisarmos o Gráfico 6, notamos que menos da metade dos alunos com melhor desempenho conseguiram obter sucesso na solução do problema, sendo os resultados dos demais grupos inferiores a esse número. Porém, os alunos assinalaram, expressivamente, a alternativa D – que também apresentou uma discriminação positiva. Tal item pressupõe um erro na modelagem das equações que compõem o sistema de equações.

Gráfico 6 *- Percentual de respostas a cada alternativa de acordo com os grupos de desempenho*



Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Os resultados dos alunos, mostrados no Gráfico 6 e nas Tabelas 14 e 15, permitem concluir que se trata de uma questão difícil, com um índice de dificuldade alto (80% dos alunos erraram a questão), com um índice de discriminação na ordem de 0,31, o que é baixo

Tabela 14 - Distribuição (%) das respostas por grupos de desempenho

Grupos	A	B	C	D	E
1	8,11	20,72	22,52	30,63	17,12
2	11,11	30,56	19,44	27,08	11,81
3	19,23	26,92	15,38	24,36	14,10
4	18,27	25,00	16,35	36,54	3,85
5	48,96	14,58	9,38	26,04	1,04

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Tabela 15 - Índice de Discriminação e o bisserial da questão

	Dif	**Bisserial**	**27menor**	**27maior**	**Discrim**
A	19,9	0,456	7,6	39,2	0,316
B	24,0	-0,111	24,1	16,2	-0,078
C	17,1	-0,162	22,2	11,5	-0,107
D	29,1	-0,004	29,7	31,1	0,013
E	9,8	-0,269	15,8	2,0	-0,138

Fonte: Elaboração do autor, 2019, com base no Microdados ENEM.

Com base na análise da matriz de referência do ENEM e de determinadas questões que já compuseram essa avaliação, verificamos a necessidade de o aluno ter domínio do conteúdo algébrico para além de sua aplicabilidade. O aluno ao se apropriar de um conceito, ele também estará assimilando seus juízos, deduções e pré-requisitos necessários à sua compreensão.

O ENEM é composto por muitas situações-problema, em que para solucioná-las o aluno precisa mobilizar um conjunto de conhecimentos de forma integrada – um conhecimento teórico. Ou seja, não basta o discente apenas representar e modelar algebricamente uma situação do cotidiano, além disso, é necessário estabelecer relação de conhecimento com outros tipos de representações (aritmética, geométrica) – desenvolvendo o pensamento teórico, de modo que, posteriormente, ele consiga utilizá-lo para resolver problemas particulares.

Importante, também aqui, é ponderar sobre o uso da linguagem simbólica da álgebra, que, historicamente, permitiu maior generalidade às sínteses produzidas pelo pensamento. Fazendo um paralelo entre a relação do pensamento e linguagem tratada por Vigotski (2009, p. 398), quando afirma que "[...] o significado da palavra não é senão uma generalização ou conceito. Generalização e significado da palavra são sinônimos", os significados atribuídos aos símbolos algébricos são o conceito.

Desse modo, o desempenho dos alunos nas questões de álgebra revela que as generalizações, os conceitos não foram devidamente apropriados pela maioria. E mais, carecem de desenvolvimento, pois o pensamento precisa estar materializado na linguagem e vice-versa.

4.4 O diagnóstico do desenvolvimento de sistema de equações lineares na escola pesquisada

Após a autorização da escola e a aprovação do projeto no Comitê de Ética em Pesquisa, com o aceite dos professores, iniciamos a observação de aulas, dando prioridade àquelas que tratariam do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, em turmas do 2º ano do Ensino Médio. As observações realizadas tiveram como propósito auxiliar o pesquisador no processo de planejamento do experimento didático-formativo. Foram registradas em *diário de campo*, focando a organização do ensino pelos professores. Realizamos, também, um diagnóstico junto aos alunos participantes do experimento.

4.4.1 A observação das aulas de sistema de equações lineares

No Colégio selecionado, encontramos 5 turmas da 2ª série do ensino médio, com alunos, em sua maioria, de classes média e alta. Nesse colégio, cada turma do 2º ano do Ensino Médio tem 5 aulas de Matemática, divididas em dois componentes, sendo 3 aulas para abordar conhecimentos da área da geometria e trigonometria e 2 aulas para tratar dos conteúdos algébricos. O conteúdo de Sistemas de Equações Lineares compõe as aulas que dizem respeito aos conteúdos algébricos. Foram observadas as aulas de três professores. Essas têm duração de 50 minutos.

No momento em que iniciamos as observações (06/03/2018), os professores já tinham começado a ministrar os conteúdos de Sistemas de Equações Lineares. Nesse colégio, o material didático adotado são apostilas, em que esse conteúdo é o primeiro do campo algébrico, a ser ministrado, antes mesmo do estudo de matrizes. Assim, ressaltamos que durante as aulas observadas não tivemos a oportunidade de ver, especificamente, as aulas iniciais, nas quais se trabalham as definições e propriedades. Observamos aulas que envolviam a resolução de exercícios e de problemas sobre o conteúdo citado.

A primeira aula observada foi na Turma E, composta por, aproximadamente, 30 alunos. Nessa turma, o professor estava ensinando o método tradicional de escalonamento para a resolução de Sistemas de Equações Lineares. Ele iniciou a aula fazendo uma revisão sobre como resolver Sistemas de Equações Lineares, ressaltando o que foi explicado no seu último encontro com a turma.

Salientamos que o professor não utilizou a apostila do colégio, disse "detestar" esse material e questiona a forma como estão organizados os conteúdos e o nível de dificuldade dos exercícios iniciais da apostila. Por exemplo, ele analisa que o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares é apresentado no formato de matriz, antes de o aluno ter se apropriado desse conceito. Nesse sentido, o professor elabora listas de exercícios para desenvolver o seu trabalho.

Durante a aula, o professor ensinava de forma bem diretiva seus alunos, enfatizando a ordem dos procedimentos inerentes ao *método tradicional*[11] de resolução de Sistemas de Equações Lineares. Para a compreensão dos discentes, ele estipulou, que durante o escalonamento, tomar sempre como referência a primeira equação e eliminar o y e em seguida o z. Assim, ele questionava os seus alunos: "*pode resolver o y primeiro? Qual eliminar primeiro y ou z?*

Em relação à aula, destaca-se, também, o fato de o professor chamar a atenção para a organização da resolução. Nessa aula, não foram trabalhados problemas que envolviam sistemas de equações, apenas o método de resolução. Desse modo, nesse momento, não foram tratadas as aplicações de sistemas de equações.

Foi resolvido/explicado pelo professor um sistema com duas incógnitas e, em seguida, um sistema com três incógnitas; após as resoluções, o docente chamava a atenção para a classificação dos sistemas: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível. Dando continuidade, o professor pediu para que os alunos tentassem resolver os demais exercícios da lista e, conforme solicitavam, ele tentava ajudar/auxiliar as dúvidas de cada um. Eram exercícios do tipo "Resolva o sistema".

[11] Nesse método o professor é ativo no processo de ensino-aprendizagem - transmissor do conhecimento.

Quando o professor pediu para os alunos fazerem os exercícios da lista, alguns deles solicitaram ajuda ao pesquisador que estava presente na sala. Ao ajudá-los, foi constado que os alunos tinham dificuldades no processo de resolução dos exercícios, pois apresentavam erros nas operações de multiplicação e soma, principalmente aquelas que envolviam números negativos; a falta de organização no processo de resolução também causava confusão quando eles tentavam resolver os exercícios. Outros alunos faziam as operações mentalmente e, nesse processo, cometiam erros; além disso, outros buscavam métodos de resolução diferentes daquele proposto pelo professor, porém, não apresentavam sucesso na obtenção dos resultados corretos.

Observamos que os alunos se apresentavam com um comportamento “tranquilo” e respondiam de forma favorável às orientações do professor. A turma, de modo geral, acompanhava com atenção as explicações do docente e tentava realizar as atividades solicitadas por ele. Desse modo, no que tange as funções psíquicas superior dos alunos, com base nesse comportamento em sala de aula e suas idades psicológicas, podemos inferir que eles têm desenvolvido a atenção voluntária.

As aulas observadas em outra turma desse colégio, no 2º ano A, com aproximadamente 40 alunos, era ministrada por outro professor. Nessa aula, o docente corrigiu os exercícios da apostila, os quais já havia pedido para que os alunos fizessem. Verificamos que esse docente tem a apostila como referência para o planejamento/andamento de suas aulas.

O método de resolução de Sistemas de Equações Lineares que o professor dá ênfase é *o algoritmo de Gauss para o escalonamento.* Observamos que os alunos dessa turma acompanharam a correção do professor atentamente e apresentaram facilidade em utilizar esse método; no entanto, não foram todos alunos que fizeram os exercícios, mas os que não realizaram essa tarefa registravam a correção do professor.

Após a resolução de cada sistema linear, o professor discutiu a sua classificação. Ele também, ao resolver um exercício, retomava as definições de *sistema homogêneo.* Nessa aula, os exercícios resolvidos também não eram contextualizados, tinham a intenção de “treinar” o método de resolução.

No dia 7 de março de 2018, observamos a aula de um terceiro professor desse mesmo colégio, no 2° ano do D, que continha em torno de 30 alunos. Nessa turma, esse docente já estava trabalhando com os alunos problemas que envolviam Sistemas de Equações Lineares, corrigindo os exercícios propostos anteriormente e solucionando possíveis dúvidas dos alunos. Destaca-se que muitos alunos já haviam resolvido esses exercícios.

Primeiro, o professor resolveu um sistema com duas incógnitas, utilizando o método de substituição, ressaltando que, dependendo da forma com que o problema/sistema se apresenta, usa-se o método mais conveniente. Em seguida, o docente resolveu os problemas utilizando o *método tradicional de escalonamento.*

Os alunos acompanhavam atentamente a explicação do professor e, posteriormente, apresentaram os seguintes questionamentos: "*no escalonamento sempre eliminamos o x primeiro? Sempre temos que multiplicar a mesma equação para poder simplificar as outras?".* O professor esclareceu as dúvidas dos alunos, ressaltando a existência de outras possibilidades/ordens no processo de resolução de um sistema linear e estipulou/indicou eliminar o *x* primeiro para facilitar a compreensão da turma.

Nessa aula, também surgiram dúvidas em relação à interpretação de problemas, pois os alunos conseguiam montar o sistema de equação e determinar suas incógnitas, no entanto, não respondiam, efetivamente, à questão proposta. Na figura a seguir apresentamos um problema que desencadeou dúvidas nos alunos.

Figura 9 - Problema envolvendo Sistemas de Equações Lineares resolvido pelo professor.

Uma sorveteria usa os ingredientes **A**, **B** e **C** na composição de cada um dos 3 tipos de sorvete de chocolate que fabrica, conforme mostra esta tabela:

	Ingredientes (g/bola)		
Tipo de sorvete	A	B	C
Chocolate branco	10	10	30
Chocolate tradicional	20	10	10
Chocolate especial	20	20	10

Em seu depósito, a sorveteria tem 9 kg do ingrediente **A**, 7 kg do ingrediente **B** e 12 kg do ingrediente **C**. Quantas bolas do sorvete do tipo especial podem ser feitas com esse estoque?

Fonte: material didático dos alunos da escola, 2018.

Inferimos que, no problema proposto, a dificuldade dos alunos se fundamenta na relação entre o conhecimento objetal sensorial e o pensamento teórico. Os alunos tiveram dificuldades de compreender a situação descrita no problema e desenvolver a abstração desse conteúdo.

Salientamos que o questionamento/dúvida dos alunos fez com que o professor explicasse detalhadamente esse exercício, destacando quais eram os significados de x, y e z. No entanto, os alunos apresentaram dúvidas correlatas a essas ao resolver outros problemas. Uma hipótese que poderia justificar essa dificuldade dos alunos seria a exiguidade no desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Outro problema no qual os alunos apresentaram dificuldades contemplava a interdisciplinaridade entre as áreas de Matemática e de Ciências da Natureza – exigia-se a utilização de um sistema para fazer o balanceamento de reações químicas, conforme apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Problema envolvendo Sistemas de Equações Lineares resolvido pelo professor.

Faça o equilibrio das seguintes reações quimicas:

a) $Al_2(CO_3)_3 \Rightarrow Al_2O_3 + CO_2$ b) $C_6H_6 + O_2 \Rightarrow CO_2 + H_2O$

Fonte: material didático dos alunos da escola 2018.

Verificamos que, na resolução desse problema, é necessário que o aluno estabeleça uma solução geral para, posteriormente, definir quantidades particulares para a sua solução. Isso dificultou o entendimento dos alunos. Assim, após encontrar a solução do sistema, que é possível e indeterminado, o professor estipulou um valor para a incógnita z para exemplificar um caso particular.

Em outras aulas, os professores mantinham as metodologias utilizadas, resolviam alguns exercícios como exemplos e depois pediam para que os alunos fizessem os demais. Ao explicarem a resolução dos problemas, os professores ressaltavam a importância de compreenderem o significado de cada variável, de apresentar uma resolução organizada e a ordem dos procedimentos na realização do escalonamento tradicional.

Enfatizamos que, nas demais aulas, os alunos apresentaram, de forma recorrente, erros envolvendo operações com números negativos, eles confundem e/ou esquecem de colocar sinais negativos no decorrer das operações e, conforme já citado, têm dificuldades na interpretação dos problemas.

Durante as observações, elencamos a recorrência dos seguintes aspectos:

- Uso de apostilas: relacionamos tal observação com a lógica capitalista que dita tendências na sociedade atual, inclusive na área educacional.
- Abordagem tradicional: ênfase na transmissão de conhecimentos, na reprodução de métodos e resolução de exercícios.

- Pouca ênfase (ou rapidez) dos professores ao ensinar os conhecimentos teóricos de sistemas de equações – maior ênfase dada ao método de resolução de sistemas e resolução de problemas.
- Dificuldade dos alunos: operações básicas (adição/subtração/multiplicação/divisão envolvendo números inteiros e racionais) – muitos erros envolvendo operações de números negativos, resolução de uma equação, interpretação do problema – relacionar o resultado da resolução de um sistema com a pergunta do problema, pouca representação de sistemas por gráficos (interpretação geométrica).
- O professor apresenta aos alunos diferentes métodos para resolver um sistema, e isso parece confundi-los. Muitos discentes gostariam de resolver sistemas pelo método da substituição, já aprendido no ensino fundamental, e não associam a utilização de um método a uma dada situação problema. Nesse sentido, o ensino dos métodos ocorre de maneira descontextualizada e não permite que o aluno desenvolva um raciocínio que o permita tomar uma decisão eficiente para resolver um problema.
- Concomitantemente com o ensino do método para resolver sistemas de equações, os professores abordam também sistema homogêneo e a discussão/classificação de sistemas. Ressalta-se que o tratamento desses conteúdos também ocorre de maneira descontextualizada.

As observações nos levaram a reflexões e buscas, no sentido de pensar as tarefas a serem realizadas no experimento didático-formativo. Observamos que as tarefas de estudo precisam contemplar a aprendizagem de pré-requisito e discussões teóricas sobre o conceito de Sistemas de Equações Lineares.

4.4.2 Diagnosticando a aprendizagem do conteúdo de sistema de equações lineares pelos alunos participantes da pesquisa

Neste tópico, apresentamos a análise do diagnóstico composto por um conjunto de problemas e exercícios sobre o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares com a intenção de identificar como os alunos “organizam” o seu pensamento algébrico e quais as suas dificuldades e facilidades no processo de resolução desses problemas, de modo especial em relação à formação do seu conceito teórico.

Participaram deste diagnóstico os alunos que, posteriormente, se interessaram em contribuir com o experimento didático-formativo. Neste momento, não caracterizamos esses alunos, o que será feito posteriormente, discutimos sobre os aspectos que se evidenciaram, de forma geral, o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Buscamos relacionar os problemas propostos às dimensões aritmética, geométrica e algébrica; além disso, incluímos itens oriundos do Exame Nacional do Ensino Médio.

Na análise das discussões e dos registros do diagnóstico, não associamos as falas e os textos a um estudante. Nas análises, evidenciamos a convergência e as particularidades dos resultados obtidos.

A **primeira questão proposta,** tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam representar por um procedimento geral um conjunto de tarefas (problemas particulares). Desse modo, visamos compreender como o aluno representa algebricamente uma situação-problema.

Figura 11 - Enunciado do exercício 1 do diagnóstico.

1. Utilize equações para representar as situações problemas a seguir, sabendo-se que não são conhecidos os preços de cada item:

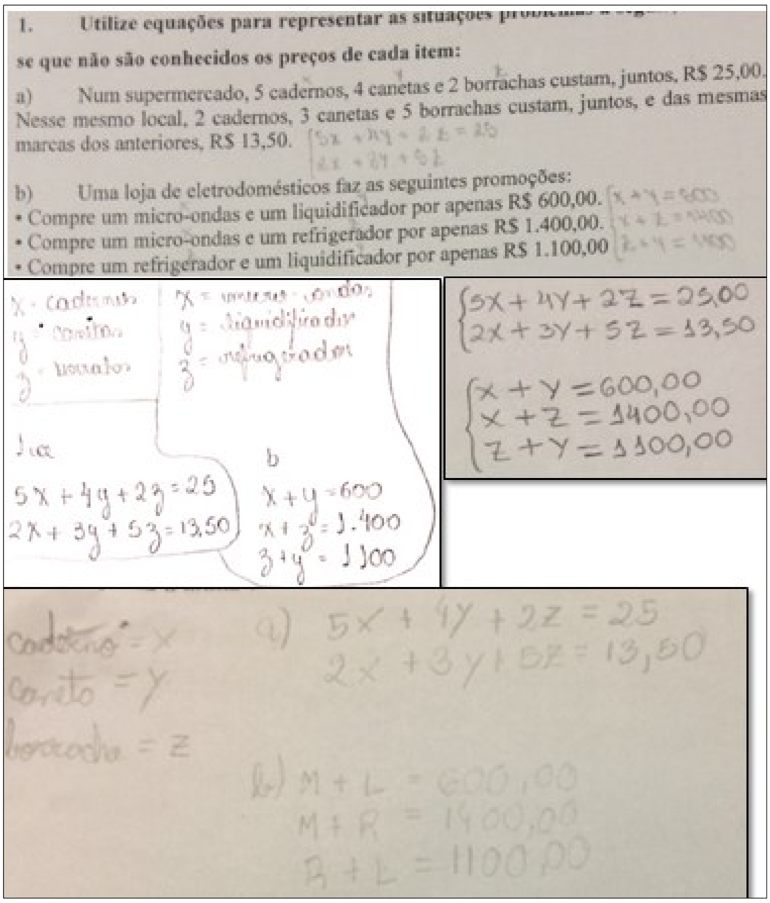
a) Num supermercado, 5 cadernos, 4 canetas e 2 borrachas custam, juntos, R$ 25,00. Nesse mesmo local, 2 cadernos, 3 canetas e 5 borrachas custam, juntos, e das mesmas marcas dos anteriores, R$ 13,50.

b) Uma loja de eletrodomésticos faz as seguintes promoções:
• Compre um micro-ondas e um liquidificador por apenas R$ 600,00.
• Compre um micro-ondas e um refrigerador por apenas R$ 1.400,00.
• Compre um refrigerador e um liquidificador por apenas R$ 1.100,00

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

O enunciado da primeira questão que compôs o diagnóstico representa um problema comum presente nos materiais didáticos escolares, contextualizado com realidades da vida cotidiano, porém, não necessariamente, que desperte o interesse dos alunos. Descreve uma situação-problema e avalia se os alunos conseguem representá-la algebricamente. A seguir, quatro respostas sobre a questão descrita.

Figura 12 - Registros dos alunos do primeiro exercício/problema do diagnóstico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Verificamos que os alunos não tiveram dificuldades em representar uma situação particular por um procedimento geral, eles conseguiram estabelecer com facilidade a relação entre a incógnita e o que ela representava, alguns alunos fizeram isso de forma direta (intuitiva).

Chamamos atenção para as letras que foram utilizadas para representar as incógnitas, no item *a* todos utilizaram x, y e z; no item *b*, apenas, um aluno utilizou as letras M, L R, inicias dos produtos para os quais precisava encontrar os preços. Usualmente, nas aulas de Matemática, os professores e os materiais didáticos induzem a recorrer às letras x, y z, para descrever uma situação algebricamente.

Não julgamos como certo ou errado qual letra melhor representa uma situação, analisamos a exigência de o aluno se restringir a um conjunto de letras e, assim, poder ter dificuldades num problema com um maior número de incógnitas. Evidenciamos a necessidade de compreender o que cada letra representa e suas relações com a modelagem do problema.

A segunda questão proposta visava analisar a capacidade do aluno em resolver tarefas (problemas) particulares por um procedimento geral. Desse modo, os conhecimentos a serem mobilizados para solucionar tais situações-problema iam além dos utilizados na questão anterior, e na qual era necessária apenas a representação algébrica. Essa questão é composta por 4 itens com diferentes níveis de dificuldades, sendo os itens a e b, um sistema de equações com duas incógnitas; o item c, com três incógnitas; e o item d, com três incógnitas e uma delas envolve, também, o cálculo com porcentagens.

Figura 13 - Enunciado do exercício 2 o diagnóstico

2. Resolva os problemas a seguir:

a) Num pátio de veículos existem automóveis e motocicletas. O número total de rodas é 150 e o número de motocicletas é o triplo do número de automóveis. Qual o número de veículos que se encontra no pátio?

b) A soma de dois números é 60 e a diferença é 12. Determine esses números.

c) Numa loja, os artigos A e B, juntos custam R$70,00. Dois artigos A mais um C custam R$105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R$ 5,00. Qual o preço do artigo C?

d) Um cliente fez um orçamento com uma cozinheira para comprar 10 centos de quibe e 15 centos de coxinha, e o valor total foi de R$ 680,00. Ao finalizar a encomenda, decidiu aumentar as quantidades de salgados e acabou comprando 20 centos de quibe e 30 centos de coxinha. Com isso, ele conseguiu um desconto de 10% no preço do cento do quibe e 15% no preço do cento de coxinhas, e o valor total da compra ficou em R$ 1.182,00. De acordo com esses dados, qual foi o valor que o cliente pagou pelo cento da coxinha? (Fonte: Adaptado, Exame Nacional do Ensino Médio, 2ª aplicação, 2014)

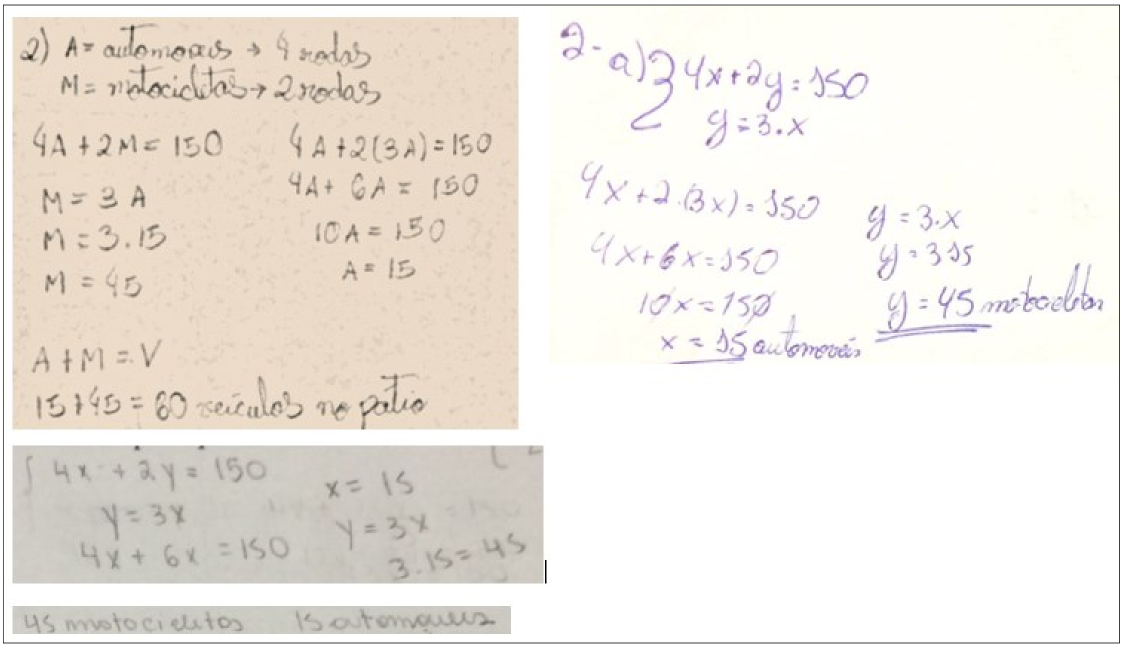
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Conforme já pode ser constatado na questão 1 do diagnóstico, os alunos não apresentaram dificuldades para representar algebricamente as situações descritas nos itens *a, b* e *c*. No entanto, quando tiveram que interpretar e representar um conjunto maior de informações, os alunos tiveram mais dificuldades. Ressaltamos que o item *d* é um problema que esteve presente no ENEM 2014 e que é pouco explorado nas aulas e nos materiais didáticos escolares.

Percebemos que os alunos, ao representarem algebricamente as situações-problema, o fazem de modo involuntário, não se atentando para diferentes condições, variáveis, que podem influenciar nesse processo. Em relação à resolução de cada item, analisamos as figuras de 14 a 17 a seguir.

Observamos que os alunos resolveram o item *a* com base no método de substituição, método conveniente para a situação apresentada, considerando que o problema contemplava duas incógnitas. Esse método é ensinado, inicialmente, no 7° ano do Ensino Fundamental e, posteriormente, revisto no ensino médio.

Figura 14 - Resoluções dos alunos do item a, exercício 2 do diagnóstico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Na figura 15, verificamos a resolução da alternativa *b*, em que era necessário também construir um sistema de equações lineares com duas incógnitas (2x2). Nesse problema, alguns alunos mantiveram a resolução pelo método da substituição, outros optaram pelo método da adição.

Observamos a preocupação dos alunos em resolver o sistema de equações sem dar significado à solução do sistema como resposta ao problema anunciado. Também não verificavam se o resultado encontrado estava correto, considerando o problema apresentado. Inferimos que as resoluções dos alunos ocorriam de forma automatizadas. Por exemplo, obtiveram como resultado $x = 36$ e $y = 24$ e não se preocuparam em testar as condições dadas – que a soma dos números era 60 e a diferença 12. Assim, os alunos poderiam verificar $36 + 24 = 60$ e $36 - 24 = 12$.

No item *c*, propunha-se uma situação-problema em que o aluno teria que montar um sistema com 3 incógnitas (3x3), assim, com um grau de dificuldade maior que o dos itens anteriores.

No processo de resolução, uma parte dos alunos apresentou dificuldade na representação algébrica do sistema. Consideraram confusa a parte do enunciado que dizia "dois artigos A mais um C custam R$105,00". Analisamos que isso ocorreu devido à falta de atenção na leitura e/ou à pressa para resolver o problema, pois modelaram algebricamente esse trecho como A + C = 105.

Sobre a resolução, chamou-nos a atenção o fato de os alunos utilizarem, majoritariamente, o método de substituição, visto que o problema tinha 3 incógnitas, sendo mais conveniente realizar um escalonamento. Além disso, no presente ano escolar, os alunos já haviam estudado Sistemas de Equações Lineares com 3 incógnitas e o principal método utilizado e recomendado pelos professores era o escalonamento.

Deste modo, esta constatação suscitou para posterior discussão a seguinte questão: por que a preferência e a recorrência da utilização de um método aprendido em anos anteriores, em detrimento da alternativa de resolução aprendida no corrente ano, que é considerada mais condizente com os sistemas lineares?

Nas resoluções, observamos que um dos alunos ao utilizar o método da adição cometeu erros em operações básicas, no tratamento das equações, simplificações, entre outros. Tais erros também foram verificados nas observações realizadas em salas de aula. No processo de formação de conceitos, a não apropriação dos pré-requisitos – juízos, pode revelar-se como barreiras na ascensão do particular ao geral.

No item *d*, os alunos precisaram elaborar um sistema de equações 2x2, além disso, no enunciado, sua interpretação requeria também conhecimentos sobre porcentagem. Nesse item, os alunos, em sua maioria, tiveram dificuldades em resolvê-lo. Nesse momento, a mediação do professor e pesquisador foi fundamental. Constatamos que a dificuldade dos alunos estava em representar o aumento percentual com as incógnitas, bem como as operações com números decimais e frações.

Novamente, os pré-requisitos foram elementos que impossibilitaram o desenvolvimento dos Sistemas de Equações Lineares. Entendemos que os "pré-requisitos" se apresentam, também, como conceitos que compõem o nó de uma rede. A ruptura ou a falha em um dos nós, provoca um "furo" que não permite avançar com segurança, antes que haja uma recuperação.

A terceira questão (Figura 17) tinha como objetivo verificar a capacidade do aluno em resolver Sistemas de Equações Lineares, independente de uma dada contextualização. Ou seja, dados dois sistemas, um com duas incógnitas e outro com três, o aluno teria que encontrar os valores de x, y e z. Nessa situação, os alunos estavam liberados da representação na linguagem algébrica, a partir de um enunciado na linguagem natural.

Figura 15 - Enunciado questão 3 do Diagnóstico

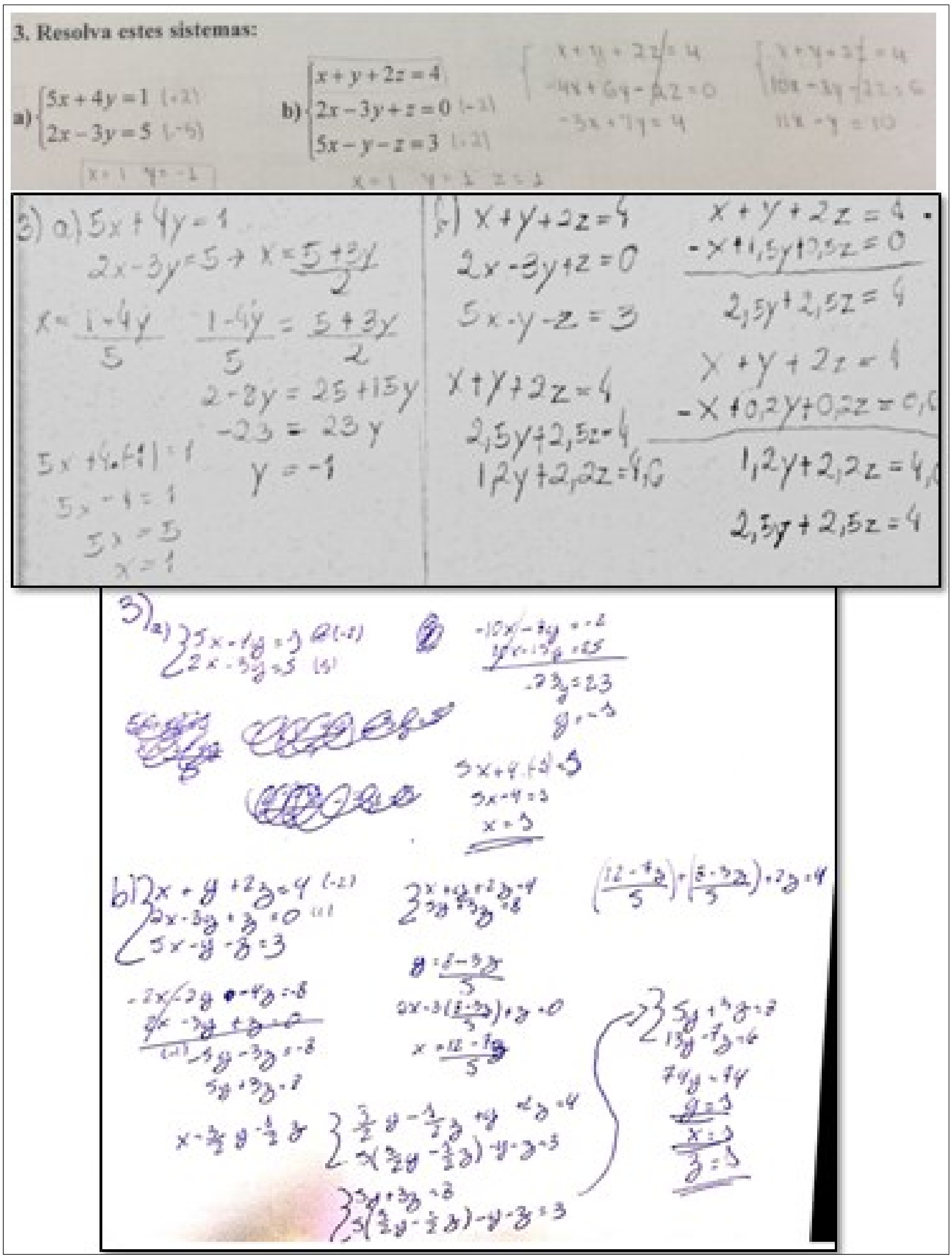
3. Resolva estes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 5x - y - z = 3 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Observamos que os alunos apresentaram mais facilidade, quando os exercícios se apresentavam de forma descontextualizada, pois eles não precisavam fazer a tradução de uma linguagem para outra – da natural para a algébrica, nem de identificar as variáveis e as condições estabelecidas entre elas. Para a resolução dos sistemas, foram utilizados os métodos de substituição e de adição. Na realização dos exercícios, os alunos observaram que algum deles resolviam "em poucas linhas", nesse momento teve a mediação do professor que discutiu com os alunos o porquê de utilizar um método em detrimento a outro.

Figura 16 - Resoluções do exercício 3 do diagnóstico.

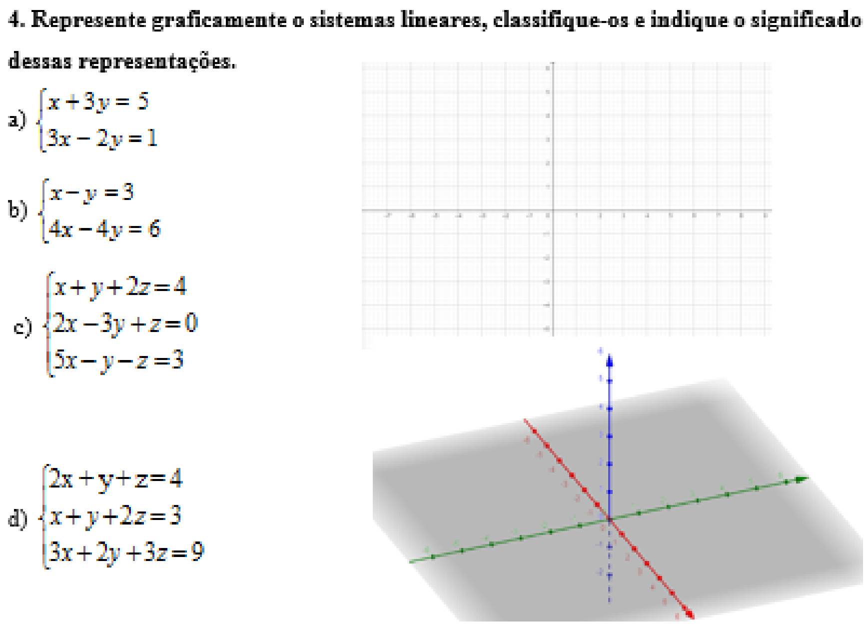


Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Nessa resolução destacamos, novamente, o fato de os alunos optarem por resolver o sistema com três incógnitas pelo método da substituição, embora tenham estudado no corrente ano o método do escalonamento. Aqui cabe lembrar que esse método exige uma elaboração mental dos alunos, pois envolve o conceito de sistemas equivalentes e de operações mais elaboradas, envolvendo as combinações lineares que vão conduzir à eliminação gradual das incógnitas.

No exercício 4 do diagnóstico (Figura 17), foi pedido aos alunos que representassem graficamente determinados sistemas lineares, classificando-os e indicando o significado dessas representações, sendo objetivo avaliar a capacidade do aluno em modelar geometricamente uma representação algébrica, conforme apresentado na figura a seguir.

Figura 17 - Enunciado questão 4 do Diagnóstico



4. Represente graficamente o sistemas lineares, classifique-os e indique o significado dessas representações.

a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-4y=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-y-z=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+y+2z=3 \\ 3x+2y+3z=9 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Ressaltamos que os alunos não tiveram a atenção ao comando desse exercício e a resolveram algebricamente, de forma semelhante aos exercícios anteriores, encontrando os valores das incógnitas.

Nesse sentido, com a mediação do professor eles se atentaram ao que era pedido no exercício. Os alunos não se recordavam de como eles poderiam representar graficamente os sistemas com duas incógnitas, contudo, com o auxilio do professor conseguiram relembrar sobre tais contéudos já estudados.

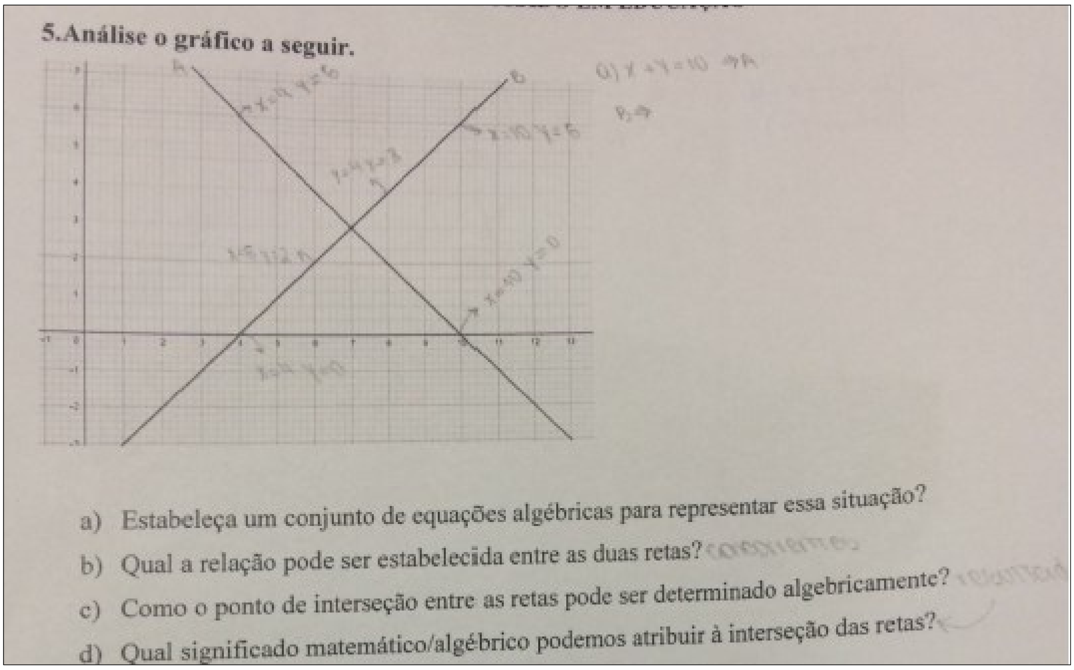
Ao constatar a dificuldade dos alunos, o professor utilizou o exercício para explicar e esclarecer as possíveis classificações dos sistemas lineares, com base nas representações gráficas. Os discentes relataram que na aprendizagem do referido conteúdo não foram exploradas as associações entre as representações gráficas e algébricas.

Em relação à representação de um sistema com três incógnitas os alunos relataram que não sabiam fazer e não haviam estudado. Propusemos tal questão considerando que de fato poucos alunos conseguiriam realizá-la, visto que, no ensino médio, não é abordado a representação gráfica em três dimensões, assim, tinhamos com objetivo fomentar a curiosidade dos alunos sobre a possibilidade de construir tal gráfico.

Na quinta questão do diagnóstico, tínhamos como objetivo verificar a capacidade do aluno em modelar algebricamente uma representação geométrica. Assim, apresentamos um gráfico e perguntamos para os alunos quais equações poderiam representar a situação, qual relação poderia ser estabelecida entre as retas, entre outras perguntas, conforme apresentado a seguir.

Observamos que apenas um aluno resolveu tal questão, precisando, ainda, da mediação do professor. O docente, constatando a dificuldade dos alunos, apresentou um conjunto de questionamento para recordarem o que haviam aprendido no ano anterior, estabelecendo relações com o conteúdo de funções.

Figura 18 - Exercício 5 do diagnóstico e resolução de um aluno.

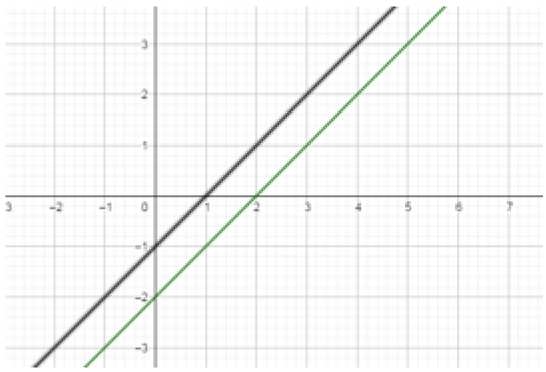


Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

De modo análogo, os alunos tiveram dificuldade em resolver a questão 6 do diagnóstico, apresentada na figura a seguir.

Figura 19 - Exercício 6 do diagnóstico.

6. Análise o gráfico a seguir.



a) Estabeleça um modelo algébrico para representar essa situação.

b) Qual a relação pode ser estabelecida entre as duas retas?

c) Qual o significado algébrico para essa relação?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

As questões que avaliavam a capacidade do aluno em modelar algebricamente uma situação gráfica e representar graficamente um sistema de equações lineares nos indicaram que o ensino escolar dá pouca ênfase na aprendizagem da representação das diferentes formas (aritmética, algébrica, geométrica) de um conteúdo. O conhecimento parece ser ensinado de forma fragmentada, pressupondo-se que não há relação entre álgebra e geometria.

Sobre representar os sistemas lineares graficamente, a professora, que estava presente na aplicação do diagnóstico, relatou que os alunos não conseguiram resolver tal questão, pois, no corrente ano, ela não havia ensinado. Tinha apenas comentado sobre essa possibilidade, visto que, no material didático dos alunos, a representação gráfica não era abordada.

Esse relato nos remete a pensar sobre a questão: como a organização dos conteúdos escolares, considerando seu movimento lógico-histórico, relaciona-se e desenvolve-se num contexto capitalista em que emerge o uso de materiais apostilados, com pressupostos que incluem outros interesses? Buscaremos discutir essa questão em outro momento deste texto.

O pesquisador, ao explicar as representações gráficas dos sistemas lineares e suas classificações, conforme a disposição das retas, ouviu de um aluno: *"Ah é? Não sabia disso"*. Após mais alguns exemplos ele relembra: *"Ah ... agora eu lembrei que a gente viu os gráficos no livro, mas a gente não fez nada"*. Esse relato confirma que os professores não dão ênfase no ensino das representações gráficas dos Sistemas de Equações Lineares.

A questão 7 do diagnóstico propunha uma discussão sobre o que os alunos pensaram no processo de resolução de Sistemas de Equações Lineares, conforme apresentado a seguir.

Figura 20 - Exercício 7 do diagnóstico

7. Sobre a resolução dos problemas anteriores, responda:

a) O que você pensou para resolver cada um dos problemas apresentados?

b) Quais componentes (elementos/evidências) de um problema que o permitem identificar a necessidade da construção de um sistema de equações lineares?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Ao final dos exercícios que compuseram o diagnóstico, conversamos com os alunos, com base nas questões da Figura 20, sobre quais suas percepções sobre o que foi realizado até o momento. Os alunos relataram que até a questão 3 estava "tranquilo": "*As que conseguimos fazer foi fácil, as dos gráficos foram mais difíceis*"

O pesquisador questionou aos alunos sobre o que eles pensam ao se depararem com aqueles tipos de problemas, eles relataram: "*Tipo, assim, penso em achar o resultado*". Outro aluno comentou: "*Penso em achar uma forma de estruturar a equação, tirar todas informações do exercício [...] o número total de elementos, no exercício de carros, atrás disso dá para montar uma equação para chegar no resultado*".

Um aluno, ao ver um problema associou como possibilidade fazer regra de três: "*nessa questão aqui eu já penso logo em meter uma regra de três, mas depois que eu leio devagar eu vejo que é montar (o sistema) e calcular.* Nesse sentido, o pesquisador questionou, o que diferenciava um sistema de equações e regra de três e como os alunos identificavam que um problema se tratava de um sistema, responderam: "*[...] identifico porque normalmente aparece uma mesma situação com duas coisas, só que no final da um valor diferente. [...]Muitas das vezes eu confundo achando que tem que fazer aquele negócio dos círculos, conjuntos. "[...]o problema não é nem a conta, é formar a conta"*. Essa fala nos permite inferir que o conhecimento é construído com base nos nexos externos, nas aparências. Tratam-se de conhecimentos empíricos.

Verificamos que as apropriações não chegam aos nexos internos. Não são construções teóricas. Faltam pré-requisitos ou a rede de conceitos tem nós desfeitos, os alunos confundem juízos e conceitos. Indicamos que a construção do pensamento foi feita de forma fragmentada ou, até mesmo não foi feita, pouco se relacionam as diferentes linguagens. No ensino, foca-se na resolução dos exercícios, não se discutem os conceitos– o objetivo central é achar o resultado, independente do que ele possa representar e de como isso será feito.

O diagnóstico nos alertou para uma revisão das tarefas de estudo do experimento, evidenciando sobretudo a necessidade de organizar o ensino de modo a criar condições para o desenvolvimento do pensamento teórico e estabelecer relações entre as representações algébrica e aritmética e geométrica, visando a construção de significados, numa relação estreita e dialética entre pensamento e linguagem. O diagnóstico revelou a necessidade de promover um processo de ensino para além da superficialidade do conhecimento e dos materiais didáticos apostilados, precisando desenvolver a capacidade de análise e síntese, ou seja, promover a elaboração do pensamento científico.

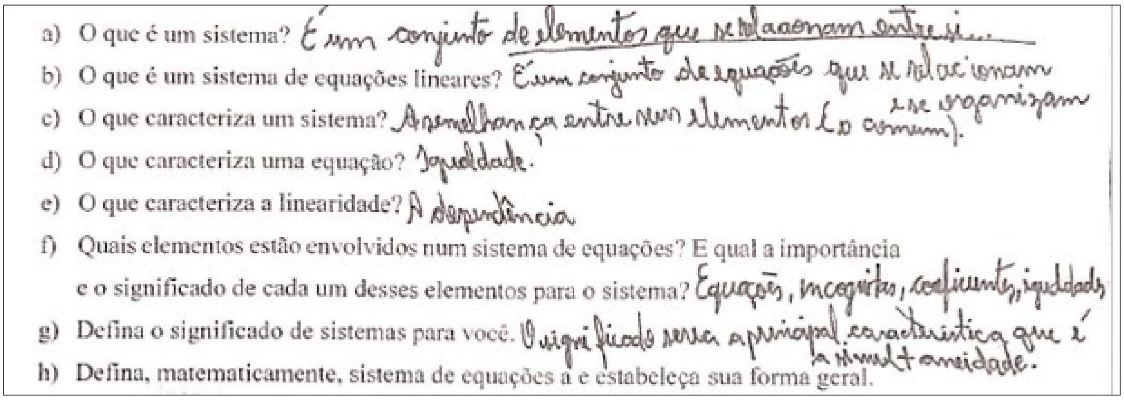
Embora as questões e problemas propostos compusessem uma atividade diagnóstica, a mediação do professor apresentou-se como recurso essencial para o seu desenvolvimento. No diagnóstico, optamos por exercer a mediação e ajudar os alunos a resolverem os problemas para observar como eles estavam construindo o pensamento e, assim, ter mais evidências para elaborar as tarefas de estudo.

Antes de iniciarmos as tarefas de estudo, como parte do diagnóstico, em um encontro com os participantes, buscamos com um conjunto de perguntas compreender o que os alunos sabiam sobre Sistemas de Equações Lineares, principalmente em relação ao seu conceito e juízos. Tínhamos o intuito de verificar as possíveis dificuldades dos alunos, explorando-as nas tarefas de estudo.

Notamos a dificuldade dos alunos em realizar esta tarefa, eles relataram que não tinham o hábito de pensar sobre os significados das palavras e conceitos, como incógnita, linearidade, tinham prática em resolver problemas. Em alguns momentos determinados alunos falavam que estava “chato” e perguntavam quando iriam “fazer contas”. Essa observação nos permite perceber a representação do “fazer matemático” que esses alunos construíram, dissociado de um pensar teórico.

Além de um diagnóstico, os questionamentos apresentados foram um momento para o professor/pesquisador iniciar um processo de reflexão com os alunos sobre o significado de determinados conceitos e juízos. Assim, realizaram os seguintes registros.

Figura 21 - Registro dos alunos sobre conceitos que envolvem Sistemas de Equações Lineares.



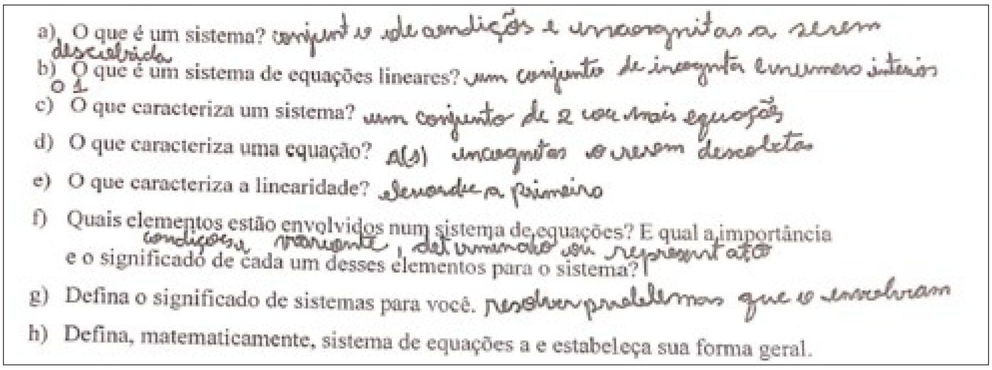
a) O que é um sistema? É um conjunto de elementos que se relacionam entre si...
b) O que é um sistema de equações lineares? É um conjunto de equações que se relacionam e se organizam
c) O que caracteriza um sistema? A semelhança entre seus elementos (o comum).
d) O que caracteriza uma equação? Igualdade.
e) O que caracteriza a linearidade? A dependência
f) Quais elementos estão envolvidos num sistema de equações? E qual a importância e o significado de cada um desses elementos para o sistema? Equações, incógnitas, coeficientes, igualdade
g) Defina o significado de sistemas para você. O significado seria a principal característica que é a simultaneidade.
h) Defina, matematicamente, sistema de equações a e estabeleça sua forma geral.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Sobre o significado de sistema os alunos compreendem que eles representa "um conjunto de elementos que se relacionam entre si" e quando questionamos de modo específico o que seria um sistema de equações lineares, evidenciam a presença do conjunto de equações. Observamos que as repostas foram apresentadas de forma sintetizada e espontânea, não explicitando um detalhamento sobre o significado de equações.

Também, nas respostas não identificamos a capacidade dos alunos de relacionar a "ideia" que eles têm sobre sistemas lineares com o concreto real, aquilo que eles vivenciam no seu cotidiano. A definição e/ou conceito se distancia daquilo que faz parte da realidade do aluno, podendo, assim, perder seu sentido e significado e engendrando a falta de motivação para aprender.

Figura 22 - Registro dos alunos sobre conceitos que envolvem Sistemas de Equações Lineares.



a) O que é um sistema? conjunto de condições e incognitas a serem descobertas
b) O que é um sistema de equações lineares? um conjunto de incognita e numero inteiros
c) O que caracteriza um sistema? um conjunto de 2 ou mais equações
d) O que caracteriza uma equação? a(s) incognitas a serem descobertas
e) O que caracteriza a linearidade? elevado a primeiro
f) Quais elementos estão envolvidos num sistema de equações? E qual a importância e o significado de cada um desses elementos para o sistema? condições, variante, determinado ou representado
g) Defina o significado de sistemas para você. resolver problemas que o envolvam
h) Defina, matematicamente, sistema de equações a e estabeleça sua forma geral.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Ao observamos as respostas dos demais alunos – conforme o da figura anterior, verificamos a predominância de respostas que convergem para aspectos superficiais – características externas do objeto. Os alunos apresentam dificuldades em discutir sobre os aspectos teóricos de Sistemas de Equações Lineares, isso nos remete a pensar sobre a formação dos conceitos empíricos.

> A formação de conceitos empíricos, por serem constituídos diante do esquema lógico-formal, *percepção-representação-conceito,* identifica os traços essenciais externos dos objetos. A abstração e a generalização decorrentes deste processo não ultrapassam os limites sensoriais de apreensão da realidade objetiva. Não expressam a especificidade dos conceitos científicos manifestos teoricamente (BERNARDES, 2012, p.172).

Inferimos que isso é decorrente da ênfase dada à resolução, à prática, e não ao processo de formação dos conceitos. Nas tarefas propostas, tratamos da formação e discussão desses conceitos, considerando que eles potencializam a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos e, consequentemente, contribuem para os processos de resolução e aplicabilidade desse conhecimento com eficiência.

A perspectiva de ensino-aprendizagem fundamenta na Teoria da Atividade de Estudo, a qual possibilita o desenvolvimento do pensamento teórico, ocorrendo no movimento do real ao concreto pensado e vice-versa. Não se trata de uma formação linear, mas dinâmica, contraditória e fruto de várias aproximações. Nas tarefas de estudo propõe-se a inclusão de reflexões sobre as características externas e, principalmente, internas do objeto em estudo; e como isso tecer contribuições para o ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares.

5. O DESENHO DO EXPERIMENTO: A VALIDAÇÃO E ORGANIZAÇÃO DAS TAREGAS E A CARACTERIZAÇÃO DOS PARTICIPANTES

Discutimos, neste capítulo, o processo que antecedeu a execução do experimento didático-formativo: preparação, planejamento, elaboração e validação da atividade de estudo e a caracterização dos participantes. Nesse percurso, situações previstas foram descartadas, alteradas e consolidadas, com base em observações da escola, da sala de aula, discussão com docentes, diagnóstico dos alunos e revisões teórico-metodológicas que fundamentam esta pesquisa. O processo ocorreu no movimento próprio do método.

5.1 Tarefas de Estudo: uma construção dialogada

As observações das aulas e a oportunidade de vivenciar o cotidiano dos alunos e professores, aproximando-nos e dialogando com a sua realidade nos deram subsídios para pensar em uma atividade para aprendizagem dos alunos que tivesse como pressupostos elementos da Teoria da Atividade de Estudo, desenvolvida por Davidov. A elaboração das tarefas de estudo de um experimento didático-formativo precisaria abranger o movimento lógico-histórico dos conteúdos escolares, orientar-se pelos pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam esta pesquisa, sem desconsiderar ainda os aspectos sociais, culturais, políticos, econômicos inerentes à realidade do aluno, ou seja, trata-se de uma atividade complexa.

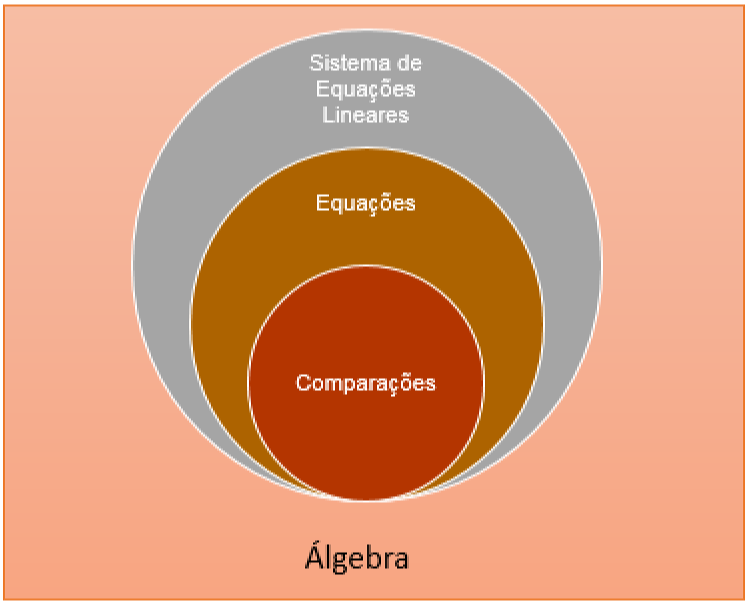
Iniciamos o processo de elaboração das tarefas que compuseram o experimento com o cuidado de considerá-las o cerne deste trabalho. Com base nelas, examinaríamos o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, verificaríamos os hiatos e as contribuições na forma e organização do ensino desse conteúdo. Assim, a elaboração das tarefas foi realizada envolvendo uma discussão contínua entre pesquisador e orientador, no movimento lógico-histórico desse conhecimento, nas produções científicas da área, na análise de documentos, nas avaliações (ENEM) e observações de aulas. Além disso, submetemos as tarefas para validação de um grupo de professores de Matemática da escola, *lócus* da pesquisa.

O movimento lógico-histórico da álgebra e do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares nos fez refletir sobre qual seria a melhor forma de organizar esse conhecimento visando um efetivo processo de ensino-aprendizagem no ensino médio.

Verificamos que para o entendimento dos Sistemas de Equações Lineares, assimilar o conhecimento sobre equações e a relação de comparação é imprescindível. No movimento histórico de sistemas lineares, as equações e as comparações foram conhecimentos que subsidiaram a sua evolução. Nesse sentido, no âmbito do ensino, podem ser considerados como conceitos essenciais para aprendizagem de sistemas lineares.

Na figura a seguir apresentamos, os conceitos e juízos centrais, os quais nos baseamos para a elaboração das tarefas de estudo: a relação de comparação, equações lineares e sistema de equações lineares, no contexto da álgebra.

Figura 23 - Conceitos e juízos que evidenciam o movimento lógico dos Sistemas de Equações Lineares.



Fonte: elaborado pelos autores, 2020.

Esperávamos que as tarefas de estudo proporcionassem aos alunos o desenvolvimento do pensamento teórico, aplicando os conceitos apropriados em situações reais do cotidiano (LIBÂNEO, 2004). Para tanto, de acordo com a Teoria da Atividade de Estudo é preciso que o aluno identifique a relação geral presente no objeto de estudo – Sistemas de Equações Lineares.

Assim, iniciamos, ao final do diagnóstico proposto, discussões sobre o qual seria a relação geral presente em um sistema de equações. Posteriormente, propusemos/orientamos que estabelecessem relações entre sistema de equações e comparações; e sistemas de equações e equações; uma aprendizagem de sistemas em que os alunos evidenciassem as conexões essenciais dos conceitos (comparações e equações) correlacionadas à essência de sistemas e à aplicação desse conceito nas situações particulares.

Após a elaboração das tarefas de estudo a serem desenvolvidas no experimento didático-formativo, foi realizada a validação das mesmas, mediante a exposição e discussão das tarefas, junto com os professores de Matemática das escolas que participaram da pesquisa e com os professores da Universidade - proponente desta pesquisa, que estudam a perspectiva teórica que orientaram a elaboração dessas tarefas. A validação contribuiu para aprimorá-las, acrescentar tarefas, para avaliar ações que não estavam sendo consideradas e contribuir para um processo formativo dos professores envolvidos.

5.2 Preliminares para a organização e análise das tarefas

O experimento foi organizado em três tarefas, cada uma delas visava o desenvolvimento de ações e operações essenciais para a formação do conceito de Sistemas de Equações Lineares.

Quadro 5 - Organização das Tarefas

Atividade de Estudo	Tarefas de estudo
O estudo de Sistemas de Equações Lineares no ensino médio	1) Comparações
	2) Equações
	3) Sistemas de Equações Lineares

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

As três tarefas propostas no experimento didático formativo são:

- Tarefa 1: Introduz a comparação como uma ação necessária ao humano, que acaba conduzindo à relação de igualdade e de desigualdade – Apêndice 7
- Tarefa 2: Trata o conceito de equação e seus juízos - Apêndice 8.
- Tarefa 3: Visa formar o conceito de Sistemas de Equações Lineares - Apêndice 9.

Assim, cada tarefa constitui-se como uma unidade de análise, que foram examinadas de acordo com as categorias: transformação dos dados da tarefa; modelação da relação universal; controle e avaliação como resultado da tarefa de aprendizagem, fundamentadas nos estudos de Davídov (1979/2019, p. 223):

> 1) a análise do material objetal com o objetivo de descobrir nele alguma relação geral que tenha uma conexão com várias manifestações desse material, ou seja, a construção da abstração e generalização substancial do conteúdo.
> 2) a dedução, sobre a base da abstração e a generalização, das relações particulares do material dado e sua unificação (síntese) em certo objeto integral, isto é, a construção de uma "célula" e o objeto mental concreto;
> 3) o domínio, nesse processo analítico-sintético, do modo generalizado de construção do objeto.

As Tarefas foram realizadas conforme cronograma apresentado no Quadro 6. A organização dos conteúdos foi elaborada considerando os alunos em seu desenvolvimento real e potencial. Desse modo, apresentamos o cronograma de realização do experimento didático-formativo.

Quadro 6 - Cronograma de realização do experimento didático-formativo

Data	Período	Ação
16/10/2018	11h – 12h	Convite aos alunos para participarem do Estudo
23/10/2018	13h30min– 15h30min	Apresentação da pesquisa e Diagnóstico
30/10/2018	13h30min– 15h30min	Continuação do Diagnóstico
06/11/2018	13h30min– 15h30min	Início da Tarefa 1
13/11/2018	13h30min– 15h30min	Continuação e conclusão da Tarefa 1
20/11/2018	-	Feriado
27/11/2018	13h30min– 15h30min	Início da Tarefa 2
04/12/2018	13h30min– 15h30min	Continuação e conclusão da Tarefa 2 e início da Tarefa 3
06/12/2018	13h30min– 15h30min	Continuação Tarefa 3
11//12/2018	13h30min– 15h30min	Continuação e conclusão da Tarefas 3 avaliação dos resultados das tarefas de estudo

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Durante a realização do experimento, o professor disponibilizava aos alunos, de forma impressa, as tarefas a serem realizadas naquele dia. O docente explicava o objetivo das tarefas e organizava os alunos em duplas e/ou trios. Em seguida, os alunos discutiam, entre eles, as formas de resolução das situações apresentadas e, de modo recorrente, solicitavam a mediação do professor. Posteriormente, o docente discutia com os alunos os resultados das tarefas e buscava potencializar o desenvolvimento do pensamento teórico.

Fundamentamo-nos no movimento lógico-histórico da álgebra, dos Sistemas de Equações Lineares, das equações e comparações, para entendermos a essência do conhecimento trabalhado nesta atividade de estudo.

A partir das pesquisas bibliográficas, documentais, das apropriações feitas até o momento da elaboração das tarefas, concluímos que o sistema de equações lineares tem no seu âmago as equações, que têm, por sua vez, como essência o ato de estabelecer comparações. Iniciamos, então, o processo de formação de conceitos com ações que proporcionassem aos alunos (re)conhecer a necessidade de estabelecer comparações, organizando os conteúdos, gradativamente.

Salientamos que, antes de propormos este experimento didático-formativo, foi objeto de discussão qual seria a sequência “ideal” para promover o processo de ensino-aprendizagem: já iniciar com tarefas especificamente sobre Sistemas de Equações Lineares ou trabalhar, primeiro, com elementos essenciais ou basilares para o entendimento desse conceito?

Entendemos que poderíamos então iniciar as tarefas do experimento por qualquer um dos nexos e/ou elementos essenciais para o entendimento do conteúdo estudado, desde que os mesmos não fossem apresentados de forma fragmentada e/ou desvinculados do foco da atividade de estudo: Sistema de Equações Lineares, buscando o que era geral neste conteúdo e o geral em cada um de seus componentes. Para tanto, a mediação do professor/pesquisador precisaria proporcionar e evidenciar a relação de tais nexos com o conceito de Sistemas de Equações Lineares na sua forma mais elaborada.

Ressaltamos, ainda, que desde do início do experimento os alunos conheciam os objetivos propostos pelo experimento didático-formativo e tinham ciência de que o foco das tarefas era promover a formação do conceito de Sistemas de Equações Lineares. Os alunos foram observados durante as aulas de Sistemas de Equações Lineares e antes do experimento fizeram um diagnóstico – com exercícios e discussões, sobre Sistemas de Equações Lineares. Desse modo, evidenciamos que desde o início do experimento estava evidente que o foco era Sistemas de Equações Lineares; assim, o experimento não começou, necessariamente, pelas tarefas que introduziam a ideia de comparações.

5.3 Validação das Tarefas de Estudo: a análise dos professores

Nesta seção, apresentamos a análise dos professores sobre as tarefas de estudo que seriam propostas para os alunos. Neste tópico, ainda não apresentaremos as tarefas de estudo, que podem ser vistas na integra nos Apêndices 7 ,8 e 9. Para facilitar a leitura, expomos neste momento os fragmentos principais das tarefas que desencadearam as discussões – esses, não necessariamente, tiveram alterações após as discussões estabelecidas.

Durante a validação, primeiro, o pesquisador exibiu sua proposta de pesquisa, salientando a importância da participação e contribuição dos professores, uma vez que conhecem a realidade sociocultural dos alunos, o cotidiano da sala de aula do Ensino Médio e o conteúdo matemático. Posteriormente, o pesquisador apresentou cada uma das tarefas de estudo, discutindo-as com os professores. Participaram destas discussões 6 professores de Matemática.

Em relação **à Tarefa 1 – estabelecer comparações,** uma professora ressaltou que a primeira situação-problema apresentava um contexto especificamente feminino, apresentamos um fragmento a seguir.

Figura 24 - Situação inicial proposta na tarefa 1, sobre estabelecer comparações

A) Vamos falar de Moda!!!

Quando nos vestimos muitas vezes bate aquela dúvida sobre qual é o melhor *look*. Experimentam-se muitas roupas até chegar a uma decisão. Nesse contexto, estes questionamentos são recorrentes:

- Qual o melhor look para uma determinada ocasião?
- O que leva (quais as condições) uma pessoa escolher uma determinada roupa em detrimento de outras? Quais ações ela realiza para escolher uma roupa?

)bserve a figura a seguir:

Fonte: http://www.agitonaarcapaulista.com.br/materias/nova-itgirl-cabbb-aline-da-dicas-para-escolher-o-look-em-cada-ocasiao/30

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Em relação à situação-problema da tarefa – figura a seguir, que envolve objetos concretos, um docente observou que as ações que compõem essa tarefa, de modo geral, careciam de um "ponta pé" inicial. Analisou que, talvez, o aluno não se localizasse nas situações como um todo. Outro professor ressaltou que a proposta tratava uma situação aberta, entendendo o objetivo de se verificar como comportaria o pensamento dos alunos.

Figura 25 - Situação proposta na tarefa 1, sobre estabelecer comparações.

- Como podemos comparar e/ou agrupar este conjunto de objetos? Agrupe os objetos a seguir.

- Quais critérios foram utilizados para o agrupamento dos objetos?
- O que caracteriza o(s) grupo(s) de objetos formados? Justifique.
- Podemos comparar esses grupos?
- O que nos permite realizar comparações entre grupos distintos?
- Podemos estabelecer critérios para facilitar as comparações entre grupos de objetos? Quais seriam?
- Elabore/Relate momentos em que você necessita realizar um agrupamento de objetos.
- Elabore/Relate situações em que comparamos grupos de objetos de forma equivocada.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

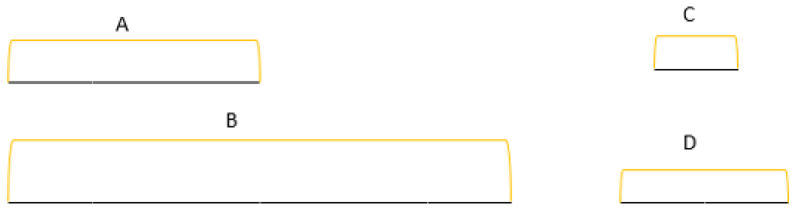
A professora orientadora da pesquisa, que também participou desse momento de validação, chamou a atenção para o sentido das tarefas, ressaltando que elas buscam evidenciar a essência do conteúdo, para além da contextualização. Outras professoras corroboram com isso, salientando que isso é importante, uma vez que é recorrente os alunos perguntarem o porquê de estudar um determinado conteúdo. Além disso, disseram que essa essência está intrínseca ao processo de ensino-aprendizagem e passa despercebida aos professores.

A orientadora observou, também, que na tarefa 1 há momentos em que os alunos já modelam algebricamente, quando um professor destaca que ainda não viu a modelagem aritmética. Ela considera que, para alguns exercícios, a abordagem aritmética caberia bem no diagnóstico. A professora orientadora ressaltou a importância histórica da linguagem algébrica, o caminho do aritmético para o algébrico, a tentativa e erro.

A **Tarefa 2** envolveu conteúdos relacionados à equação, conforme apresentado na figura a seguir.

Figura 26 - Situação proposta na tarefa 2, sobre equações

Análise as figuras a seguir



a) Estabeleça algebricamente todas as relações de igualdade possíveis, em relação aos comprimentos, dos segmentos apresentados.
b) Com base nas relações estabelecidas, pode-se expressar uma representação geral.
c) Considere a generalização $A = \boldsymbol{n}D$ ou $A/\mathbf{n} = D$, quais os significados de A, B e $\boldsymbol{n}$.
d) Com base nessa tarefa, o que você entende por equação?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Os professores analisaram que as questões presentes nela estavam um pouco “soltas”. Observaram que não se falou explicitamente de equação, sugeriram repensar na relação entre as perguntas e uma situação desencadeadora.

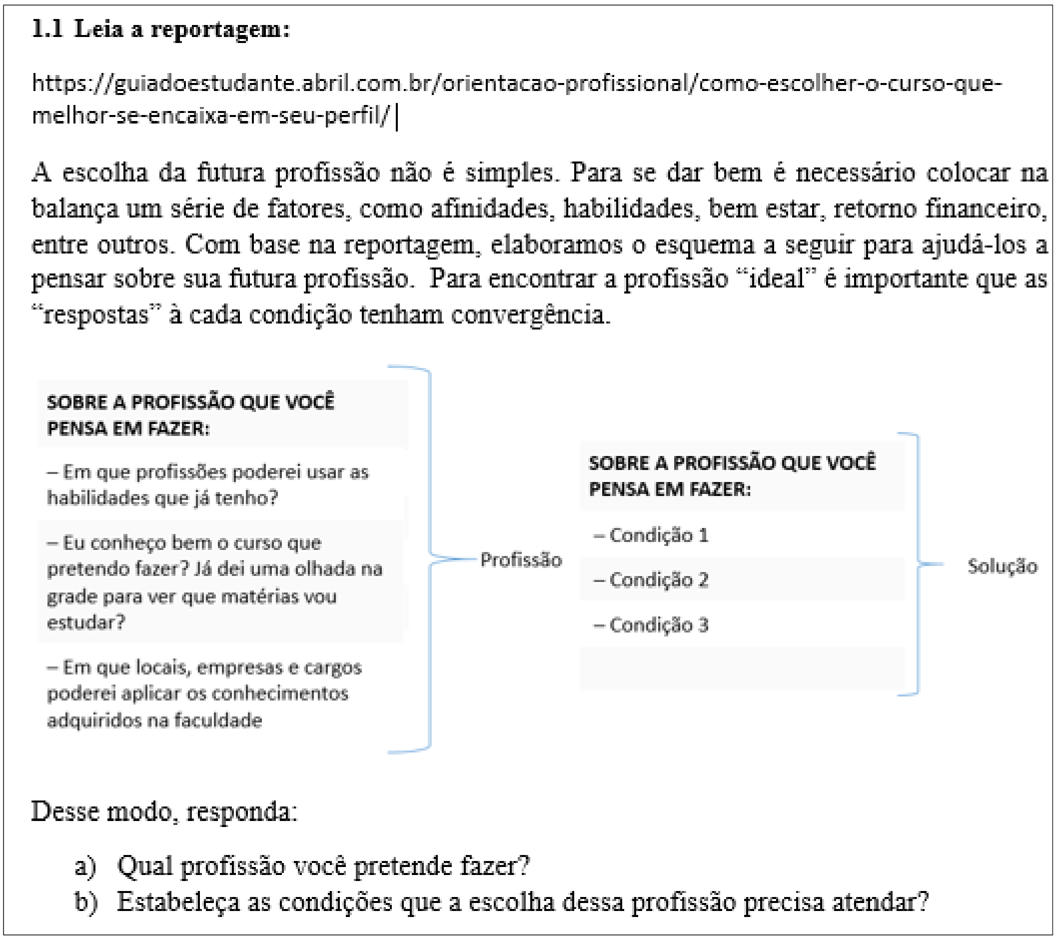
Indicaram algumas perguntas que poderiam melhorar o conteúdo da tarefa: estabeleça relações observadas? Dentre essa alguma é representada por igualdade? E, então, colocar uma explicação sobre o princípio da igualdade e a equação. E ao reestruturarem essa tarefa, pensar e indagar-se: Qual é essência da equação? Igualdade, incógnitas e coeficientes, então, se isso envolve o conceito de equação tais conhecimentos precisam ser avaliados. Além disso, pode-se questionar também: a equação pode ter mais de uma incógnita?

Os professores ressaltaram que as tarefas propostas precisariam articular, gradativamente e precisamente. De modo que as imagens apresentadas, os conceitos, as perguntas, entre outros aspectos, não podem ser apresentadas de maneira fragmentada, sem conduzir o pensamento do aluno para o desenvolvimento do conceito da equação.

Nessa tarefa, observaram que as representações, algébrica e geométrica, e a noção de linearidade podem ser melhor exploradas. No que tange à dimensão aritmética, como já comentado na análise do diagnóstico, os alunos podem indicar valores numéricos para solucionar problemas, e esses valores podem ser representados graficamente, destacando algumas noções de linearidade e de função.

Um dos itens da **Tarefa 3,** que aborda o desenvolvimento do conteúdo de sistema de equações lineares, pode ser observado na Figura 27, na qual se explora a simultaneidade de condições, pois esse é um conceito importante na rede conceitual de sistema.

Figura 27 - Situação proposta na tarefa 3, sobre Sistemas de Equações Lineares.



1.1 Leia a reportagem:

https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/como-escolher-o-curso-que-melhor-se-encaixa-em-seu-perfil/

A escolha da futura profissão não é simples. Para se dar bem é necessário colocar na balança um série de fatores, como afinidades, habilidades, bem estar, retorno financeiro, entre outros. Com base na reportagem, elaboramos o esquema a seguir para ajudá-los a pensar sobre sua futura profissão. Para encontrar a profissão "ideal" é importante que as "respostas" à cada condição tenham convergência.

Desse modo, responda:

a) Qual profissão você pretende fazer?
b) Estabeleça as condições que a escolha dessa profissão precisa atender?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Um docente questionou sobre esse exemplo inicial, uma vez que os sistemas diziam respeito a valores quantitativos e o exemplo trata de condições qualitativas. Considerando a ideia de simultaneidade, outra professora achou interessante a problematização ao associar a ideia de sistema a situações do cotidiano.

Sugeriram simplificar a linguagem e apresentar orientações mais claras para os alunos, de modo a facilitar a compreensão sobre o significado das diferentes condições em um sistema. Ressaltaram que a simultaneidade está na essência da solução de um sistema de equações, sendo que as equações traduzem as condições, mas uma condição não exclui a outra.

Consideraram que faltou explorar, explicitamente, a simultaneidade, no problema inicial. Apresentaram a necessidade de enfatizar uma resposta que satisfizesse as três condições. Sugeriram enunciar as profissões e discutir quais as possíveis relações com sistemas, bem como relacionar a situação-problema com sistemas impossível, possível determinado e possível e indeterminado. Analisaram que as tarefas poderiam conduzir à formação dos conceitos, pois as ideias estavam criativas.

Outro aspecto discutido foi sobre a ideia de equações equivalentes, e de sistemas equivalentes, os professores consideraram que esses "conceitos" teriam que ser enunciados de forma conjunta com a sua definição, visando a essência de "equivalência". Julgaram que a tarefa de sistema de equações lineares necessitava de maior ligação entre as "atividades/exercícios" e que poderiam abordar os conteúdos e seus graus de dificuldade de modo gradativo.

Após as análises realizadas e sugestões apresentadas por esses professores, alteramos o diagnóstico proposto aos alunos e as tarefas que compuseram o experimento, delineando as possíveis ações que os alunos teriam que desenvolver o conteúdo teórico estudado em seu movimento lógico-histórico.

5.4 A caracterização dos alunos e as suas atitudes em relação à Matemática

Antes de propormos as atividades de estudo aos alunos, realizamos um diagnóstico sobre o que os alunos pensavam sobre a Matemática, álgebra, Sistemas de Equações Lineares, evidenciando o que aprenderam, suas dificuldades, entre outros.

Um dos instrumentos utilizados foi um questionário com o propósito de entendermos as atitudes dos alunos em relação à Matemática/álgebra. O termo *atitude* relaciona-se com as ações dos sujeitos engendradas por características psicológicas. Brito (1996, p.11) ressalta que a atitude diz respeito a uma disposição pessoal, influenciada pelas experiências dos indivíduos e com componentes afetivo, cognitivo e motor.

Pressupúnhamos que entender as atitudes dos alunos em relação à Matemática/álgebra poderia contribuir significativamente para o desenvolvimento do experimento didático-formativo, visto que a dimensão psicológica se relaciona com a efetividade do processo de ensino-aprendizagem.

Nesta perspectiva, utilizamos um questionário formatado com proposições de uma escala de atitudes em relação à Matemática, elaborado e validado por Brito (1996), visando medir as atitudes em relação à Matemática, desconsiderando proposições sobre o trabalho do professor e as atividades de ensino.

No quadro a seguir, apresentamos as afirmativas que os alunos analisaram com o percentual de respostas. Esse questionário foi respondido por 12 alunos, 7 da escola privada e 5 da escola pública. Verificamos que os alunos têm uma atitude positiva em relação à Matemática. No entanto, não podemos inferir que ter uma atitude positiva em reação à Matemática, revela uma facilidade no processo de ensino-aprendizagem da álgebra.

Quadro 7 - Atitudes dos alunos participantes em relação à Matemática.

	ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA	A - Concordo Totalmente	B – Concordo Parcialmente	C- Nem concordo nem discordo	D – Discordo Parcialmente	E - Discordo Totalmente
1	Eu fico sob uma terrível tensão na aula de Matemática.	1	2	1	1	7
2	Eu não gosto de Matemática e me assusta ter fazer essa matéria.	1	0	0	3	8
3	Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.	7	3	3	0	0
4	Matemática é fascinante e divertida.	2	6	1	1	2
5	A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo estimulante.	3	2	3	2	2
6	“Dá um branco” na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo Matemática.	1	4	1	3	3
7	Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	3	2	0	4	3
8	A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.	2	1	1	2	6
9	O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.	7	2	1	1	1
10	A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.	2	1	0	3	6
11	A Matemática é algo que aprecio grandemente.	3	4	3	1	1
12	Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	2	1	0	2	7
13	Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.	4	2	1	1	4
14	Eu gosto realmente de Matemática.	5	4	1	1	1
15	A Matemática é uma das matérias que realmente eu gosto de estudar na escola.	5	4	1	1	1
16	Pensar na obrigação de resolver um problema Matemática me deixa nervoso(a).	1	5	2	2	2
17	Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que mais me dá medo.	2	0	0	3	7
18	Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.	2	2	4	2	2
19	Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.	3	5	3	0	1
20	Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: eu gosto e aprecio essa matéria.	5	3	1	2	1

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Notamos que as afirmativas, que descreviam uma situação negativa em relação à Matemática, como: *"Eu fico sob uma terrível tensão na aula de Matemática"; "Eu não gosto de Matemática e me assusta ter fazer essa matéria; Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente"; "A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída"; "Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão"; "Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que mais me dá medo";* não tiveram concordância dos alunos, ou seja, ele não veem a Matemática como algo distante da sua realidade e como desprezível.

Os alunos gostam de Matemática, das aulas e tem uma relação positiva com essa matéria. Ter uma atitude positiva e gostar de estudar esse conteúdo pode contribuir com a aprendizagem, visto que os alunos se propendem a ter mais interesse e iniciativa nas tarefas de estudo.

Ressaltamos que 6 (seis) alunos participaram integralmente do experimento[12], sendo (3) três de cada sexo. Nos diálogos os alunos estão identificados pelos pseudônimos: *Amanda, Nathália, Beatriz, Gabriel, Miguel e César*.

- **Amanda:** Tem 16 anos, a escolaridade do seu pai é ensino Fundamental Incompleto e de sua mãe Ensino Médio completo. Ela tem uma atitude positiva em relação à Matemática. Gosta das aulas de Matemática, considera o conteúdo estimulante e assinala que é um dos componentes que mais gosta de estudar na escola. Não tem muita dificuldade com esse conteúdo.
- **Nathália:** Tem 17 anos, a escolaridade do seu pai e de sua mãe é Ensino Superior incompleto. Ela também apresenta uma atitude positiva em relação à Matemática. Realmente gosta da matéria, porém, em alguns momentos sente uma sensação de insegurança ao aprender um conteúdo "novo".
- **Beatriz:** Tem 16 anos, a escolaridade do seu pai e de sua mãe é Ensino Médio completo. Ela tem uma atitude positiva em relação à Matemática, no entanto, tem um pouco de dificuldade. Tem preferência por outras áreas do conhecimento.
- **Gabriel:** Tem 16 anos, a escolaridade do seu pai é Ensino Fundamental Incompleto e de sua mãe Ensino Médio Completo. Ele gosta de Matemática, mas se apresenta ansioso ao resolver os problemas. No questionário respondido, ao

[12] Tivemos 6 (seis) alunos assíduos durante todo o experimento no colégio privado.

mesmo tempo que ele tece o interesse pela matéria, considera que sente certa aversão quando escuta essa palavra.

- **Miguel:** Tem 17 anos, a escolaridade do seu pai é Ensino Médio Completo e de sua mãe Pós-Graduação Completa. Ele gosta muito de Matemática e das aulas desse conteúdo, considera que é um dos componentes curriculares de que mais gosta na escola. No entanto, reconhece que alguns problemas matemáticos não são fáceis.
- **César:** Tem 16 anos, a escolaridade do seu pai e de sua mãe é de Pós-Graduação Completa. Ele é muito amigo de Miguel, também gosta muito de Matemática e das aulas desse conteúdo, contudo, reconhece que tem dificuldade pare resolver alguns exercícios/problemas.

6 – O DESENVOLVIMENTO DAS TAREFAS DE ESTUDO E DO PENSAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, analisamos os dados obtidos durante o desenvolvimento das tarefas de estudo. Organizamos as análises em três tópicos, cada um deles diz respeito a uma tarefa – já apresentada. Buscamos evidenciar o objetivo de cada tarefa, as ações dos alunos, as apropriações dos juízos e conceitos estudados e a mediação do professor. Ao final das atividades, solicitamos que os alunos respondessem um questionário sobre suas percepções em relação ao experimento didático-formativo, apresentando contribuições, dificuldades e sugestões de melhorias.

6.1. As comparações como uma relação geral do estudo de Sistemas de Equações Lineares

A Tarefas 1 teve como propósito introduzir o conceito de sistema linear, evidenciando que uma relação geral desse conhecimento são as comparações. Organizamos um conjunto de ações para serem desenvolvidas pelos alunos, vinculando-as ao objetivo desta pesquisa. Abordou o conhecimento sobre comparações, considerando os juízos e conceitos que são essenciais à apropriação de Sistemas de Equações Lineares.

Quadro 8 - Visão Geral das ações e objetivo das Tarefas 1.

O estudo de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio **Conjunto de Tarefas 1 –** Introdução da ideia de comparação como uma ação necessária ao humano e à apropriação de sistemas		
Tarefa 1	**Ações**	**Objetivo**
1.1 - Vamos falar de Moda! **1.2 -** Qual a sua preferência?	Reconhecer a necessidade de comparação em situações do cotidiano. Evidenciar elementos ou critérios que fundamentam uma comparação.	Verificar se o aluno consegue compreender a importância e a necessidade de se estabelecer comparações, evidenciando-a como uma ação desenvolvida historicamente e presente no nosso cotidiano.
1.3 - A Ideia da Comparação na história da matemática **1.4 -** E os grupos de WhatsApp?	Identificar as relações gerais em casos particulares. Apreender a característica geral do objeto estudado	Verificar se os alunos identificam a característica geral de tarefas particulares, num movimento de abstração e generalização substanciais e a sua capacidade de aplicá-la em uma nova tarefa, visando solucioná-la por um procedimento geral.

1.5 e 1.6 - Atividade com os Blocos Lógicos **1.7 -** Estabelecendo comparações	Estabelecer critérios de comparação Estabelecer relações entre o concreto e o abstrato	Compreender, inicialmente, o processo de formação de conceitos – especificamente o grau de abstração do pensamento dos alunos, relacionando com os estudos de Vigotski (2001) e Davídov (1988) Constatar se os alunos conseguem criar grupos considerando critérios (condições) específicas (ordenar, medir, calcular, comparar) e estabelecer uma relações, num movimento do concreto ao abstrato.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A primeira ação desta tarefa de estudo, como apresentado, visou analisar a capacidade do aluno de estabelecer comparações em situações do cotidiano.

Ao revelarmos que as comparações são uma característica geral do sistema linear e das equações, procuramos identificar nesse conhecimento as necessidades da atividade humana que engendram as ações de comparações. Assim, apresentamos situações-problema presentes na realidade concreta do aluno que requerem motivos para se estabelecer comparações (DAVIDOV, 1988).

A primeira tarefa apresentada, enunciada como “*Vamos falar de moda”* abordou uma situação corriqueira do nosso cotidiano que se refere à escolha de uma vestimenta. Nesta tarefa tínhamos como expectativa que os alunos se identificassem com o exemplo apresentado, vislumbrando quais critérios utilizariam para escolher uma roupa.

Figura 28 - 1.1, “Vamos falar de moda".

1) **Vamos falar de Moda!!!**

Quando nos vestimos muitas vezes bate aquela dúvida sobre qual é o melhor *look*. Experimentam-se muitas roupas até chegar a uma decisão. Nesse contexto, estes questionamentos são recorrentes:

- Qual o melhor look para uma determinada ocasião?
- O que leva (quais as condições) uma pessoa escolher uma determinada roupa em detrimento de outras? Quais ações ela realiza para escolher uma roupa?

Observe a figura a seguir:

Fonte: http://www.agitonazarepaulista.com.br/materias/nova-itgirl-exbbb-aline-da-dicas-para-escolher-o-look-em-cada-ocasiao/30

Discuta com seus colegas:

a) O que seria determinante para uma pessoa escolher especificamente um dos looks da imagem anterior?

b) Quais ações (condições/fatores) que podem contribuir no processo de escolha de uma roupa?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Do mesmo modo, na tarefa denominada “Qual a sua preferência”, orientamos os alunos a pensarem nas escolhas que realizam a todo instante, considerando que uma escolha tem como pressuposto uma comparação. Em cada uma delas, propusemos um conjunto de questionamentos que direcionavam os estudantes a evidenciarem as características gerais das ações executadas. Além disso, o professor a todo instante procurava estabelecer a relação das tarefas com o conteúdo de sistemas lineares.

Ensinar Sistemas de Equações Lineares, partindo dos conhecimentos-base desse conteúdo – sendo um deles, o de comparação, de modo articulado com a realidade do aluno, como concreto real, inicia-se por uma atividade sensorial que “[...]é capaz de captar a totalidade do objeto, a presença, nele, de conexões que no processo de conhecimento conduzem à universalidade. Mas a contemplação e a representação não podem estabelecer o caráter interno destas conexões” (DAVÍDOV, 1988, p.142).

O referido autor observa que a psicologia tradicional recomenda aos professores a utilização de experiência empírica cotidiana como alternativa para a familiarização e melhor compreensão dos conhecimentos escolares, porém, muitas vezes estimulando o conhecimento empírico.

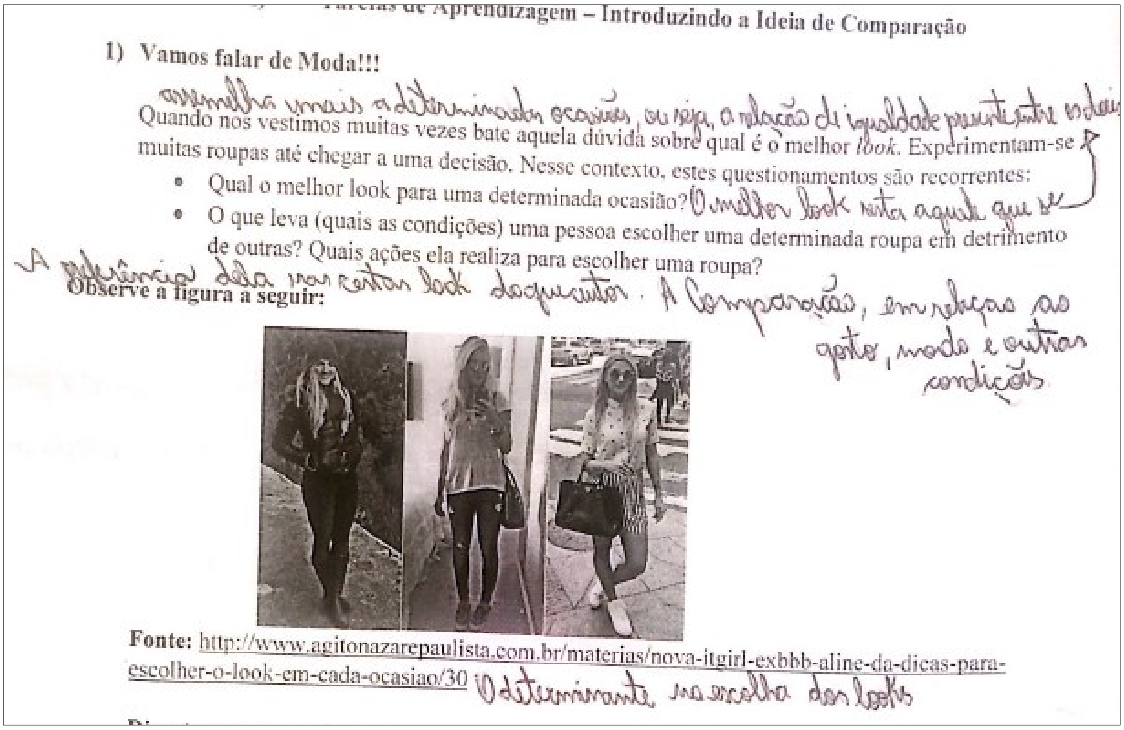
Kopnin (1988) analisa que os conceitos das ciências surgem da atividade prática do homem e, além disso, nascem da necessidade de desenvolvimento das outras ciências. Por exemplo, na matemática determinados conceitos estão estritamente ligados à prática social, outras são fundamentais para o desenvolvimento da própria matemática e de outras ciências.

Nesta perspectiva, procuramos elaborar esta tarefa de estudo partindo do concreto real, almejando conduzir os alunos à abstração e generalização substanciais. Partindo de atividades recorrentes do cotidiano, desvelando motivos essenciais para a aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares.

Os registros dos alunos que se referem à tarefa "Vamos falar de moda", nos mostraram que a escolha de um "look" está relacionada a uma determinada ocasião que vai ser vivenciada, a preferência da pessoa – gosto, que são sustentadas por critérios de comparação, conforme apresentada na figura a seguir. Nas discussões dos grupos foram abordados quais aspectos seriam determinantes para escolha de uma roupa, conforme os registros, eles consideraram o gosto, a preferência, a ocasião.

Sobre o questionamento: "Quais as ações e condições e fatores levam a pessoa a conhecer o l*ook*?" Gabriel observou que para escolha de um determinado *look* deveria ser observado a semelhança, a igualdade. Segundo o aluno, o que leva a pessoa a escolher o look: *"Matematicamente o que essa pessoa se assemelha com a roupa, a igualdade presente entre as duas, que fazem as duas se relacionarem, como as equações" (Gabriel, 2018).*

Figura 29 - Registro do Gabriel, "Vamos falar de moda".


Tarefas de Aprendizagem – Introduzindo a Ideia de Comparação

1) Vamos falar de Moda!!!

assemelha mais a determinada ocasião, ou seja, a relação de igualdade presente entre as duas

Quando nos vestimos muitas vezes bate aquela dúvida sobre qual é o melhor *look*. Experimentam-se muitas roupas até chegar a uma decisão. Nesse contexto, estes questionamentos são recorrentes:

- Qual o melhor look para uma determinada ocasião? O melhor look seria aquele que se
- O que leva (quais as condições) uma pessoa escolher uma determinada roupa em detrimento de outras? Quais ações ela realiza para escolher uma roupa?

A preferência dela por certos look adequados. A Comparação, em relação ao gosto, moda e outras condições

Observe a figura a seguir:

Fonte: http://www.agitonazarepaulista.com.br/materias/nova-itgirl-exbbb-aline-da-dicas-para-escolher-o-look-em-cada-ocasiao/30 O determinante na escolha dos looks

Fonte: Registro da Tarefa, 2019.

Durante essa tarefa o professor a todo instante exerceu a função de mediação, respondendo às dúvidas dos alunos e orientando-os e na busca das evidências das relações gerais nas tarefas trabalhadas.

No final dessa tarefa, o professor, discutiu essa atividade com os alunos:

> Professor: Qual o melhor *look* para uma determinada ocasião?
> Miguel e César: Depende!
> Professor: Depende de que?
> Miguel e César: Determinadas condições.
> Professor: Quais condições?
> Miguel e César: A cultura, a região, o clima, o gosto, a moda, a região. [...] uma escolha está sempre associada às condições (Experimento, 2018).

O professor, ao questionar fatores que orientavam a escolha de determinada roupa, iniciou um movimento de fomentar a busca pelo geral. Assim, após esses questionamentos, analisou, com os alunos, o porquê de a "*cultura, a região, o clima, o gosto, a moda, a região*" poderem ser condições determinantes para a escolha de uma vestimenta e o que esse conjunto de palavras tinha em comum. Como os pressupostos da teoria que orientam as tarefas de estudo não são fundantes no ensino brasileiro, o professor/pesquisador teve o cuidado de orientar as tarefas, visando o desenvolvimento da abstração, dedução e síntese.

Os registros e diálogos sobre a tarefa que questionou os alunos sobre suas preferências consolidou a tarefa que visou dar significado às comparações, como ações recorrentes do dia a dia dos alunos.

Figura 30 - 1.2 - "Qual a sua preferência".

2) Qual a sua preferência

Qual a sua preferência?

1) ( ) Facebook ou ( ) Instagram
2) ( ) Twitter ou ( ) Snapchat
3) ( ) Youtube ou ( ) Netflix
4) ( ) Táxi ou ( ) Uber
5) ( ) Spotify ou ( ) Deezer

a) O que você levou em consideração para a escolha de cada uma de suas preferências?
b) As preferências escolhidas foram realizadas tendo como base duas opções, sendo a **comparação** uma ação necessária nessa atividade. Durante as escolhas poderíamos indicar que uma preferência é melhor, pior ou igual que outra. Desse modo, o que caracteriza uma comparação? Existem elementos matemáticos que estão presentes durante o exercício dessa ação?
c) Discuta com seus colegas outras situações em que são necessárias exercer comparações e que a matemática esteja presente.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Nesse sentido, os alunos discutiram quais as redes sociais de sua preferência, observaram que utilizavam mais o Uber do que o Taxi devido ao preço, avaliavam que o Uber é mais barato, disse o aluno 1: "*Uber eu uso mais que taxi, porque é mais barato. (Risos) A vida é feita do mais barato, senão for o Uber, é o 99"* (Miguel, 2018).

Verificaram que, na comparação dos aplicativos de música, o *deeze*r[13] seria melhor pois é mais prático quanto à disponibilidade da letra da música, pois nela aparece o *App* como Karaokê, discutiam: "*Entre spotify e deezer, tenho somente spotify"*, ressaltava o César; enquanto seu colega – Miguel, observava: "Eu já fico nos dois, e mano, a única diferença que eu vi entre os dois é que as letras do *deezer*, são melhores que do *spotify* (...) pois aparecem uns comentários na letra".

Para o registro e a elaboração das respostas, os alunos expressaram uma preocupação em basear suas respostas no estudo da matemática. Os alunos passaram a discutir os itens *a, b* e *c* da referida questão. Quanto aos fatores que levaram em consideração para escolha das preferências chegaram à conclusão: *"é tipo o seu uso,*

[13] O *deezer é* uma tecnologia que envia informações multimídia que as pessoas utilizam para ouvir músicas.

preço, frequência de uso, a qualidade [...], a funcionalidade também" (Miguel, 2018). Nos registros, também assinalaram o "gosto", a utilidade e a praticidade.

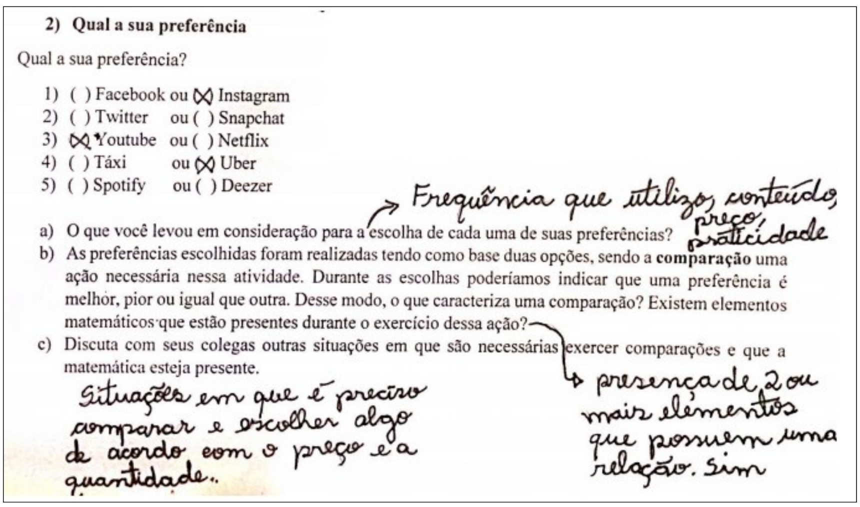
Em relação aos elementos matemáticos que caracterizam uma comparação, os alunos levantaram um questionamento sobre quais seriam esses elementos:

> César: Porque os elementos seriam aqueles negócios de maior, menor, igual, diferente? [...] acho que os elementos seriam isso!
> Miguel: Elemento é tudo, assim, a equação em si.
> César: Porque são elementos que diferenciam e classificam os valores, coeficiente dentro da matemática, eu acho que é isso pelo menos. Mas não entendi a primeira pergunta: Desse modo o que caracteriza uma comparação? [...] seria tipo a classificação?
> Miguel: é tipo o que te fez levar a crer que um é melhor que o outro, eu acho [...] não sei.
> César: é a classificação, ou a diferenciação.
> Miguel: é a tentativa de tentar explicar por que você prefere um do que o outro (Experimento, 2018).

Nesse sentido, os alunos registraram, no item *b*, que a comparação é uma tentativa de avaliar qual situação ou escolha é melhor para "sua vida", envolve confrontar para perceber semelhanças e/ou diferenças, analisaram que a comparação abrange situações em que mais de dois elementos se relacionam. César, após o diálogo com Miguel, chegou a apontar a diferenciação e a classificação, que são ideias gerais, e, de fato, a partir da comparação se pode classificar.

Na identificação de elementos matemáticos, nesses processos, estabeleceram uma relação de melhor, pior, igual com os símbolos >, < e =, entre outros, conforme apresentado na Figura 31.

Figura 31 - Registros do aluno César



2) Qual a sua preferência

Qual a sua preferência?

1) ( ) Facebook ou (X) Instagram
2) ( ) Twitter ou ( ) Snapchat
3) (X) Youtube ou ( ) Netflix
4) ( ) Táxi ou (X) Uber
5) ( ) Spotify ou ( ) Deezer

a) O que você levou em consideração para a escolha de cada uma de suas preferências? Frequência que utilizo, conteúdo, preço, praticidade
b) As preferências escolhidas foram realizadas tendo como base duas opções, sendo a **comparação** uma ação necessária nessa atividade. Durante as escolhas poderíamos indicar que uma preferência é melhor, pior ou igual que outra. Desse modo, o que caracteriza uma comparação? Existem elementos matemáticos que estão presentes durante o exercício dessa ação? presença de 2 ou mais elementos que possuem uma relação. Sim
c) Discuta com seus colegas outras situações em que são necessárias exercer comparações e que a matemática esteja presente.

Situações em que é preciso comparar e escolher algo de acordo com o preço e a quantidade.

Fonte: Registros da Tarefa, 2019.

Os alunos interagiram, ainda com o professor, questionando-o qual *App* ele preferia: youtube ou netflix. O professor promoveu uma discussão de que tal escolha dependeria de um propósito e buscou estabelecer relações entre tais comparações e equação, buscando atuar na ZDP dos alunos, para atingir um desenvolvimento que ainda era potencial. Desse modo, discutiram:

> Professor: O que caracteriza uma equação?
> Nathália: A Igualdade
> Professor: O que é uma igualdade?
> Nathália: É a comparação (Experimento, 2018).

Debateram que os critérios utilizados por eles levam a uma resposta, e fizeram uma analogia às equações, pois elas representam condições e são dotadas de critérios para se alcançar um resultado. Nesse contexto, os alunos exemplificaram a presença da matemática no seu cotidiano: "*O fato de você escolher, por exemplo gasolina ou álcool, para colocar no carro, tem matemática, é o preço, a rentabilidade, km rodado" (Gabriel, 2018).* Essa tarefa, incitou o interesse dos alunos para identificar a presença e o significado da matemática/álgebra em diferentes momentos de sua vida.

Nestas tarefas, foram apresentadas situações do cotidiano (reais) com o propósito de evidenciar aos alunos a necessidade de se realizar comparações. Discutimos com os estudantes, também, outras possíveis situações em que seriam necessárias comparações. Nessas oportunidades, contextualizamos o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos – notadamente conhecimentos sobre equações e sistemas, com as vivências dos alunos em seu dia a dia.

Na tarefa *"Vamos falar de moda",* a realidade sensorial-objetal se manifestou no processo de comparação dos objetos, ao analisar uma determinada vestimenta, os alunos separavam as propriedades ou condições que resultavam em tal escolha, refletiam as representações e propriedades externas da figura, indicando que o clima, o grau de formalidade, o gosto, eram os aspectos determinantes. Quando os alunos fazem essas afirmações, podemos inferir que estão em busca de algo mais geral, que não está no nível daquilo que é sensorial. Do mesmo modo, na tarefa "qual a sua preferência", as análises aparentes dos termos apresentados configuravam-se como parâmetros de escolha.

Os questionamentos apresentados e a mediação do professor direcionaram para um princípio de construção de uma análise mais aprofundada, para além da aparência. Essa tarefa começou a discutir a comparação como parte de um sistema integral, ou seja, do conceito de Sistemas de Equações Lineares, objeto da atividade de estudo. Assim, as ações apresentadas deram início ao método de ascensão do abstrato ao concreto, que considera a reprodução teórica, no plano de pensamento, da percepção sensorial, do concreto real (DAVÍDOV, 1988).

Na tarefas 1.3 e 1.4, tínhamos como objetivo avaliar se os alunos conseguiam compreender a importância e a necessidade de estabelecer comparações, evidenciando-a como uma ação desenvolvida historicamente e presente nos dias atuais. Baseamo-nos na perspectiva lógica-histórica para elaboração da tarefa a seguir, visando discutir a totalidade da realidade objetiva e aprofundar os estudos para além da aplicabilidade. A intenção era mostrar para os alunos que as comparações têm relevância histórico no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos.

Figura 32 - 1.3, a ideia da comparação na história da matemática.

3) A Ideia da Comparação na história da matemática

Curiosidades e pesquisa

Você sabe como surgiu o processo de contagem?

Você sabe como surgiu o calendário Egípcio?

Você sabe como os problemas envolvendo números eram resolvido?

Você conhece o método da falsa posição?

Responda:

a) Dos conteúdos escolares de matemática que você já estudou, em quais deles a ideia de comparação estava presente?
b) Qual a importância de estabelecer comparações no estudo da matemática?
c) Quais "elementos" matemáticos estão presentes quando você estabelece uma comparação? Justifique.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Nos registros e discussões dos alunos, em relação ao quadro que visava incentivar a curiosidade e a pesquisa, alguns alunos tentaram responder os questionamentos apresentados.

Observamos que eles entendem que a comparação, entre outros conhecimentos matemáticos, surgiu com base nas necessidades do ser-humano. Porém, pouco conhecem sobre a história da matemática e, notadamente, não reconhecem que o conteúdo que aprendem em sala de aula é resultado de um movimento lógico-histórico. Os alunos não discriminam a importância da álgebra para matemática e têm dificuldades para compreender sua característica, sua essência.

A identificação dos conteúdos matemáticos já estudados que abordam a ideia de comparação, limita-se ao que está em pauta, equações e Sistemas de Equações Lineares.

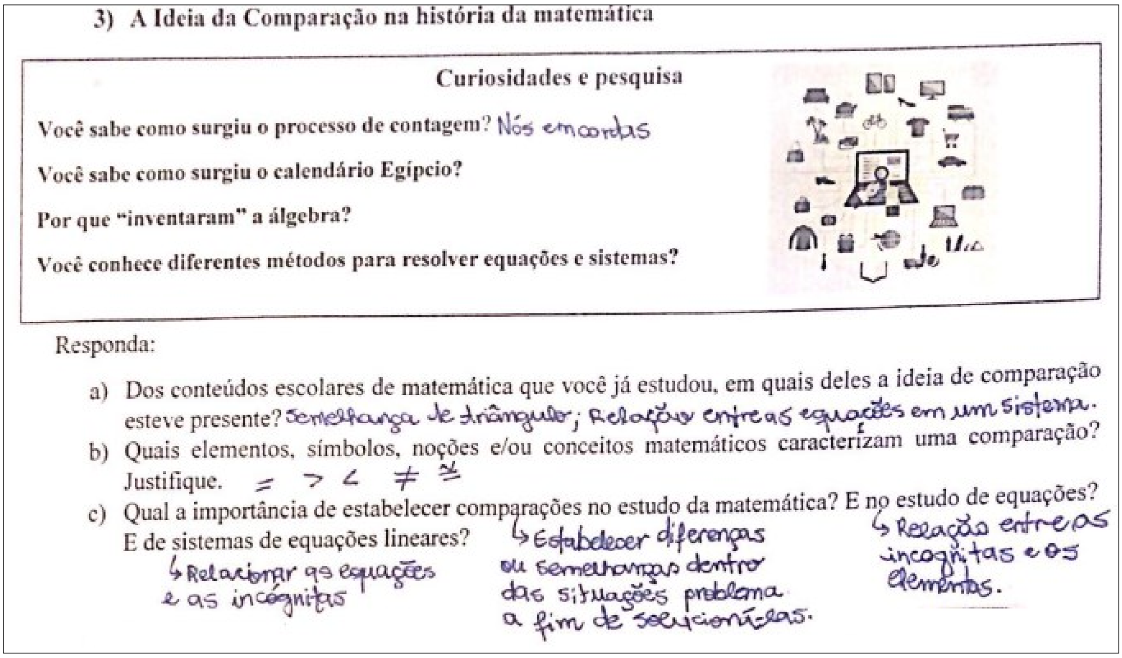
Apenas dois alunos identificaram a presença das comparações no conteúdo de semelhança de triângulo.

Inferimos que a dificuldade dessa identificação é consequência da ínfima discussão sobre os juízos e conceitos dos conteúdos escolares. Além disso, pela forma fragmentada em que ocorre o ensino de matemática. Por exemplo, na aula de geometria se ensina, apenas, geometria, sem estabelecer relações com a aritmética e álgebra.

Sobre os símbolos que caracterizam uma comparação, os alunos responderam: $>$, $<$, $=$, $\neq$ *e* $\cong$. Os alunos consideraram que o estudo do conceito de comparações contribui para os momentos de decisão, auxiliam a estabelecer diferenças e semelhanças em diversas situações do cotidiano.

No estudo de equações e de sistemas lineares, consideraram que as comparações colaboram na compreensão das relações entre incógnitas e as equações. Um grupo de alunos analisaram que sem a comparação não seria possível resolver equações e sistemas lineares.

Figura 33 - Registros da aluna Amanda


3) A Ideia da Comparação na história da matemática

Curiosidades e pesquisa

Você sabe como surgiu o processo de contagem? Nós em cordas

Você sabe como surgiu o calendário Egípcio?

Por que "inventaram" a álgebra?

Você conhece diferentes métodos para resolver equações e sistemas?

Responda:

a) Dos conteúdos escolares de matemática que você já estudou, em quais deles a ideia de comparação esteve presente? Semelhança de triângulo; Relação entre as equações em um sistema.

b) Quais elementos, símbolos, noções e/ou conceitos matemáticos caracterizam uma comparação? Justifique. $= \; > \; < \; \neq \; \cong$

c) Qual a importância de estabelecer comparações no estudo da matemática? E no estudo de equações? E de sistemas de equações lineares? Estabelecer diferenças ou semelhanças dentro das situações problema a fim de solucioná-las. Relação entre as incógnitas e os elementos. Relacionar as equações e as incógnitas

Fonte: Registros dos alunos, 2019.

Na tarefa 1.4 - "E os grupos de WhatsApp?", tínhamos a intenção de desenvolver a capacidade dos alunos em identificar a característica geral de tarefas particulares nas situações recorrentes do seu cotidiano, porém buscando ir além das aparências. Em seguida, aplicar essa característica geral na nova tarefa, visando solucioná-la por um procedimento geral.

Uma das nossas preocupações ao propor uma abordagem de ensino que se orientasse pela dedução na apropriação de um conteúdo seria a dificuldade de assimilação dos alunos, visto que, nas observações e estudos realizados, constatamos que, no Brasil o ensino ocorre em uma perspectiva mais próxima das ações de indução. Ademais, os experimentos já realizados, com os mesmos pressupostos teóricos desta investigação, ocorreram no início da escolarização. Como realizamos um trabalho no ensino médio, entendemos que a formação do pensamento dos alunos ocorreu de maneira diferente, por isso a necessidade de uma tarefa para estimular essa forma de pensamento.

Além de atentarmos para a organização dos conhecimentos teóricos específicos da matemática, consideramos importante oferecer aos alunos a experiência de analisarem uma situação, evidenciando as características comuns e revelando sua generalidade.

Figura 34 - Tarefa 1.4, "E os grupos de WhatsApp?

4) E os grupos de WhatsApp?

Discutindo com os colegas:

- Você participa de grupos nas redes sociais?
- Qual a necessidade de um grupo de WhatsApp?

Atualmente, as redes sociais já estão incorporadas no cotidiano das pessoas, sobretudo, dos jovens. Nelas podemos formar diferentes grupos para discutir sobre os mais diversos assuntos, no âmbito familiar, estudantil, profissional, lazer, entre outros. E você, participa de muitos grupos?

Para facilitar essa discussão, enumere na figura a seguir alguns grupos que você participa, em seguida, responda o questionamento apresentado.

Grupo 1:_________________
Grupo 2:_________________
Grupo 3:_________________
Grupo 4:_________________
Grupo 5:_________________
Grupo 6:_________________
Grupo 7:_________________
Grupo 8:_________________

O que tem de geral no processo de formação de cada um desses grupos?

Responda:

a) O que caracteriza cada um desses grupos?
b) Há uma relação geral presente em todos eles?
c) Podemos comparar esses grupos? Por quê?
d) O que seria necessário para formarmos um grupo dos participantes deste estudo?
e) A característica geral indicada na formação desses grupos poderia ser aplicada para formarmos um grupo dos participantes deste estudo? Justifique.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Nos registros e discussões dos alunos, verificamos que a presença deles nas redes sociais é algo comum e que desperta o interesse dos jovens. A idade psicológica dos estudantes favorece uma maior interação entre eles, promove a necessidade de pertencerem a um grupo e de se autoafirmarem. Assim, observamos que esses fatores contribuíram para dar relevância à tarefa proposta.

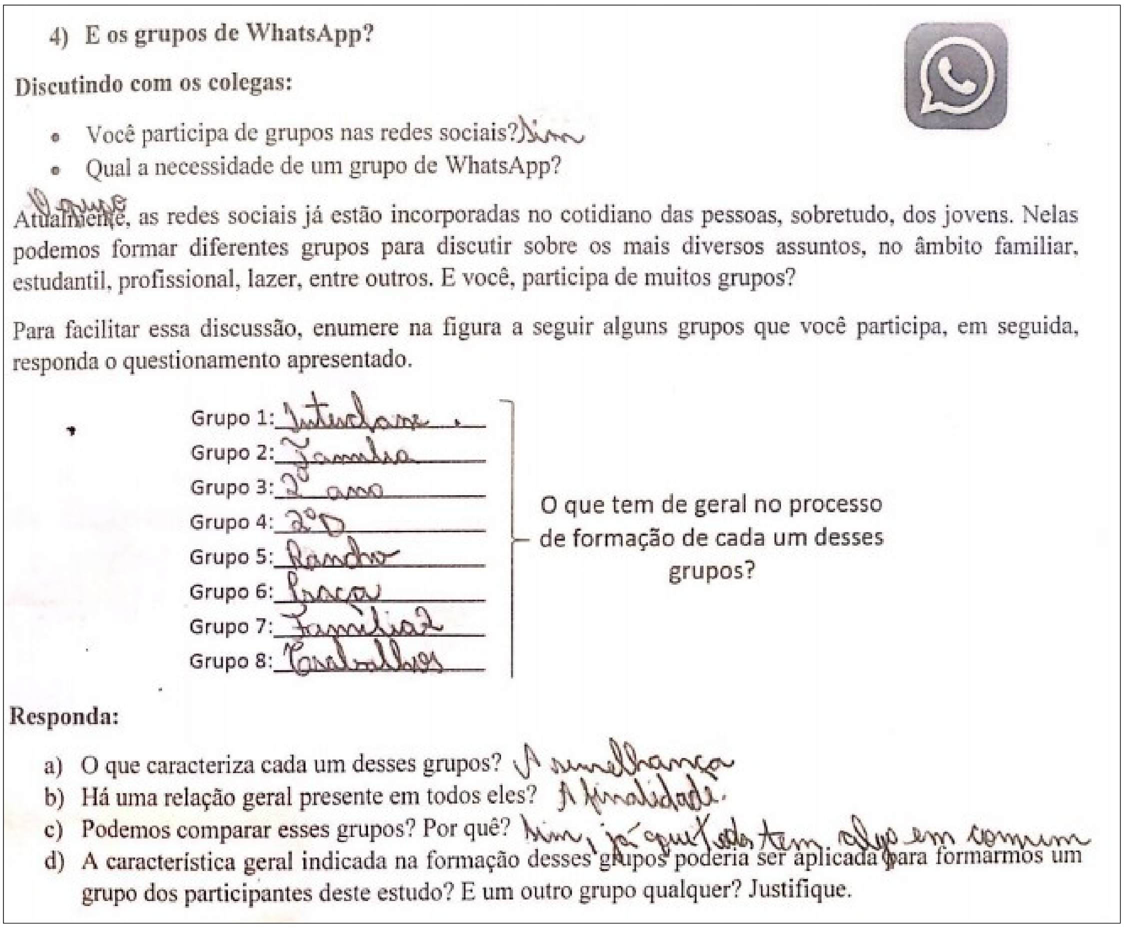
Os alunos participam de grupos de WhatsApp sendo que a maioria deles dizem respeito às suas amizades e aos círculos a que pertencem: “Amigos próximos, escola, família, interclasse, festas [...]”. Consideram que tal aplicativo é importante para troca de informações de forma instantânea, e os grupos para um conjunto de 3 ou mais pessoas.

Analisando o que caracteriza cada um desses grupos de WhatsApp, os alunos identificaram que eles são utilizados para tratar de um assunto específico, contemplam um grupo de pessoas que se conheceram em um determinada lugar ou dividem o mesmo espaço de convivência e tem interesses comum.

> Professor: Qual a característica geral de cada grupo?
> Miguel: Finalidade.
> Professor: há uma relação geral presente em todos eles?
> Miguel: Pessoas e o Interesse.

Avaliamos que os alunos conseguiram evidenciar as características gerais de um grupo de whatsapp, analisando particularidades dos grupos que participavam – grupos particulares, sem se prenderem às evidências externas.

Figura 35 - Registros do aluno Miguel



4) E os grupos de WhatsApp?

Discutindo com os colegas:

- Você participa de grupos nas redes sociais? Sim
- Qual a necessidade de um grupo de WhatsApp?

Atualmente, as redes sociais já estão incorporadas no cotidiano das pessoas, sobretudo, dos jovens. Nelas podemos formar diferentes grupos para discutir sobre os mais diversos assuntos, no âmbito familiar, estudantil, profissional, lazer, entre outros. E você, participa de muitos grupos?

Para facilitar essa discussão, enumere na figura a seguir alguns grupos que você participa, em seguida, responda o questionamento apresentado.

Grupo 1: Interclasse
Grupo 2: Família
Grupo 3: 2º ano
Grupo 4: 2ºD
Grupo 5: Rancho
Grupo 6: Praça
Grupo 7: Família 2
Grupo 8: Carvalhos

O que tem de geral no processo de formação de cada um desses grupos?

Responda:

a) O que caracteriza cada um desses grupos? A semelhança
b) Há uma relação geral presente em todos eles? A finalidade.
c) Podemos comparar esses grupos? Por quê? Sim, já que todos tem algo em comum
d) A característica geral indicada na formação desses grupos poderia ser aplicada para formarmos um grupo dos participantes deste estudo? E um outro grupo qualquer? Justifique.

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Nessa tarefa o professor pôde estabelecer a relação entre comparação, equações e sistemas de equações. Os conhecimentos científicos, foram constituídos por um processo de erros, acertos, angustias, contradições, entre outras relações que esclarecem que "[...] a totalidade do conhecimento é o próprio movimento da realidade objetiva que sempre estará por vir" (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

O desenvolvimento do pensamento teórico precisa ter como base as tarefas e a mediação docente que abordem o conhecimento tendo como uma de suas características a fluência. Essa abordagem poderia aguçar a percepção do aluno de que a matemática – os conteúdos escolares, tem função ulterior à da aplicação nos contextos atuais.

Os alunos ao analisarem o que os leva a participar de grupos de whatsapp, estão diante de uma situação empírica, mas a organização da tarefa de estudo e a mediação do professor tem por objetivo as abstrações e generalizações substantivas que consistem na dedução de outras abstrações mais particulares, e a indução para agrupá-las na totalidade do objeto estudado (DAVÍDOV, 1988). Nesse sentido, registraram que o "núcleo" seria o “interesse comum” e que isso seria um princípio geral pela qual justificaria a formação de um grupo de WhatsApp.

Nas tarefas 1.5 e 1.6, foi apresentado aos alunos um conjunto de objetos que poderiam ser comparados e agrupados de diferentes formas. Analisamos nas tarefas a capacidade dos alunos em correlacionar objetos, tais como, sobreposição, retirada de itens de cada grupo, comparação de conjuntos de elementos que não podem ser removidos e de objetos não dispostos linearmente. Assim, a tarefa possibilitou-nos conhecer o grau de abstração dos alunos.

Figura 36 - 5, "ideia de comparação com blocos lógicos

Tarefas de Aprendizagem – Ideia de Comparação com Blocos Lógicos

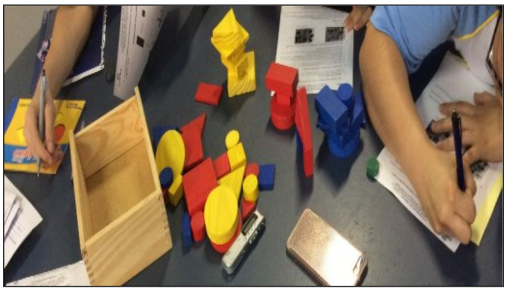
5) **Atividade com os Blocos Lógicos**

a) Como podemos comparar e/ou agrupar este conjunto de objetos (blocos lógicos)? Justifique.
b) Agrupe os o blocos lógicos do modo que você considerar mais conveniente.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

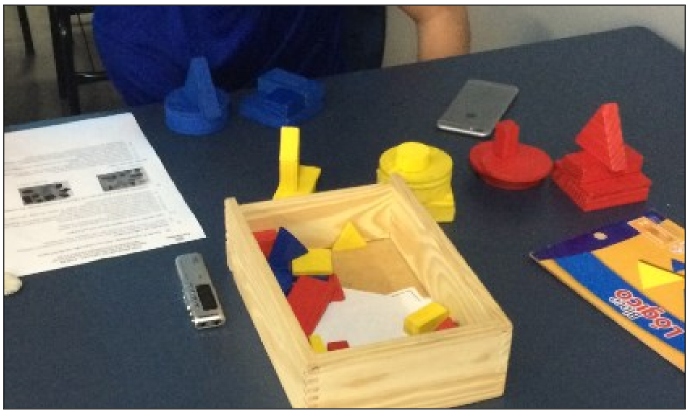
Os alunos perceberam que poderiam agrupar os materiais de diferentes formas: “Po*dem agrupá-los pela cor, formato, tamanho, quadrados, redondos, grossura”*. Entenderam mais conveniente separar os blocos lógicos por cor e utilizaram esse critério para criação do grupo. Outro grupo considerou melhor agrupar os objetos pelas suas formas, conforme se vê nas figuras a seguir.

Figura 37 - Grupo 1 – alunos Gabriel e Nathália organizaram os blocos com base nas suas formas.



Fonte: Registro do autor, 2019.

Figura 38 - Grupo 2 – alunos César e Miguel, organizaram os blocos com base nas suas cores.



Fonte: *Registro do autor, 2019.*

Nos registros e nas discussões, embora cada grupo tenha escolhido um critério para reunir os materiais, foi debatido que a forma, a cor, o tamanho, a espessura seriam outras alternativas de formação dos grupos. Ficou evidente que os alunos analisaram o material, espontaneamente, com base nas suas características externas. Assinalaram que as semelhanças entre os elementos, suas características comuns, caracterizava o grupo formado.

Em seguida, apresentamos aos alunos os questionamentos que completavam e potencializavam o pensamento deles sobre ações desenvolvidas anteriormente.

Figura 39 - 1.5, "ideia de comparação com blocos lógicos”.

5.1) Após agrupar os blocos lógicos, discuta com seus colegas:

a) Quais critérios foram utilizados para o agrupamento dos objetos?
b) O que caracteriza o(s) grupo(s) de objetos formados? Justifique.
c) Podemos comparar esses grupos?
d) O que nos permite realizar comparações entre grupos distintos?
e) Podemos estabelecer critérios para facilitar as comparações entre grupos de objetos? Quais seriam?
f) Elabore/Relate momentos da sua vida cotidiana em que você necessita realizar um agrupamento de objetos.
g) Elabore/Relate situações em que comparamos grupos de objetos de forma equivocada.

6) Análise dois grupos do material que você organizou no exercício anterior. Por exemplo:

Exemplo - Grupo 1

Exemplo - Grupo 2

Discuta com seus colegas:

a) Podemos comparar esses grupos? Como compará-los?
b) Quais instrumentos/recursos podemos utilizar para realizar essas comparações?
c) Quais características/atributos desses objetos consideramos para exercer a comparação: largura, comprimento, peso, cor, formato, outros?
d) Discute e conheça as formas de comparação apresentadas pelos seus colegas, há uma maneira mais viável de realizar uma comparação?
e) Como a matemática pode contribuir para estabelecer essas comparações?
f) Quais símbolos (elementos) matemáticos podem ser utilizados para estabelecer comparações? Como isso pode ocorrer?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Sobre os questionamentos apresentados no item 5.1, os alunos discutiram que os critérios utilizados para o agrupamento dos objetos referem-se às suas características comuns, por exemplo, pela cor, espessura, tamanho, a partir de relações, entre outros. Assim, Gabriel ressalta: “[...] tipo o formato, uns são mais redondinhos e outros mais quadradinhos”.

Tais critérios foram determinantes para a formação dos grupos, embora reconhecessem outras possibilidades de agrupamento. Ponderaram que poderiam ser feitas comparações entre os elementos de um grupo com base nas suas semelhanças e diferenças e adotando determinados critérios.

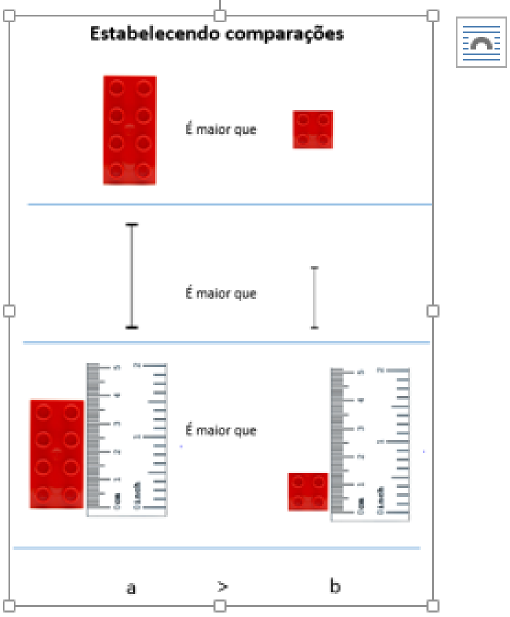
Ao analisarem as vivências cotidianas, identificaram a presença das comparações nas divisórias do fichário que agrupam os registros de determinados conteúdos escolares, nas escolhas de roupas, entre outras, matérias como criação de grupos.

Nas questões que compõem o item 6, os alunos continuaram as discussões sobre as formas de comparação. Consideraram a possibilidade de comparar os diferentes grupos, desde de que os critérios para sustentar tal comparação estejam esclarecidos. Compreendem que a matemática pode contribuir para a comparação na construção das relações entre elementos e no uso dos símbolos como >, < = e ≠.

Na tarefa 1.7, sobre "estabelecer comparações", os alunos precisavam utilizar registros (segmentos) e símbolos – generalizações, para estabelecer comparações. Além disso, os estudantes poderiam revisar as noções de igualdade, desigualdade e incógnitas – pré-requisitos para o estudo de Sistemas de Equações Lineares.

Figura 40 - 1.7, "Estabelecer comparações".

7) A comparação realizada anteriormente pode ser representada de diferentes formas, conforme a figura a seguir.



a) O que os segmentos (representação gráfica) representam? Unidade de medidas, números, quantidades? Justifique.
b) Qual a relação entre essas formas de comparação?
c) Qual a importância em estabelecer uma designação alfabética (incógnitas) para um objeto e/ou de um sinal para registrar uma comparação?
d) O que as letras a e b representam nessa comparação?
e) Podemos atribuir qualquer valor às letras a e b, como altura, largura, espessura, a profundidade, o perímetro, etc.?
f) Letra: uma variável e/ou uma incógnita? Construa, com suas palavras, uma definição para esses termos.
g) Em quais situações é mais conveniente utilizar incógnitas para estabelecer uma comparação?
h) Existem situações presentes no seu cotidiano que podem ser representadas por incógnitas? Apresente exemplos.

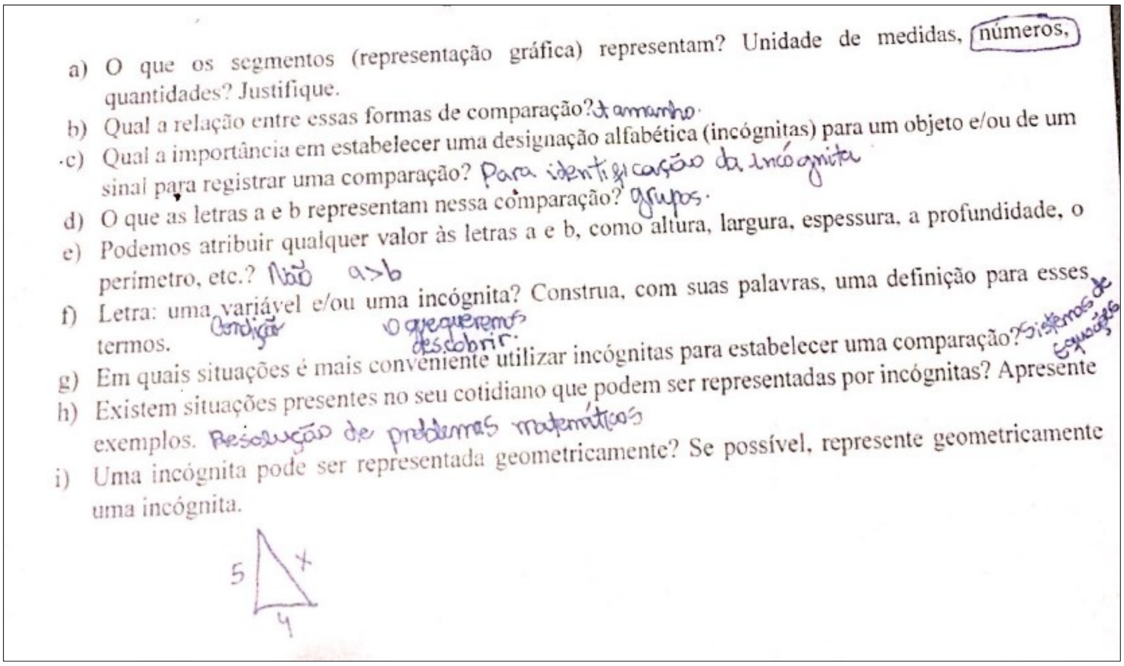
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Nos registros e discussões sobre a referida tarefa, dois grupos de alunos consideraram que os segmentos representavam unidade de medida e um relatou que eles diziam respeito a números. Analisaram que, na figura apresentada, a comparação refere-se ao tamanho. Um grupo, especificamente, apontou o comprimento como parâmetro de comparação.

Os alunos não entenderam que o uso da designação alfabética representava uma generalização, compreendiam como uma identificação da incógnita, mas não discutiram o significado de incógnita. Analisaram que os símbolos e "sinais" matemáticos remetiam às relações.

Na imagem que compõem a tarefa 1.7 apresentamos diferentes formas de comparar um mesmo objeto: o objeto em si, segmentos (gráfica), unidades de medida e incógnitas (a e b). Ao questionarmos o que as letras a e b representavam na comparação, apenas um grupo de alunos considerou que seria o "nome" na forma de generalizações, os demais entenderam como um conjunto de objetos.

Figura 41 - Registros das alunos Nathália e Beatriz (Tarefa realizada em dupla)



a) O que os segmentos (representação gráfica) representam? Unidade de medidas, números, quantidades? Justifique.
b) Qual a relação entre essas formas de comparação? tamanho.
c) Qual a importância em estabelecer uma designação alfabética (incógnitas) para um objeto e/ou de um sinal para registrar uma comparação? Para identificação da incógnita
d) O que as letras a e b representam nessa comparação? grupos.
e) Podemos atribuir qualquer valor às letras a e b, como altura, largura, espessura, a profundidade, o perimetro, etc.? Não a>b
f) Letra: uma variável e/ou uma incógnita? Construa, com suas palavras, uma definição para esses termos. Condição O que queremos descobrir.
g) Em quais situações é mais conveniente utilizar incógnitas para estabelecer uma comparação? Sistemas de equações
h) Existem situações presentes no seu cotidiano que podem ser representadas por incógnitas? Apresente exemplos. Resolução de problemas matemáticos
i) Uma incógnita pode ser representada geometricamente? Se possível, represente geometricamente uma incógnita.

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

A partir dos resultados da Tarefa 1 sobre comparações, passamos a analisa-los usando as categorias de análise já anunciadas no capítulo anterior: *transformação dos dados da tarefa, modelação da relação universal e o controle e avaliação como resultado da tarefa de aprendizagem.*

Sobre a *transformação dos dados* da tarefa, de acordo com Davídov, (1979/2019, p. 223), propõe-se verificar a capacidade dos alunos em identificar no objeto "[...] alguma relação geral que tenha uma conexão com várias manifestações desse material, ou seja, a construção da abstração e generalização substancial do conteúdo".

O processo de abstração e generalização substantiva que está articulado com a *transformação dos dados* objetais da tarefa de aprendizagem e a modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras.

Verificamos que os critérios utilizados pelos alunos, inicialmente não superaram o conhecimento objetivo-sensorial, foram baseados notadamente nas aparências. Embora os alunos nas discussões reconhecessem que outros critérios poderiam ser estabelecidos, optaram pelas escolhas mais simples. Também, verificamos que a forma como o conteúdo estava organizado diferenciava da maneira com que os alunos estavam habituados.

Nesse contexto, a mediação do professor contribui para os alunos iniciarem o movimento do pensamento no sentido da *transformação dos dados* objetais da tarefa. Ou seja, a prática docente teve fundamental importância no desenvolvimento do pensamento teórico. A mediação do professor revelou-se com aspecto fundamental para dar início ao desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

Quando o docente exerceu intervenções, os alunos conseguiram transformar os dados da tarefa e revelar a essência do objeto estudo. Porém, no momento em que realizavam as análises e tarefas de forma espontânea, as ações limitavam-se ao pensamento empírico.

Observamos que, em relação ao ensino-desenvolvimento-mediação, revelou-se a importância da prática e das ações do professor no desenvolvimento das funções psicológicas superiores dos alunos. A figura do professor que se entremeia com a do pesquisador - que elaborou as tarefas de estudo e conhecia os referenciais teórico-metodológicos que sustentam a forma de ensino proposta, contribuiu para a tangibilidade e viabilidade no desenvolvimento da tarefa, visto que o saber "[...] não pode ser expropriado do trabalhador, sob pena de descaracterizar-se o próprio processo pedagógico" (PARO, 2002, p.148).

A disponibilidade do pesquisador, no ato do experimento, em conduzir os processos de ensino, como docente, para que não desenvolvesse uma atividade alienada, influenciou no desenvolvimento das tarefas de aprendizagem. Rigon, Asbahr e Moretti (2010) assinalam a íntima relação entre trabalho pedagógico e conhecimento. Foi possível concluir que, nos experimentos didáticos-formativos, os professores que irão conduzir as tarefas de estudo estejam preparados, conheçam os pressupostos teóricos e dominem os juízos e conceitos a serem ensinados.

Entendemos a mediação, com base em Vigotski (2012) como um contributo à transmissão racional e intencional da experiência e do pensamento humano. Nas tarefas apresentadas, ressaltamos a importância da organização do conteúdo, bem como da mediação do professor. O docente orientou e questionou os alunos de forma recorrente com o propósito de que eles evidenciassem elementos comuns nas comparações presentes no seu cotidiano, relacionando-as com conhecimentos matemáticos.

A comunicação do docente com os alunos, com uma linguagem acessível e a compreensão de que "o gosto", a "preferência" e a "ocasião" têm o mesmo significado geral nas ações de comparação, podendo ser traduzidos e generalizados como "critérios e condições". De acordo com Davídov (1988), as orientações dos docentes contribuem para efetiva organização da observação dos alunos sobre o objeto observado, direciona análises para evidenciar os aspectos essenciais dos objetos.

Assim, o professor, ao estabelecer relação da tarefa com o conhecimento matemático, visa demonstrar o movimento de construção do pensamento científico. A mediação docente permitiu que os alunos evidenciassem que estabelecer critérios e analisar as condições contextuais estão na natureza das ações de comparação.

Além disso, observamos que o aluno, ao analisar a realidade objetiva que requer a necessidade de comparações, seja no contexto de escolher uma roupa, determinar preferências, dentre outras, começa a estabelecer critérios ulteriores às características externas do objeto analisado. Propende-se à busca pela relação universal do objeto que será refletida no pensamento teórico.

Por exemplo, ao perceberem que a escolha pela utilização do *App Uber* fundamentava-se em elementos que iam além da necessidade de um transporte, visto que há diferentes formas de locomoção, começavam a fazer o movimento de análise interna do conceito de comparação. Verificamos que nessas tarefas apresentadas as ações dos alunos junto com a mediação do professor sinalizam para a transformação dos dados objetais da tarefa de aprendizagem.

Como essas são as primeiras tarefas de ensino de um conjunto de três, ponderamos que a efetiva transformação dos dados da tarefa de estudo será consolidada no decorrer do experimento. Já que Davídov (1988) afirma que essas ações oriundas dessas tarefas caracterizam o momento inicial do processo de formação de conceitos.

Em relação à *modelação da relação universal*, propomos analisar "[...] a dedução, sobre a base da abstração e a generalização, das relações particulares do material dado e sua unificação (síntese) em certo objeto integral, isto é, a construção de uma "célula" e o objeto mental concreto" (DAVÍDOV, 1979/2019, p. 223).

Em relação à modelação, constatamos (tarefa 1.7) a dificuldade dos alunos em compreender as letras *a* e *b* como modelação da relação na forma objetivada. Na modelação, as letras *a* e *b* como incógnitas precisariam ser entendidas como reflexos das relações do concreto real. Os símbolos algébricos, como as incógnitas, variáveis e outras representações, parecem perder sentidos e significados quando não estão vinculados, explicitamente, a problemas matemáticos. Não são compreendidos como uma abstração do conhecimento objetal sensorial ou como a generalização e a essência de um conceito.

Por exemplo, na tarefa 1.3, no momento em que questionamos quais elementos, símbolos ou noções matemáticas caracterizavam uma comparação, constatamos que as modelações apresentadas pelos alunos se restringiam aos símbolos: =, ≠,>, <; utilizados em equações e inequações. Os alunos não conseguiram estabelecer relações com a matemática e outras áreas, apresentando termos-palavras, representações gráficas, expressões numéricas, entre outras formas que caracterizassem as comparações.

Corroboramos com o estudo de Bernardes (2012) que assinala que o pensamento teórico não é natural e nem espontâneo. O ensino da álgebra e a apropriação de seus juízos e conceitos – como sistemas lineares, equações e incógnitas, necessita da organização do conteúdo e da mediação do professor. Para o aluno superar o pensamento empírico, o planejamento e a ação do docente, para revelar a essência do objeto, é fundamental.

Deste modo, precisamos repensar as formas de ensino para que os alunos do Ensino Médio consigam efetivamente transformar os dados do estudo em tarefa de aprendizagem e modelar as relações do conceito em forma objetivada.

Caso contrário, o pensamento do aluno tende a ficar restrito ao empirismo. Assim, quando questionarmos os estudantes em que momentos de seu cotidiano eles estabelecem comparações ou como podem agrupar um conjunto de elementos se limitarão aos exemplos do professor ou irão considerar as características superficiais do objeto.

A modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras, restringia-se a símbolos de comparação utilizados na matemática. Os alunos conseguiam estabelecer poucas relações entre o conteúdo das tarefas e as situações que eles vivenciam no seu cotidiano.

Já na categoria de análise *controle e avaliação* como resultado da tarefa de aprendizagem, examinamos "[...] o domínio, nesse processo analítico-sintético, do modo generalizado de construção do objeto" (DAVÍDOV, 1979/2019, p. 223).

Na Tarefa 1, trabalhamos com comparações, uma vez que consideramos que esse conhecimento - ora juízo, ora conceito, constitui-se como essencial ao de sistema de equações lineares. Além disso, nas tarefas iniciais do experimento didático-formativo, desenvolvemos o processo de abstração e generalização de conhecimentos com base nos referenciais teóricos desta pesquisa.

Avaliamos que essa atividade foi relevante para o processo de formação de conceitos, promovendo que os alunos refletissem sobre o conhecimento objetivo-sensorial, de forma ascendente para o desenvolvimento do pensamento teórico

A relação entre o conteúdo estudado com a aprendizagem da álgebra, fundamenta-se na análise da unidade sensorial-objetal e conhecimento teórico, já que para a busca da essência, no materialismo dialético, inicia-se pela análise sensorial-objetal, na materialidade imediata do objeto, aparência fenomênica do real (MARX, 1982). As comparações como essência do objeto de estudo, precisavam ser identificadas em situações recorrentes do cotidiano e com significado para os alunos.

Nesse sentido, a formação do conceito de Sistemas de Equações Lineares e o desenvolvimento do pensamento teórico, partiu da análise sensorial-objetal. Foi relevante para a compreensão dos alunos identificar que o ato de comparação poderia ser traduzido em conhecimento matemático, e de sua análise poderíamos sintetizar elementos gerais que os representassem.

Sobre as ações que os alunos desenvolveram com base nessas tarefas, observamos que eles conseguiram reconhecer a necessidade de comparação em situações do cotidiano, além disso começaram a considerar na análise não apenas os aspectos externos do objeto.

O objetivo das tarefas - *verificar se o aluno consegue compreender a importância e a necessidade de se estabelecer comparações, evidenciando-a como uma ação desenvolvida historicamente e presente no nosso cotidiano,* fora realizada, considerando principalmente o momento inicial do conceito e a mediação docente.

Avaliamos que a capacidade de situarem a comparação como um conceito carregado de aspectos históricos não foi potencializada na sua íntegra. Os alunos, mesmo compreendendo a tarefa, tinham dificuldades de identificar diferentes situações de comparação para além da sala de aula, limitando-se aos exemplos apresentados. Contudo, consideramos que tal tarefa contribuiu para dar início a uma forma de ensino pautada nas bases teóricas do ensino desenvolvimental e conseguiu prover fundamentos para a realização das seguintes.

Julgamos que as principais ações decorrentes dessas tarefas: "Identificar as relações gerais em casos particulares e revelar a característica geral do objeto estudado", foram desenvolvidas com êxito. Verificamos que os alunos conseguiram identificar a característica geral de tarefas particulares, aplicando-as em uma nova tarefa visando solucioná-las por um procedimento geral.

6.2. Equações lineares um elemento essencial no estudo de sistema de equações lineares: análise da Tarefa 2

Neste tópico analisamos a Tarefa 2, aborda notadamente, as equações. Verificamos, no movimento lógico-histórico da álgebra e dos Sistemas de Equações Lineares que uma relação geral predominante nesse campo de conhecimento e conteúdo é o conceito - ora juízo, de equações.

No Quadro 9, apresentamos as ações e os objetivos que compõem a Tarefa 2. No decorrer da realização da tarefa, o professor exerceu a mediação, buscando evidenciar as equações como uma relação geral presente em sistemas lineares.

Foram realizadas orientações para o desenvolvimento das tarefas e o registro escrito dos alunos. Foram constantes as discussões entre alunos e professor na busca de compreender os significados dos elementos que compõem as equações; visando aprofundar os estudos, indo além da realização dos processos operacionais para a resolução de equações.

Quadro 9 - Organização das tarefas sobre o conhecimento de equações.

O estudo de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio **Tarefa 2:** Explorando o conceito de equações		
Tarefa	**Ações**	**Objetivo**
2.1 Medindo segmentos	Medir os segmentos e estabelecer comparações entre eles.	Introduzir a linguagem algébrica como forma de representar situações que necessitam estabelecer comparações e relações.
2.2 Definição de equação	Discutir sobre o sentido e significado dos elementos que constituem a definição geral de uma equação.	Traduzir o significado e o sentido dos elementos que constituem a definição de equação.

O estudo de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio **Tarefa 2:** Explorando o conceito de equações		
Tarefa	**Ações**	**Objetivo**
2.3. Resolução de Equações	Relembrar o modo de resolução de equações com uma incógnita.	Verificar como os alunos resolvem uma equação, evidenciando alguma dificuldade e dando sentido as operações realizadas.
2.4 Propriedades das equações	Estabelecer relação entre as propriedades e processo de resolução das equações.	Discutir sobre as propriedades, juízos e conceitos que possibilitam a operacionalização na resolução das equações.
2.5 Problemas envolvendo equações	Modelar algebricamente uma situações-problema. Resolver algebricamente problemas que requerem o uso de equações.	Verificar a capacidade de aplicar os conhecimentos sobre equações em tarefas particulares de modo a solucioná-las por um procedimento geral
2.6 Representar problemas por equações com 2 incógnitas	Modelar algebricamente situações-problema por equações de duas incógnitas.	Verificar a capacidade de utilizar a linguagem algébrica para representar situações do cotidiano.
2.7 Resolver equações com 2 incógnitas	Elaborar alternativas para resolver equações com duas incógnitas.	Verificar qual a ação e/ou aspecto é necessário para resolver uma equação com duas incógnitas.
2.8 Representar graficamente equações com 2 incógnitas	Modelar geometricamente equações com duas incógnitas.	Compreender que as "soluções" de uma equação com duas variáveis apresentam relações e seus pontos podem representar uma reta.
2.9 Discutir sobre as propriedades, juízos e conceitos que constituem uma equações. 2.10 Relacionar as características gerais da álgebra com as equações	Estabelecer as relações gerais – e sua essência, presentes no processo de resolução das equações	Evidenciar a essência do conhecimento presente no estudo das equações.
2.11 Traduzir algebricamente um representação gráfica 2.12 Estabelecer relações entre as representações algébrica e geométrica	Modelar geométrica uma representação .algebricamente.	Compreender as relações entre as representações algébricas e geométricas.
2.13 Criar uma situação problema envolvendo os conhecimentos estudados	Dadas determinadas condições elaborar situações-problema que envolvam equações.	Verificar se os alunos conseguem criar situações-problema considerando critérios (condições) específicas que caracterizam as equações e estabelecer relações entre o concreto e o abstrato.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Para introduzir o conceito de equações, realizamos – conforme apresentado, tarefas sobre comparações, visto que a *igualdade e o balanceamento*, são relações gerais desse conhecimento.

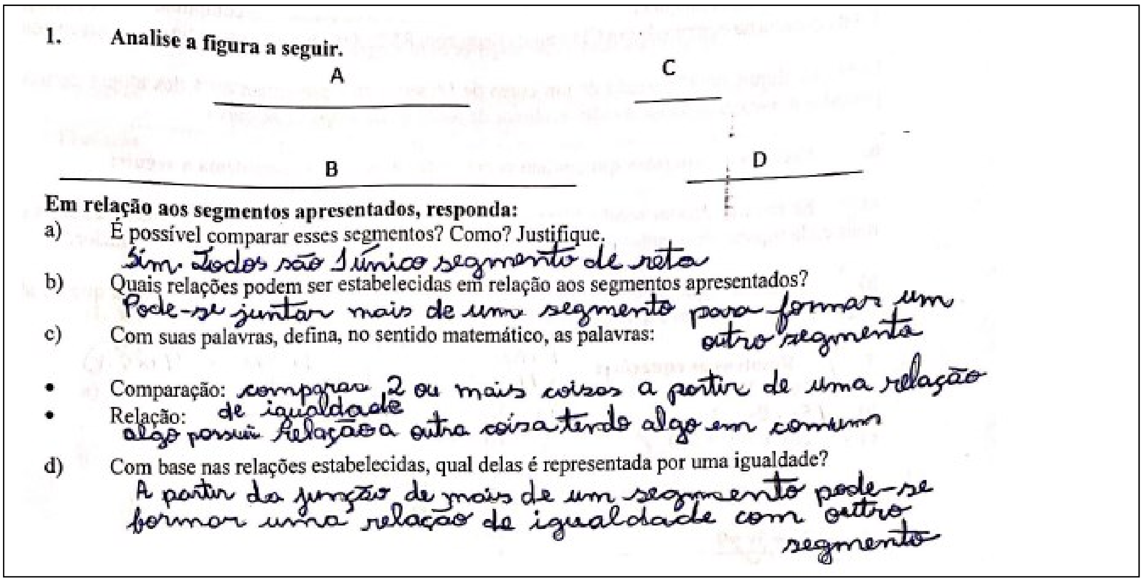
Em continuidade ao estudo de comparações, foi proposto, então, uma análise de segmentos em que o estudante poderia medi-los e estabelecer diferentes formas de compará-los – inclusive utilizando a linguagem algébrica. Para direcionar a análise organizamos um conjunto de questões com o propósito de fomentar discussões sobre a necessidade de exercer comparações, a importância de estabelecer relações – sobretudo no contexto da álgebra e de sistemas lineares, comparar medidas na forma geral, e argumentar sobre os significados de relações e comparações.

Verificamos a estranheza dos alunos quando foi proposto em uma aula de matemática discussões sobre significado dos “símbolos” matemáticos e o porquê de operacionalizar e/ou desenvolver uma resolução utilizando um determinado método. Ao orientarmos a realização da análise, foi observado, principalmente, as características externas do objeto.

> **Beatriz:** em qual sentido essa questão?
> **Professor:** Você consegue estabelecer comparações?
> **Beatriz:** Não para mim são todos segmentos de reta.
> **Professor:** Em relação aos tamanhos?
> **Beatriz:** São todos diferentes (Experimento, 2018).

Nos registros de Beatriz – assim como realizado pela maioria dos participantes, foi empregada uma linguagem retórica. No primeiro momento, não estabeleceram comparações utilizando a linguagem algébrica e/ou uma forma generalizada.

Figura 42 - Tarefa 1 realizada pela aluna Beatriz.



1. **Analise a figura a seguir.**

A C B D

Em relação aos segmentos apresentados, responda:

a) É possível comparar esses segmentos? Como? Justifique.
Sim. Todos são 1 único segmento de reta

b) Quais relações podem ser estabelecidas em relação aos segmentos apresentados?
Pode-se juntar mais de um segmento para formar um outro segmento

c) Com suas palavras, defina, no sentido matemático, as palavras:

- Comparação: comparar 2 ou mais coisas a partir de uma relação de igualdade
- Relação: algo possui Relação a outra coisa tendo algo em comum

d) Com base nas relações estabelecidas, qual delas é representada por uma igualdade?
A partir da junção de mais de um segmento pode-se formar uma relação de igualdade com outro segmento

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Beatriz registrou que poderia ser realizado comparações considerando que todos representavam segmentos de retas, analisou que esses poderiam ser agrupados – formando novos segmentos, para serem estabelecidas diferentes relações. Verificamos que ao buscar sentido matemático as palavras comparação e relação, há a necessidade dos objetos comparados terem uma propriedade comum e limitarem-se a uma relação de igualdade. Posteriormente, questiona:

> **Beatriz:** Comparação pode ter diferenças e semelhanças ou pode ter somente semelhanças?
> **Professor:** Podem ter diferenças e semelhança. Por exemplo, você lembra quando estudou funções? (Experimento, 2018).

A aluna não conseguiu, naquele momento, relacionar a "ideia" de comparação com outros conteúdos matemáticos como, por exemplo, funções. A mediação do professor proporcionou que a aluna compreendesse que o ato de comparar está presente em diversas situações do cotidiano – como visto na Tarefas 1, bem como, na matemática e na álgebra.

Nesse momento o docente ao explicar sobre a presença das comparações nos conteúdos matemáticos, acrescentou à discussão a presença das comparações nos sistemas lineares e nas equações. Explicitou que a igualdade entre os membros representa uma equação. Contudo, as comparação na matemática pode ser representada também pelos símbolos de desigualdade ($>$, $<$, $\leq$, $\geq$) e diferentes ($\neq$), entre outros.

A Amanda conseguiu avançar nesta tarefa que necessitava exercer comparações, uma vez que utilizou incógnitas para representar as medidas e os sinais de igualdade e desigualdade para realizar comparações.

> **Professor:** Como vocês compararam os elementos? Quais critérios vocês utilizaram para comparar?
> **Amanda:** Tamanho.
> **Amanda:** Coloquei que A = 3C , A = B + C, B = 2 (C + B), B = 2A, C e "C menor D que é menor que A que é menor que B.
> **Professor:** A Amanda estabeleceu diferentes tipos de relações. Isso indica que podemos estabelecer relações ou "comparações" de desigualdade: "maior que", "menor que"; e relações de igualdade. (Experimento, 2018).

Nos registros da aluna, conforme apresentado na figura a seguir, ela utilizou as letras que estavam próximas de cada segmento para representar suas medidas, respectivamente. Nas comparações relacionamos quantitativamente dois conjuntos, sendo que para representá-los simbolicamente é necessário certo grau de generalização. Nesse contexto, convencionou-se o símbolo literal para representar elementos de um conjunto, denominando-o de *variável.* (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014). De acordo com Caraça (1951, p.120) a variável é "[...]o símbolo da vida colectiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela". Esse conceito de Caraça dá um significado à *variável*, que foge ao que encontramos em muitos livros. Trata-a como uma unidade dialética entre o singular e o geral, entre a parte e o todo.

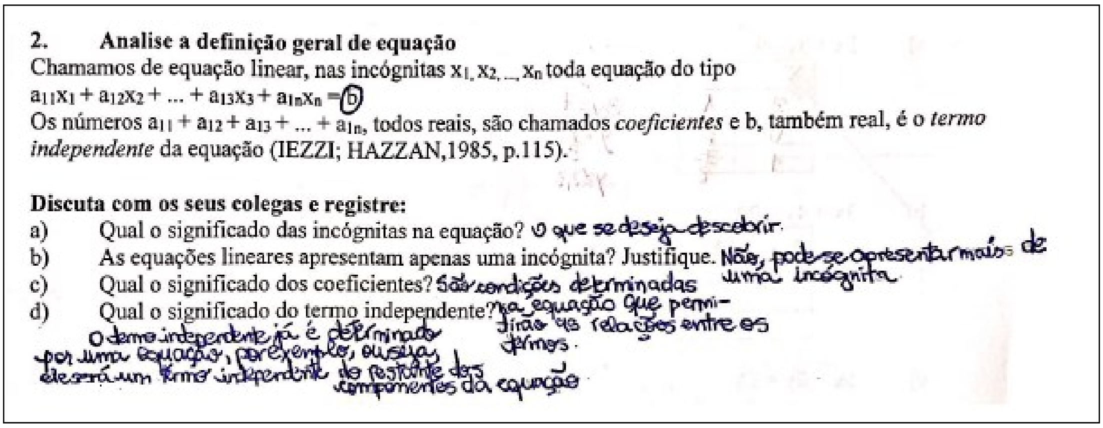
Mesmo conseguindo realizar as comparações entre os segmentos utilizando a generalização para representar as medidas, a referida aluna apresentou de forma simplificada o que entende por comparação – “ver se duas ou mais coisas possuem relação, e relação – “algo em comum”, como verificamos nos registros a seguir.

Essa tarefa desencadeou uma série de discussões, a partir da seguinte questão apresentada pelo professor: “o que essa tarefa tem a ver com equação?” Gabriel respondeu: “Na equação tem sempre dois termos e ambos apresentam uma igualdade, ou seja, uma comparação do 1º termo com o 2º termo”. O professor, então, argumentou se eles poderiam afirmar que: “estabelecer comparações é uma relação geral das equações”; os alunos concordaram com a afirmação. O professor concluiu a discussão relatando que a comparação – tendo como condição a igualdade, está presente na essência das equações.

Na tarefa 2.2 apresentamos a definição geral e, posteriormente, questionamos qual o significado de cada um dos “elementos” que a compõem. Nesse sentido, Amanda fez a seguinte observação: “Com esses exercícios a gente consegue entender o porquê da matemática - pensar, em sala de aula a gente aprende a fazer e pronto”. O comentário da aluna reforça nossas observações de que a ênfase dada no ensino de matemática/álgebra - no ensino médio, diz respeito aos métodos de resolução de problemas/exercícios e a exposição das definições matemáticas, sendo pouco tratados o estudo dos conceitos.

Sobre as respostas dos alunos nessa tarefa, eles não apresentaram dificuldade em compreender o significado de incógnita – remetendo-a a “um valor desconhecido” e/ou ao valor “procurado” e ao que deseja “descobrir”. Beatriz, respondeu que as equações lineares podem apresentar mais de uma incógnita e entendeu que os coeficientes determinam e/ou interferem no resultado das equações – identificando-os como “condições determinadas na equação que permitirão as relações entre os termos”. Na sua explicação sobre o termo independente, não conseguiu clarificar seu significado no âmbito das equações.

Figura 43 - Tarefa pela aluna Amanda.



2. Analise a definição geral de equação

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ toda equação do tipo

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{13}x_3 + a_{1n}x_n = b$

Os números $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n}$, todos reais, são chamados *coeficientes* e b, também real, é o *termo independente* da equação (IEZZI; HAZZAN,1985, p.115).

Discuta com os seus colegas e registre:

a) Qual o significado das incógnitas na equação? o que se deseja descobrir.

b) As equações lineares apresentam apenas uma incógnita? Justifique. Não, pode-se apresentar mais de uma incógnita.

c) Qual o significado dos coeficientes? São condições determinadas na equação que permitirão as relações entre os termos.

d) Qual o significado do termo independente? o termo independente já é determinado por uma equação, por exemplo, ou seja, ele será um termo independente do restante dos componentes da equação

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Sobre as respostas dos alunos na tarefa 2.1, eles não apresentaram dificuldade em compreender o significado de incógnita – remetendo-a “um valor desconhecido” e/ou o valor “procurado” e o que deseja “descobrir”. Beatriz, respondeu que as equações lineares podem apresentar mais de uma incógnita e entendeu que os coeficientes determinam e/ou interferem no resultado das equações – identificando-os como “condições determinadas na equação que permitirão as relações entre os termos”. Na sua explicação sobre o termo independente, não conseguiu clarificar seu significado no âmbito das equações.

Já Miguel, ao responder se as equações lineares são compostas apenas por uma incógnita, utilizou a definição geral das equações para justificar que elas possuem mais de uma incógnita, isso indica a compreensão sobre a representação geral das equações. No entanto, quando o questionamos sobre o significado dos coeficientes, ele apenas destacou que são “os números que multiplica as incógnitas” – destacando a funcionalidade operacional dos coeficientes, sem aprofundar sobre o conhecimento teórico. Ele também não conseguiu traduzir com assertividade o significado de termo independente.

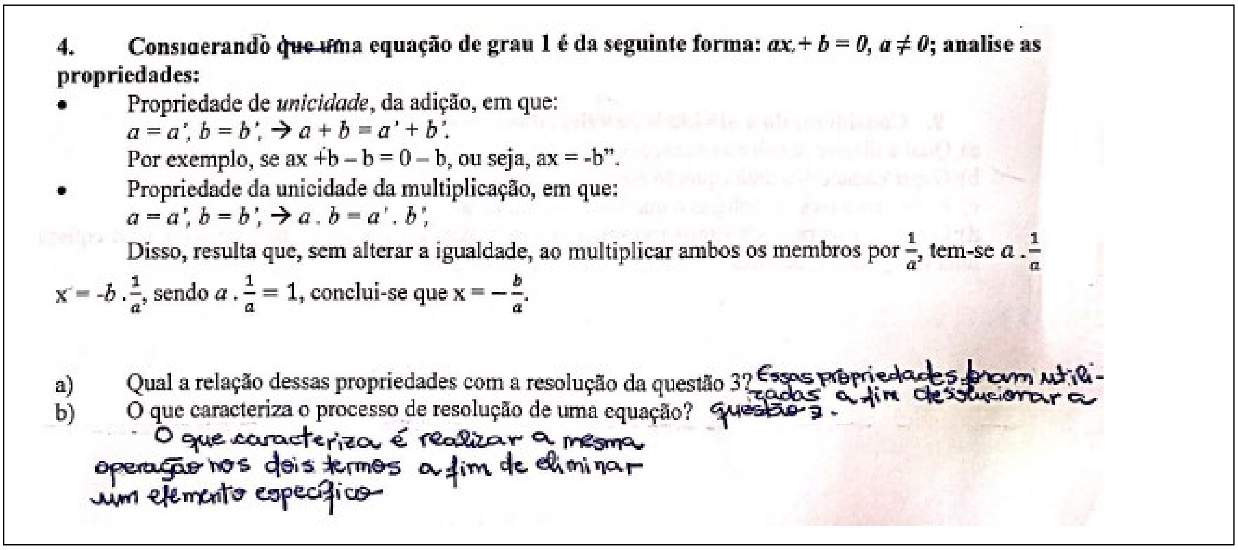
Miguel então perguntou ao professor: “O que é termo independente?” O professor comentou que sua resposta estava próxima do significado – resultado das operações “do outro lado da igualdade”; contudo, o esclareceu que o termo independente ou constante, não está associado a variáveis (ou incógnitas) e não, necessariamente está do outro lado da incógnita. Nessa discussão, o professor ainda pediu para que os alunos pensassem sobre qual a “influência” do termo independente no processo de resolução e no resultado de uma equação e de um sistema linear.

Além disso, o professor perguntou aos alunos se eles conheciam a definição de equação apresentada na tarefa, os alunos responderam que não. Nathália perguntou se a definição relacionava-se com matriz. Nesse momento de discussão sobre a tarefa, o docente explicou a definição de equação, evidenciando o significado de cada um dos seus termos e o nexo deles com os conceitos de equação e de sistemas lineares

Na tarefa 2.3, após a discussão sobre o conceito geral de equações propusemos aos alunos que resolvessem duas equações – simples, para verificarmos se apresentariam alguma dificuldade no que tange ao processo de resolução. Verificamos que todos os alunos solucionaram as equações com facilidade e de modo

A tarefa seguinte (2.4) está relacionada com a anterior, em que apresentamos um conjunto de propriedades que se relacionam com o processo de resolução das equações. O objetivo era de que o aluno percebesse que existem propriedades matemáticas que fundamentam o processo de resolução das equações, não sendo, simplesmente “o + passa para o outro lado da igualdade -” e vice-versa.

Figura 44 - 2.4 realizada pela aluna Beatriz.



4. Considerando que uma equação de grau 1 é da seguinte forma: $ax + b = 0$, $a \neq 0$; analise as propriedades:

- Propriedade de *unicidade*, da adição, em que:
  $a = a'$, $b = b'$, $\rightarrow a + b = a' + b'$.
  Por exemplo, se ax +b – b = 0 – b, ou seja, ax = -b”.
- Propriedade da unicidade da multiplicação, em que:
  $a = a'$, $b = b'$, $\rightarrow a \,.\, b = a' \,.\, b'$,
  Disso, resulta que, sem alterar a igualdade, ao multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$, tem-se $a \,.\, \frac{1}{a}$

$x = -b \,.\, \frac{1}{a}$, sendo $a \,.\, \frac{1}{a} = 1$, conclui-se que $x = -\frac{b}{a}$.

a) Qual a relação dessas propriedades com a resolução da questão 3? Essas propriedades foram utilizadas a fim de solucionar a questão 3.

b) O que caracteriza o processo de resolução de uma equação?

O que caracteriza é realizar a mesma operação nos dois termos a fim de eliminar um elemento específico.

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

O professor e os alunos dialogaram sobre a referida tarefa:

> **Nathália:** Não entendi nada disso aqui? (O que foi uma dúvida de modo geral dos alunos)
> **Professor:** Você aprendeu na 6ª, 7ª série as propriedades da adição, da subtração, associativa, comutativa. Por exemplo, temos a propriedade da unicidade da adição, se eu tenho um A que é igual a um A' e um B que é igual a um B', se eu somo o A + B será igual ao A' + B', no presente caso - quando vocês resolveram a equação, foi utilizado essa propriedade na equação de forma intuitiva.
> **César:** Professor como eu passo um número do 1º membro para o 2º?
> **Professor:** Na verdade você não está passando. Há uma propriedade para você tirar esse menos -4. Você tem que somar mais 4 em um membro e mais 4 no outro, essa é a propriedade da unicidade da adição. Para manter igual o que eu preciso fazer? Eu posso tirar de um lado sem acrescentar do outro?
> **César:** Não. Vai desequilibrar a balança.
> **Professor:** Isso mesmo. Então a ideia da propriedade é somar o 4 dos dois lados. (Experimento, 2018).

O Professor indagou aos alunos se eles entenderam as propriedades apresentadas, um aluno respondeu que sim e os demais não se manifestaram. Nos registros sobre esta tarefa, verificamos que os alunos reproduziram, em parte, a explicação do professor. Por exemplo, Beatriz registrou que o processo de resolução de equações é possível a partir da realização de "operações" nos dois membros da equação – ou seja, pelo *balanceamento.*

As reações dos alunos, como a manifestada por Nathália, mostram que as generalizações expressas nas propriedades têm que ser apropriadas em sua essência pelos sujeitos. O sujeito é quem vai atribuir sentido ao que está escrito. Do contrário, passa a ser um amontoado de símbolos. Esse é um dos problemas do ensino de álgebra.

Na tarefa 2.5 propomos aos alunos que resolvessem problemas envolvendo equações, sendo necessário traduzir algebricamente a situação apresentada e em seguida solucionar a equação.

Figura 45 - Enunciado da tarefa 2.5

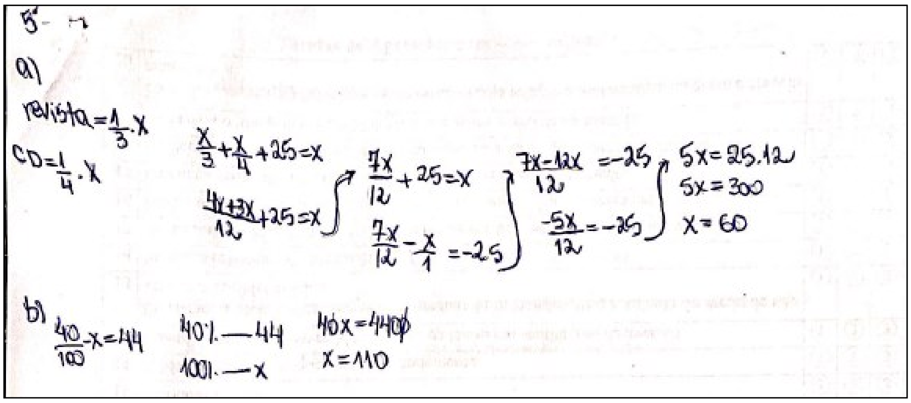
5. Resolva estes problemas:
a) Gustavo tinha certa quantia em dinheiro, foi ao shopping e gastou 1/3 da quantia na compra de uma revista, gastou 1/4 da quantia na compra de um CD e ainda ficou com R$ 25,00. Qual era a quantia que Gustavo possuía?

b) Os 44 alunos do 1º período de um curso de Matemática representam 40% dos alunos de todos os períodos desse curso. Quantos são os alunos de todos os período desse curso de Matemática?

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Os alunos não apresentaram dificuldades para modelar algebricamente a situação-problema proposta. Verificamos nos registros de Nathália a representação algébrica dos gastos com as revistas ($\frac{1}{3}x$) e CD ($\frac{1}{4}x$). Ela não apresentou dificuldades para "operacionalizar" os procedimentos de resolução.

Figura 46 - Tarefa 2.5 realizada pela Nathália.

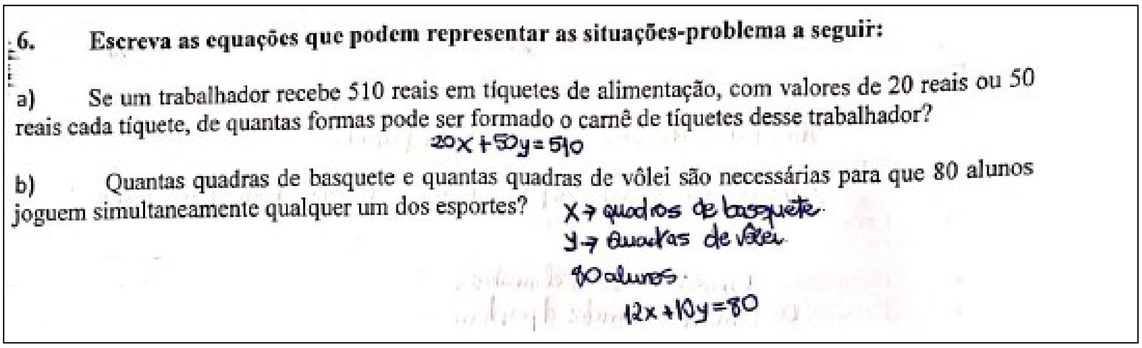


Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Gabriel também não teve dificuldade para representar algebricamente a situação-problema. No entanto, na alternativa B ele errou uma simples operação de divisão. Nas nossas observações de aulas, constatamos que esse tipo erro era recorrente nas resoluções de problemas.

Na tarefa 2.6 solicitamos aos alunos que continuassem representando algebricamente situações-problema, no entanto, a modelagem de cada equação envolveria duas incógnitas. Assim como nos problemas anteriores – com apenas uma incógnita, os alunos não apresentaram dificuldades em representar duas incógnitas em uma equação. Os alunos, como ilustrado na figura a seguir (item b) frequentemente designavam um significado as letras (incógnitas), por exemplo, "x representa a quantidade de quadras de basquete e y a quantidade de quadras de vôlei".

Figura 47 - 2.6 realizada pela Beatriz.


6. **Escreva as equações que podem representar as situações-problema a seguir:**

a) Se um trabalhador recebe 510 reais em tíquetes de alimentação, com valores de 20 reais ou 50 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?

$20x+50y=510$

b) Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes?

x → quadras de basquete
y → quadras de vôlei
80 alunos
$12x+10y=80$

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Na tarefa 2.7 propusemos aos alunos que resolvessem equações com duas incógnitas – as representadas na tarefa anterior. Os alunos até aquele momento, no conteúdo escolar, não tinham estudado métodos para resolver esse tipo de equação. A proposta era fomentar a criatividade para que eles buscassem alternativas para encontrar as soluções da equação.

Figura 48 - Tarefa 2.7

7. Resolvas as equações:

a) $10x + 12y = 80$

b) $5x - 2y = 2$

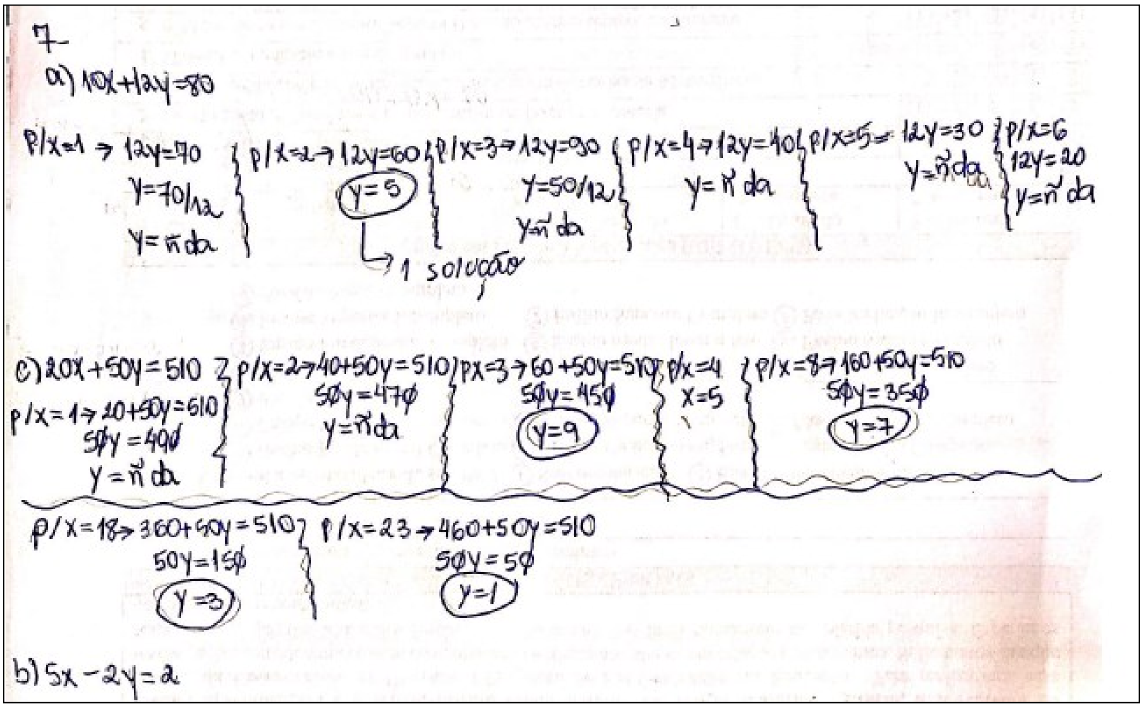
c) $20x + 50y = 510$

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Ao se depararem com essa tarefa os alunos "reclamaram" disseram que não haviam estudado esse conteúdo e não iriam conseguir resolver aquelas equações. O professor, então, pediu para que eles pensassem como tais equações seriam solucionadas num contexto em que não existisse um método ou um caminho específico a ser seguido para encontrar o resultado. Ele comentou que os babilônios utilizavam o *método da falsa posição*, em que num primeiro momento supunha-se um resultado – por tentativas. Nesse contexto, os alunos alertaram-se sobre a possibilidade de buscar a solução dessas equações por tentativas.

Para resolverem as equações, embora não estivesse explícito no enunciado, o professor os orientou que as soluções seriam números inteiros. Neste sentido, Beatriz, por tentativa, estipulou valores para a variável *x* e, em seguida, tentou encontrar o valor de *y*. Para realizar operações mais simples, ela substitui *x* por valores pequenos (x=1; x=2; x=3; ...; x=6) encontrando apenas um resultado. Já no item (c), Beatriz encontrou mais de uma solução.

Figura 49 - Tarefa .7 realizada pela Beatriz.



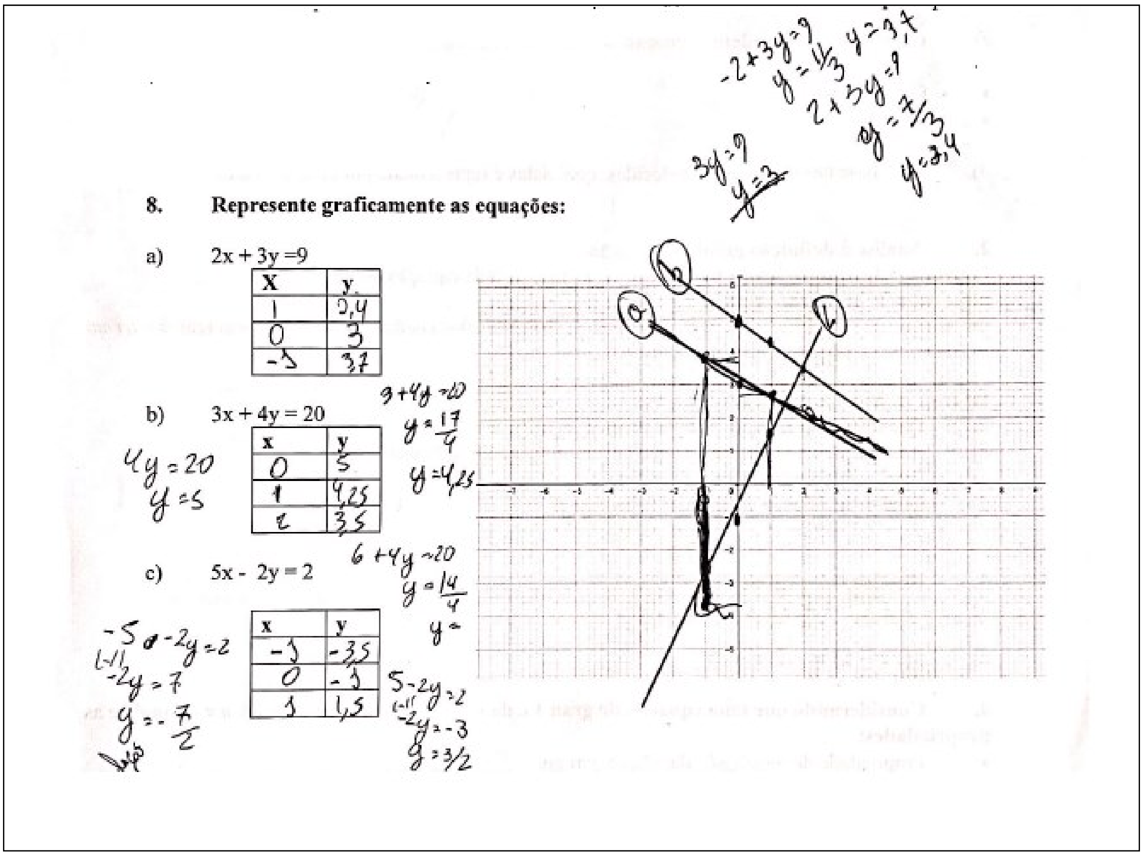
Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Após essa tarefa o professor questionou: qual a relação entre as duas incógnitas (x e y) na resolução da equação? Os alunos responderam que para encontrar o valor de uma incógnita precisavam descobrir o da outra. Analisaram que só identificaram o valor de y quando já haviam estipulado um valor para x.

O docente também debateu com os alunos se essa relação, entre duas incógnitas numa mesma equação, ocorria nos sistemas lineares. Os alunos analisaram que não poderia ser diferente, visto que as “propriedades” das equações se mantém em um sistema de equações lineares. Desse modo, o professor reforçou a importância de estudar sobre equações para a apropriação do conceito de sistemas lineares.

.Na tarefa 2.8 a proposta era que os alunos representassem graficamente as equações com duas incógnitas. Em tarefas anteriores os alunos já haviam compreendido como encontrar soluções para uma equação de duas incógnitas, assim, como ilustrado na figura a seguir eles não apresentaram dificuldades para resolver essa tarefa.

Figura 50 - Tarefa 2.8 realizada por Miguel.



Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Com base nas tarefas já realizadas, que abrangeram a discussão sobre a definição de equações, a modelagem algébrica e geométrica de equações com uma e com duas incógnitas e a resolução de problemas, as Tarefas 2.9 e 2.10 orientavam os alunos sobre as ações e operações realizadas.

Figura 51 - Tarefas 9 e 10.

9. Considerando a atividade anterior, discuta com seus colegas:

a) Qual a diferença entre as equações de uma e duas incógnitas? Justifique.
b) O que caracteriza uma equação com duas incógnitas?
c) Relata para os seus colegas o que você pensou para resolver essas equações.
d) Quais são os procedimentos (propriedades matemáticas) essenciais para resolver uma equação de uma incógnita? E de duas?

10. Relacione as definições a seguir com as equações e seus elementos.

Variável	"[...] é afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela" (p.120).
Fluência	"Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos os compartimentos comunicam e participam, todos, um da vida dos outros".
Interdependência	"O mundo está permanente evolução; todas as coisas, a todo momento, se transformam, tudo flui(...)".

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Conforme ilustramos nas figuras a seguir, na Tarefa 2.9 o aluno precisaria pensar sobre as características das equações com duas incógnitas – visto que nos sistemas lineares as equações têm, usualmente, duas ou mais incógnitas. Já na tarefa 2.10 a proposta era de que os alunos relacionassem as características identificadas - nas equações com duas incógnitas, com as relações gerais da álgebra: variável, fluência e interdependência.

Sobre a diferença entre as equações de uma e duas incógnitas, Miguel respondeu que a quantidade de soluções possíveis para cada uma delas seria diferente. Analisou que a equação com uma incógnita tem uma única solução e ele não tem dificuldade para encontrá-la. Já as equações com duas incógnitas podem ter diversas soluções e são muito mais difíceis de serem resolvidas. Disse que para resolver as equações com duas incógnitas pensou em apenas "jogar valores".

Mesmo com as discussões já realizadas sobre os juízos e conceitos relacionados à equação, observamos que o pensamento teórico ocorre de forma gradativa e diretamente relacionada com a mediação do professor: "[...] o significa das palavras evolui. A compreensão desse fato deve substituir o postulado da imutabilidade do significado das palavras (VIGOTSKI, 2008, p.151). Assim, também o conceito vai se modificando, mediante as aproximações que são realizadas pelo sujeito.

Nas questões apresentadas, esperávamos que os alunos evidenciassem a relação de dependência entre as duas incógnitas de uma equação, aspectos sobre a variável, os coeficientes e o método de resolução. Assim, coube ao docente promover a discussão sobre o comportamento dos juízos e conceitos nas tarefas realizadas.

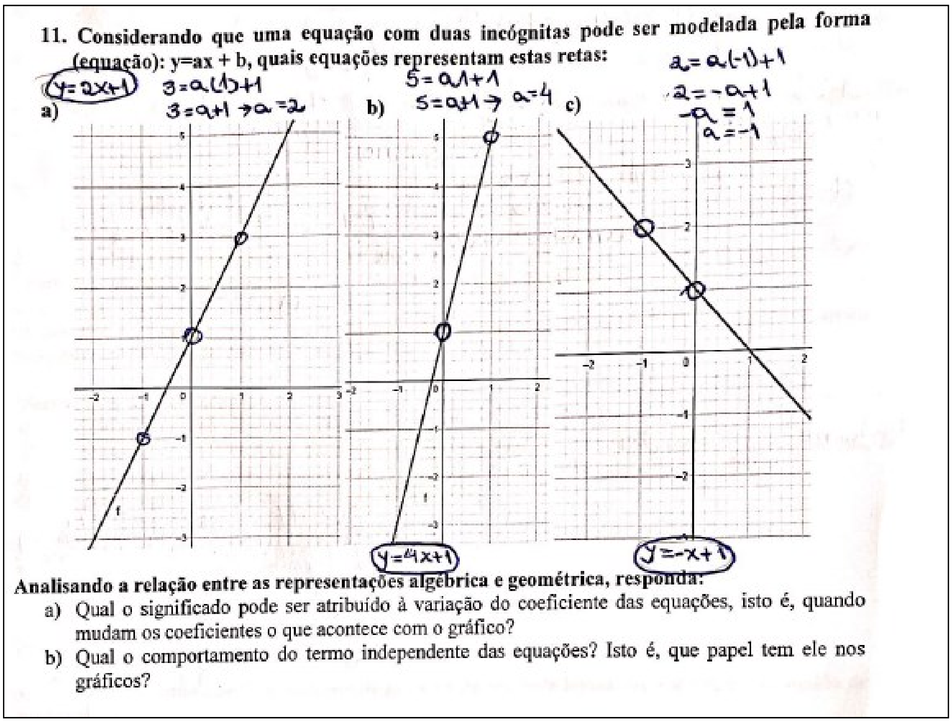
De forma análoga, na tarefa 2.10 os alunos realizaram a leitura em "voz alta" das definições de variável, fluência e interdependência e concordaram com elas, não estabelecendo nenhuma orientação específica com os juízos e conceitos de equações e sistemas lineares.

Na tarefa 2.11 os alunos precisariam modelar algebricamente uma representação algébrica, assim, relembrar o conceito de função que estudaram no ano anterior. No primeiro momento, apenas as alunas Amanda e Beatriz conseguiram modelar algebricamente as retas representadas. Posteriormente, com a orientação do professor os demais alunos conseguiram realizar essa tarefa.

A situação apresentada nos remete na necessidade de reconsiderar os processos de formação de conceitos não só de sistemas lineares, mas também de demais conceitos algébricos/matemáticos. É notório que o estudo de um conteúdo é "momentâneo" e poucos são os conhecimentos dos quais os alunos se apropriam integralmente na escola.

Sobre os questionamentos apresentados após a modelagem algébrica, os alunos conseguiram respondê-los apenas após uma explicação e orientação do professor, de forma simples e com uma linguagem retórica.

Figura 52 - Tarefa 2.8 realizada por Gabriel.

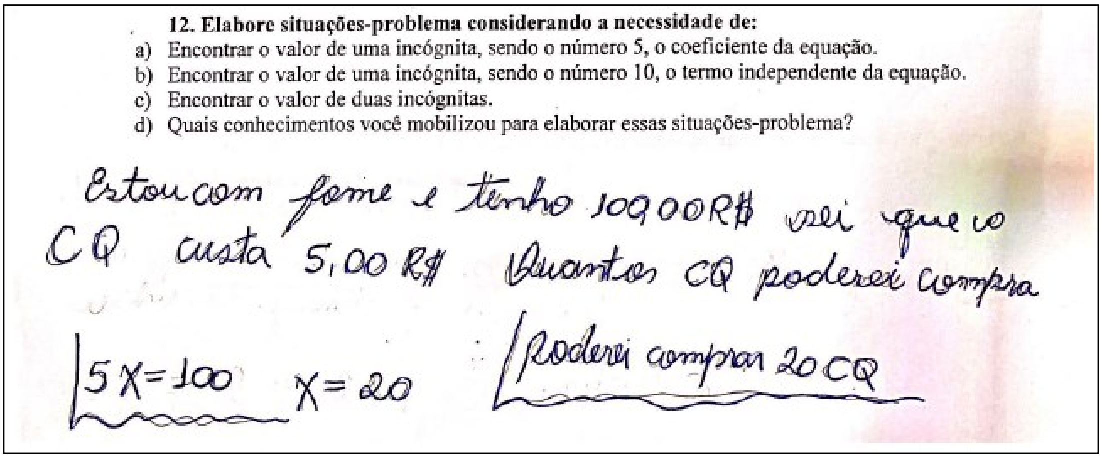


Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Para finalizar a tarefa sobre equação, propusemos aos alunos que criassem situações-problema envolvendo equações levando-se em conta determinadas condições. Observando que os alunos assimilaram os juízos e conceitos relacionados às equações, nesse momento, eles precisariam mobilizá-los para elaborar um problema específico. Assim, precisariam entender o significado e o comportamento dos coeficientes, termo independente e equações com duas incógnitas em um contexto específico.

Gabriel teve dificuldade em elaborar um problema, ele refez a situação-problema diversas vezes para buscar atender as condições dadas. Com a mediação do professor ele conseguiu elaborar um problema simples com o coeficiente da equação igual a 5.

Figura 53 - 2.12- resposta da alternativa a realizada pelo Gabriel.


12. Elabore situações-problema considerando a necessidade de:
a) Encontrar o valor de uma incógnita, sendo o número 5, o coeficiente da equação.
b) Encontrar o valor de uma incógnita, sendo o número 10, o termo independente da equação.
c) Encontrar o valor de duas incógnitas.
d) Quais conhecimentos você mobilizou para elaborar essas situações-problema?

Estou com fome e tenho 100,00R$ sei que o CQ custa 5,00 R$ Quantos CQ poderei compra

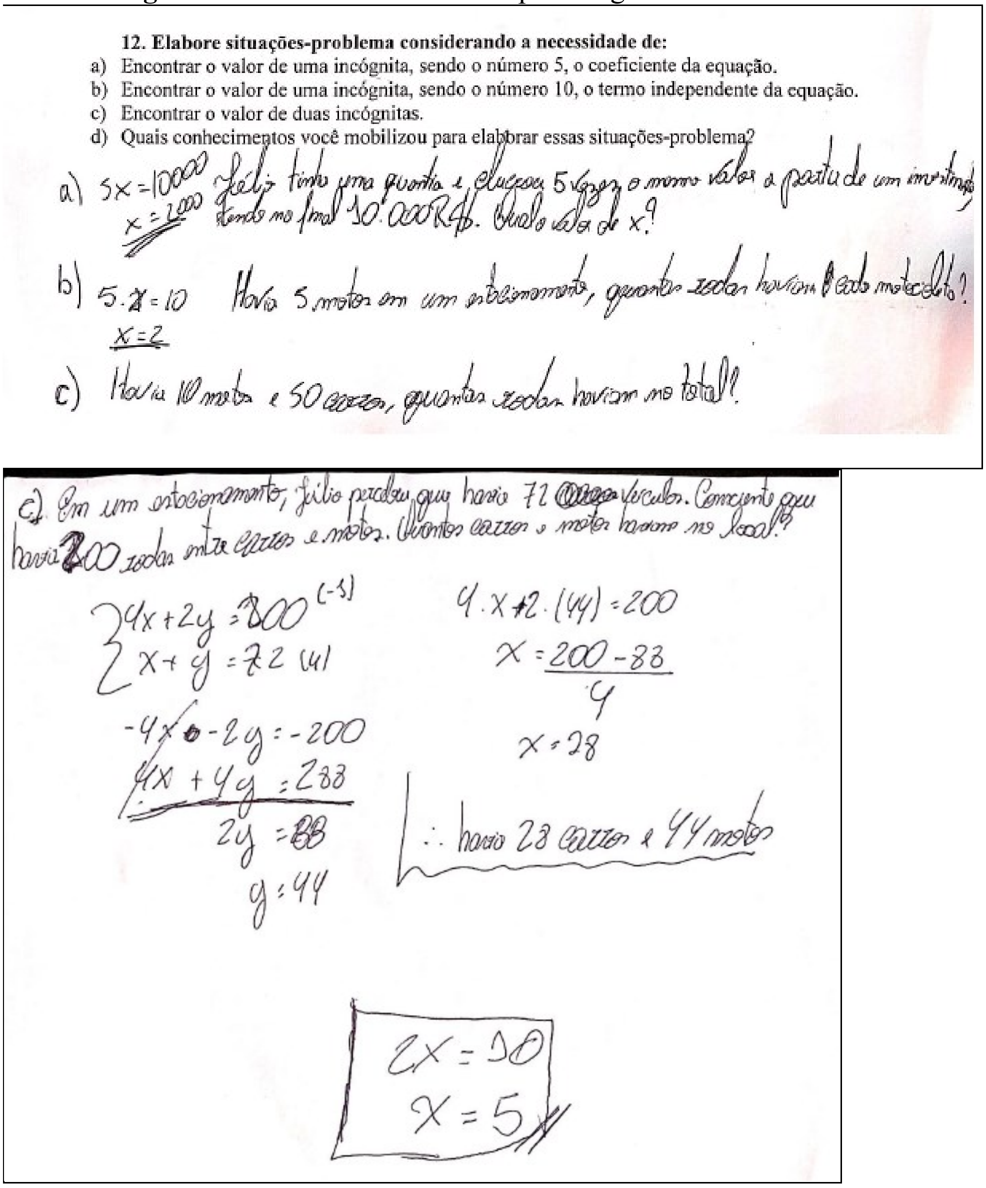
5x=100 x=20 Poderei compran 20 CQ

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Nas respostas de Miguel, verificamos que no item (a), a escrita não está coerente, visto que a pergunta é “qual o valor de x”, sendo que anteriormente não se fala em *x.* Ele pressupõe que o valor desconhecido se chama “x”, no entanto, poderíamos identificá-lo por outra letra. No item a situação apresentada não necessitaria de uma equação para solução, visto que é evidente que uma motocicleta tem duas rodas.

Já no item (c) Miguel reproduziu o contexto do problema da tarefa 6. O professor questionou porque ele fez isso e não utilizou sua criatividade. Ele respondeu que era mais fácil fazer algo semelhante ao já realizado e que estava com “preguiça de pensar”. Todavia, o professor pediu para que ele explicasse o problema relacionando-o com os juízos e conceitos estudados para, desse modo, verificar se tinha apropriado conhecimentos estudados e se conseguia aplicá-los em uma situação específica.

Figura 54 - Tarefa 2.12 realizada pelo Miguel



12. Elabore situações-problema considerando a necessidade de:

a) Encontrar o valor de uma incógnita, sendo o número 5, o coeficiente da equação.
b) Encontrar o valor de uma incógnita, sendo o número 10, o termo independente da equação.
c) Encontrar o valor de duas incógnitas.
d) Quais conhecimentos você mobilizou para elaborar essas situações-problema?

a) $5x = 10000$; $x = 2000$ Félix tinha uma quantia e aplicou 5 vezes o mesmo valor a partir de um investimento tendo no final 10.000R\$. Qual o valor de x?

b) $5 \cdot x = 10$; $x = 2$ Havia 5 motos em um estacionamento, quantas rodas haviam em cada motocicleta?

c) Havia 10 motos e 50 carros, quantas rodas haviam no total?

c) Em um estacionamento, Júlio percebeu que havia 72 veículos. Considerando que havia 200 rodas entre carros e motos. Quantos carros e motos haviam no local?

$$\begin{cases} 4x + 2y = 200 \quad (-1) \\ x + y = 72 \quad (4) \end{cases}$$

$$-4x - 2y = -200$$
$$4x + 4y = 288$$
$$2y = 88$$
$$y = 44$$

$$4 \cdot x + 2 \cdot (44) = 200$$
$$x = \frac{200 - 88}{4}$$
$$x = 28$$

∴ havia 28 carros e 44 motos

$$\boxed{\begin{matrix} 2x = 10 \\ x = 5 \end{matrix}}$$

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

A Tarefa sobre equações nos possibilitou verificar avanço no amadurecimento desta perspectiva de ensino – atividade de estudo, no processo de ensino-aprendizagem dos alunos e as dificuldades dos alunos em relação ao desenvolvimento do pensamento teórico sobre o referido conteúdo. Também, observamos a importância de discutir com os alunos juízos e conceitos sobre equações como um fundamento para o estudo de sistemas lineares, visto que na sala de aula o foco do ensino é operacionalização e a resolução de equações e não o seu conceito numa abordagem de rede conceitual.

Desse modo, sobre a ***transformação dos dados da tarefa,*** verificamos o movimento do pensamento no processo de apropriação dos conhecimentos teóricos. Os alunos, com a mediação do professor, conseguiram analisar os objetos de forma mais aprofundada, estabelecendo relações gerais sobre o mesmo. Os alunos se apropriaram dos juízos e do conceito de equações não apenas pelas suas características externas e/ou como uma ferramenta de resolução de problemas. Verificaram que as comparações, realizada notadamente pela igualdade, era uma relação geral das equações.

Na análise das características internas do objeto em estudo, os alunos discutiram sobre os elementos que constituem as equações – juízos referentes a elas, como a incógnita, o coeficiente, a variável e suas propriedades. Assim, observaram o comportamento de um sistema de conceitos, ora juízos, que tendem a revelar a essência das equações e dos Sistemas Lineares.

Nesse contexto, de acordo com Aquino e Rodrigues (2019, p.260) o pensamento teórico se forma com base nas *mediatizações dentro do todo*. Nesse processo, os referidos autores analisam que

> [...] o conceito reúne as características semelhantes, diferentes, coincidentes, contraditórias e forma a síntese do diverso. O conteúdo específico do conceito teórico é a relação objetiva entre o universal e o singular do objeto (o concreto pensado de Marx). O conceito expressa a conexão, a transição, a lei, a necessidade das coisas singulares.

A **modelação da relação universal,** de acordo com Rosa, Moura e Damazio (2019, p. 301) “trata-se de uma forma peculiar de abstração que traz as relações essenciais fixadas no objeto, fortemente vinculadas entre si, mas visualmente perceptíveis e representáveis com elementos materiais ou semióticos”. A Tarefa 2 discutida neste tópico tinham como foco as equações, nesse sentido, avaliamos e discutimos possíveis elementos que podem ser identificados como relações gerais do objeto estudado.

Não estipulamos de forma rígida a relação geral de equações – e não temos essa pretensão. Neste processo de formação de conceito, contemplado por um movimento constante e repleto de contradições, identificamos das comparações, da incógnita, do coeficiente, da variável e da propriedade de unicidade, depreende-se a essência das equações.

Discutimos sobre os referidos elementos e promovemos tarefas para que os alunos desenvolvessem a modelação pela abstração e generalização substantiva. Assim, com a mediação do professor, os alunos apropriaram-se de relações gerais das equações que também estavam presentes nos sistemas lineares, nas funções, entre outros; ou seja, relações que se manifestavam também em outras situações particulares, principalmente, no campo algébrico.

Desse modo, os alunos ao apropriarem-se das representações algébricas – dos seus "símbolos gerais" – incógnitas, variáveis, coeficientes, etc, e identificarem que essas representações tem o mesmo comportamento em diferentes situações – como discutido, "[...]os alunos convertem as estruturas mentais iniciais em conceito, que fixam certa "célula" do objeto estudado" (PUENTES, 2019, p.125).

Já na categoria de **controle e avaliação como resultado da tarefa de aprendizagem,** observamos que mesmo com algumas dificuldades esta tarefa ocorreu com mais fluidez, uma vez que os alunos já haviam desenvolvido uma tarefa de estudo em que o foco era as comparações.

De modo geral, os alunos conseguiram apropriar-se das discussões sobre comparações, igualdade, balanceamento, incógnita, variável, coeficientes, e representação geométrica das equações. Tiveram mais dificuldades em evidenciar as relações de dependência nas equações com duas incógnitas, interpretar as proposições sobre variável, fluência e interdependência e usar a criatividade para elaborar problemas que envolvessem equações, considerando determinados critérios.

Cabe ressaltar que propúnhamos discussões, com os alunos, sobre o desenvolvimento das tarefas de estudo, e, nesses momentos, tinham a oportunidade de se autoavaliarem. Após as tarefas, comentaram que as aulas estavam sendo interessantes, pois estavam lhes ajudando a aprender e relembrar "coisas" que haviam apenas decorado. Reconheciam que tinham "esquecido" muitas "coisas".

Nos discursos dos alunos, ainda predominavam os comentários sobre a abordagem das tarefas de estudo, que não era algo pronto e que os faziam pensar. Foi perceptível, também, que os alunos tinham dificuldades de utilizar a criatividade e as vezes ficavam com "preguiça", pois estavam fazendo algo que não eram acostumados, como debater juízos e conceitos e elaborar problemas. Nessa questão, está presente uma contradição – a de reconhecer a importância da abordagem, mas ainda a falta de condições subjetivas para avançar.

6.3. Desenvolvendo os Juízos e Conceito de Sistemas de Equações Lineares: análise da Tarefa 3

A Tarefa 3 visava o desenvolvimento dos juízos e conceitos relacionados a Sistemas de Equações Lineares. Considerando as tarefas sobre comparações e equações, na perspectiva da Teoria da Atividade de Estudo – já realizadas, esperávamos de antemão melhor desenvolvimento dos alunos.

Organizamos esta Tarefa, conforme apresentado no quadro a seguir, abrangendo a necessidade de estudar Sistemas de Equações Lineares – estabelecendo uma relação com o cotidiano dos alunos; discussões sobre a definição de sistemas lineares – seus juízos e conceitos; desenvolvimento das modelagens algébricas e geométricas do conteúdo – com o uso de vídeos e tecnologias digitais; estudo sobre sistemas equivalentes e suas propriedades; e a discussão, classificação e resolução de situações-problema de Sistemas de Equações Lineares.

Desse modo, a Tarefa proposta exigiu dos alunos o desenvolvimento de diferentes tipos de ações que influenciaram a formação do conceito em estudo, pautando-se no pensamento teórico. Tais tarefas, assim, diferenciam-se das abordagens presentes nas salas de aulas - que evidenciam os métodos de resolução, em detrimento das discussões sobre os juízos e conceitos dos conteúdos.

Quadro 10 - Organização das tarefas sobre os juízos e o conceito de Sistemas de Equações Lineares.

<table>
<tr><th colspan="3">O estudo de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio
Tarefa 3: Desenvolvendo o conceito de sistema de equações</th></tr>
<tr><th>Tarefa</th><th>Ações</th><th>Objetivo</th></tr>
<tr><td>3.1, 3.2 e 3.3: Qual a futura profissão que você pensa em exercer? Introdução da ideia de Sistemas de Equações Lineares.</td><td>Encontrar um “valor(valores)” desconhecido(s), que atenda a determinadas condições, visando a resolução de problemas</td><td>Introduzir o “conceito” de Sistemas de Equações Lineares, como um conhecimento que possibilita ao aluno resolver um problema cuja solução tem como essência responder simultaneamente a condições dadas.

Verificar a Transformação dos dados da tarefa de estudo com a finalidade de descobrir a relação universal do objeto, que deverá ser refletida no correspondente conceito teórico.</td></tr>
<tr><td>3.4: Dando significado ao conceito/definição de Sistemas de Equações Lineares</td><td>Estabelecer as relações gerais – e a essência, dos juízos e conceitos relacionados a um Sistema de Equação Linear.</td><td>Traduzir o significado de Sistema de Equações Lineares e o sentido dos elementos que constituem a sua definição.</td></tr>
<tr><td>3.5: Resolução algébrica de Sistemas de Equações Lineares</td><td>Modelar algebricamente situações-problema por Sistemas de Equações Lineares.</td><td>Verificar a capacidade de utilizar a linguagem algébrica para representar situações do cotidiano.
Verificar como os alunos resolvem um Sistemas de Equações Lineares, dando sentido as operações realizadas e</td></tr>
</table>

O estudo de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio **Tarefa 3:** Desenvolvendo o conceito de sistema de equações		
Tarefa	**Ações**	**Objetivo**
		verificando possíveis dificuldades.
3.6, 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10: Sistemas Equivalentes	Compreender as propriedades presentes no processo de resolução de Sistemas de Equações Lineares.	Desenvolver o pensamento teórico dos alunos no processo de resolução de Sistemas de Equações Lineares.
3.11 e 3.12 Interpretação Geométrica dos Sistemas de Equações Lineares	Interpretar Sistemas de Equações Lineares representados geometricamente.	Verificar a capacidade do aluno em interpretar algebricamente uma representação geométrica.
3.13, 3.14 e 3.15 - Discussão de Sistemas de Equações Lineares	Compreender as classificações e as propriedades de Sistemas de Equações Lineares considerando suas diferentes formas de representação.	Verificar se os alunos conseguem aplicar o conceito estudado – sua relação geral, em situações/problemas particulares
3.16, 3.17 e 3.18 Situação-problema envolvendo Sistemas de Equações Lineares	Mobilizar os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares para resolver uma determinada situação-problema.	Verificar se os alunos conseguem aplicar o conceito estudado – sua relação geral, em situações/problemas particulares

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Iniciamos a primeira Tarefa sobre Sistemas de Equações Lineares, propondo aos alunos a leitura de uma reportagem[14] sobre como escolher a futura profissão. Os alunos, no ensino médio, em processo de formação de sua personalidade, têm dúvidas frequentes sobre qual "carreira", seguir após a conclusão da educação básica. A referida reportagem proporcionou discussões sobre quais critérios e condições eles precisariam considerar para "escolher" sua futura profissão, de modo que ficassem satisfeitos.

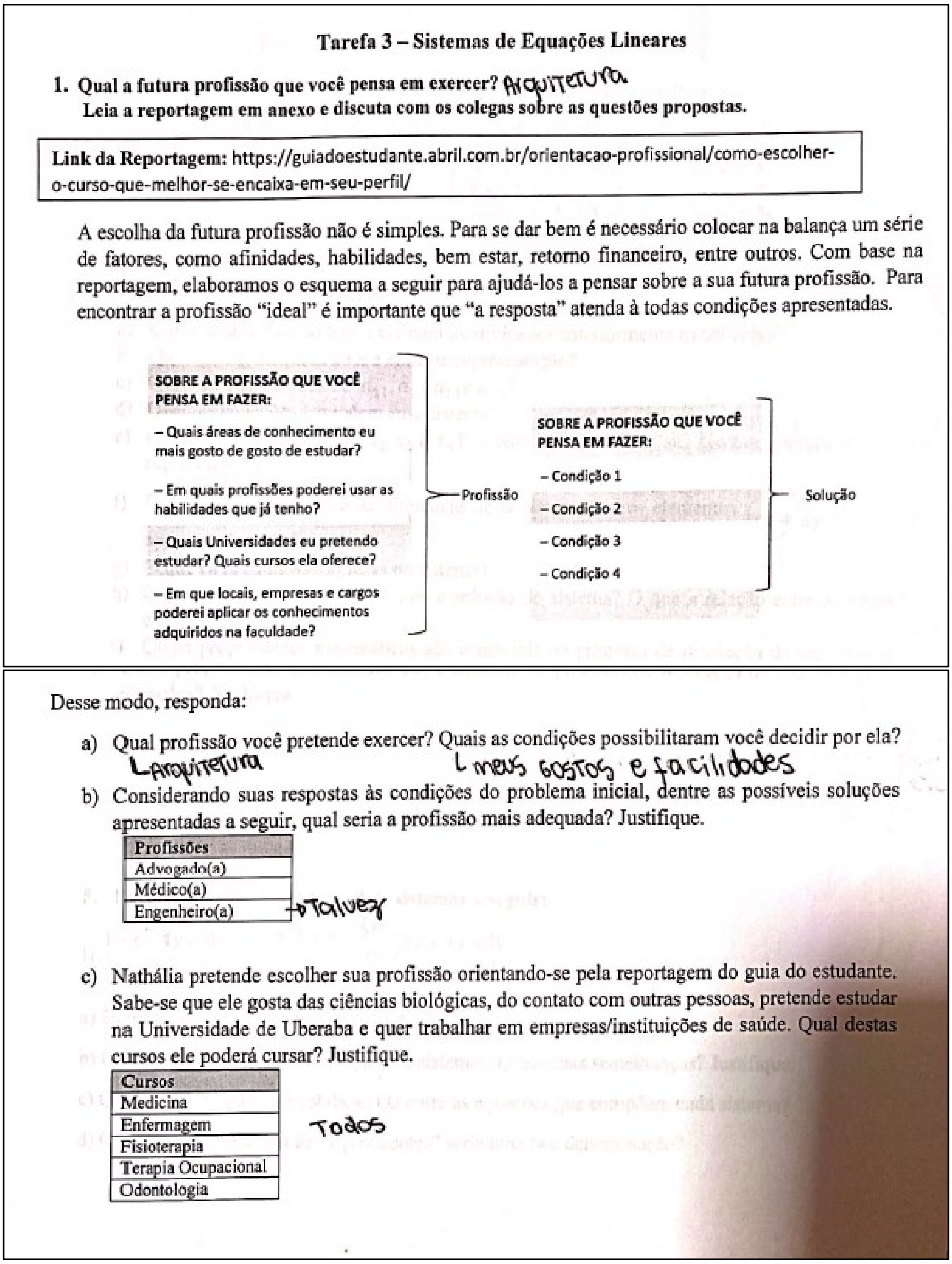
Esta Tarefa demonstra a possibilidade de promover nas aulas de matemáticas discussões que vão além do uso da matemática pela matemática, da memorização e aplicação de fórmulas. A função social do professor – que ensina diferentes conteúdos, dentre eles, a Matemática, compreende a humanização pelo ensino dos conteúdos escolares.

Destarte, as discussões com os alunos sobre qual profissão escolher foi muito enriquecedora, uma vez que eles expuseram seus gostos, as expectativas familiares, a

[14] Reportagem disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/como-escolher-o-curso-que-melhor-se-encaixa-em-seu-perfil/. Acesso: 13 de fev. de 2020.

influência das amizades, entre outros. Alguns alunos não conheciam todos os cursos que as Universidades e Faculdades - nas regiões em que eles moravam, ofereciam. Outros não conheciam as atribuições de uma determinada profissão, as formas de ingresso ao ensino superior, entre outros aspectos.

Figura 55 - Tarefa 3.1, com registros da aluna Beatriz.



Tarefa 3 – Sistemas de Equações Lineares

1. **Qual a futura profissão que você pensa em exercer?** Arquitetura
   Leia a reportagem em anexo e discuta com os colegas sobre as questões propostas.

Link da Reportagem: https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/como-escolher-o-curso-que-melhor-se-encaixa-em-seu-perfil/

A escolha da futura profissão não é simples. Para se dar bem é necessário colocar na balança um série de fatores, como afinidades, habilidades, bem estar, retorno financeiro, entre outros. Com base na reportagem, elaboramos o esquema a seguir para ajudá-los a pensar sobre a sua futura profissão. Para encontrar a profissão "ideal" é importante que "a resposta" atenda à todas condições apresentadas.

Desse modo, responda:

a) Qual profissão você pretende exercer? Quais as condições possibilitaram você decidir por ela?
   Arquitetura — meus gostos e facilidades

b) Considerando suas respostas às condições do problema inicial, dentre as possíveis soluções apresentadas a seguir, qual seria a profissão mais adequada? Justifique.

Profissões
Advogado(a)
Médico(a)
Engenheiro(a) → talvez

c) Nathália pretende escolher sua profissão orientando-se pela reportagem do guia do estudante. Sabe-se que ele gosta das ciências biológicas, do contato com outras pessoas, pretende estudar na Universidade de Uberaba e quer trabalhar em empresas/instituições de saúde. Qual destas cursos ele poderá cursar? Justifique.

Cursos
Medicina
Enfermagem
Fisioterapia
Terapia Ocupacional
Odontologia

Todos

d) Já Gabriel gosta das ciências exatas e tem facilidade na linguagem dos computadores, quer estudar na mesma Universidade que a Nathália. Nessas condições, qual destes cursos atende a esses interesses? Justifique.

Cursos
Medicina
Enfermagem
Fisioterapia
Terapia Ocupacional
Odontologia

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Sobre os diálogos dos alunos quanto a Tarefa, verificamos que alguns deles tinham a certeza do caminho que queriam seguir no ensino superior. A Beatriz gostaria de fazer arquitetura, Amanda e Nathalia medicina, Miguel queria fazer alguma engenharia mas ainda não sabia qual delas era sua preferência, César e Gabriel estavam mais indecisos. Nessa discussão, houve muita integração entre os alunos, em que argumentavam o porquê gostariam de exercer determinada profissão no futuro. Também, buscavam esclarecer dúvidas sobre as Universidades e cursos com o professor.

Analisavam e levantavam determinadas condições para a escolha da profissão, como mudar ou não de cidade, cursar uma instituição pública ou privada, consideravam, por exemplo, que os estudantes que gostavam de matemática tenderiam fazer alguma engenharia; já os que gostavam de biologia realizariam um curso da área de saúde.

No registro de Beatriz, no item da tarefa 3.1, dentre as opções de curso apresentada, o único que talvez ela realizaria era o de Engenharia, visto que ela gosta da área de exatas.

No item *(c),* na situação-problema apresentada, os alunos indicaram que todos os cursos poderiam ser escolhidos, considerando as condições dadas. Nesse contexto, o professor questionou se poderiam estabelecer uma relação daquela situação com Sistemas de Equações Lineares. Os alunos ficaram com dúvida, e o professor conduziu os alunos a pensarem sobre as possíveis soluções de um Sistema Linear. Amanda, então, analisou que a situação-problema apresentada poderia ter mais de uma solução, assim como os Sistemas de Equações Lineares que podem ter infinitas soluções determinadas.

Já, no item *(d),* os alunos não tiveram dificuldades em identificar que o problema não teria solução. Prontamente, Gabriel já fez a relação com os Sistemas de Equações Lineares – também podem não ter solução e, assim, são classificados como “impossível”.

Figura 56 - Tarefa 3.2

2. Discuta com os colegas:
a) Qual a característica geral desse problema?
b) Qual a relação do problema anterior com o conteúdo de sistemas de equações lineares?

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2018.

A tarefa 3.2 manteve as discussões sobre a situação problema apresentada e os Sistemas de Equações Lineares. Com o auxílio do professor, a turma conseguiu relacionar a discussão sobre qual profissão pretenderiam exercer, como uma situação-problema a ser resolvida – como, por exemplo, um Sistema de Equações Lineares. Os alunos ponderaram que para resolver o problema, precisariam analisar determinadas condições que influenciariam no resultado. Para tanto, precisariam encontrar uma resposta que satisfizesse, de forma simultânea, as condições expostas.

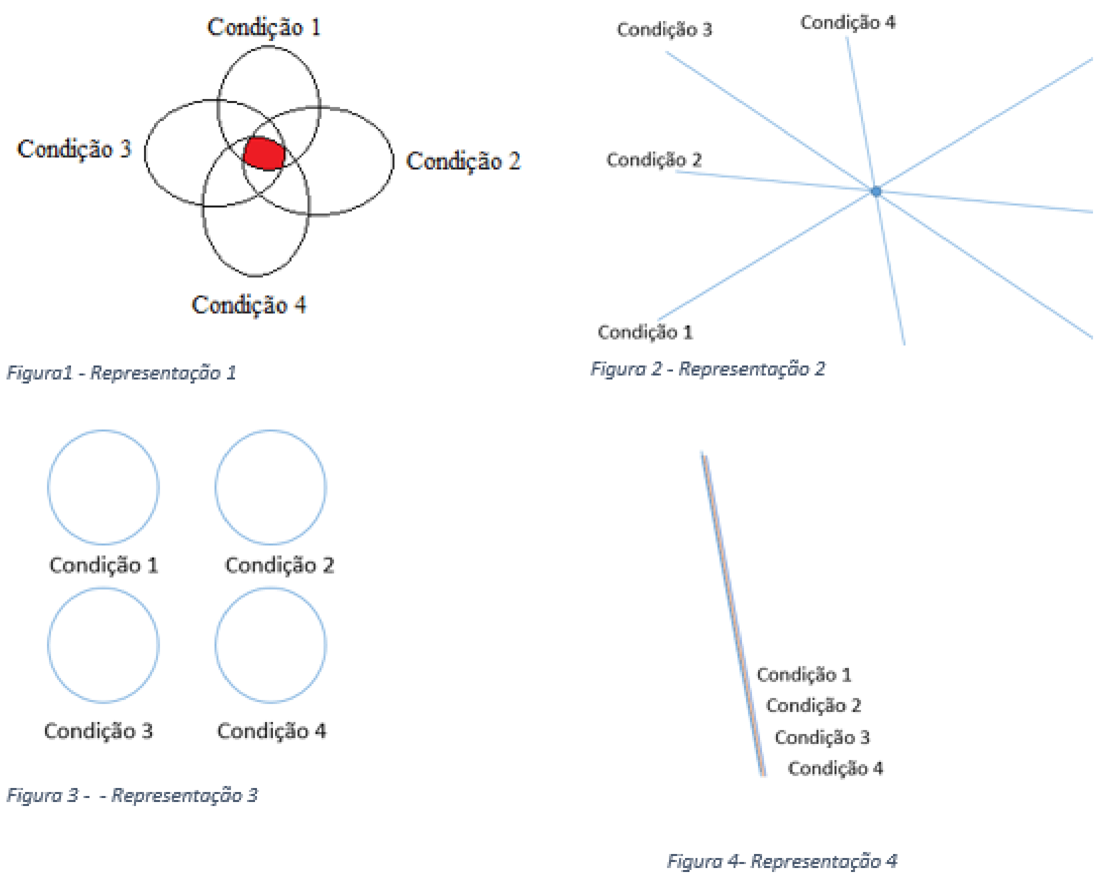
Por exemplo, a convergência das respostas sobre as perguntas: "qual área de conhecimento quer estudar?", "em quais profissões utilizarei as habilidades que possuo?", "quais Universidades eu pretendo estudar?" e "quais locais e empresas poderei trabalhar?"; indicaria uma profissão a ser seguida. Miguel comentou: "eu quero fazer um curso da área de exatas, gosto de matemática, posso sair da cidade, quero trabalhar numa grande empresa; essas são as minhas condições [...] a solução do meu problema é fazer engenharia, mas ainda não sei qual delas". Amanda observou que a relação geral seria achar uma "resposta" em comum para todas as perguntas (condições). Gabriel comentou: "por que não aprendemos assim antes?"

O professor questionou: "Qual a relação de Sistemas de Equações Lineares com essa discussão?" Os alunos responderam que a situação se aproxima de Sistemas de Equações Lineares, porque as condições da situação se assemelham a uma equação, e um conjunto de condições representaria um Sistema de Equações. Para resolver a situação-problema apresentada e o Sistema de Equações Lineares, precisaram achar uma solução comum para todas condições/equações. Nathalia analisou: "como na tarefa que fizemos, os sistemas podem ter mais de uma solução, uma única solução ou não ter nenhuma solução, essa é a relação de sistemas com o problema".

Os alunos a pedido do professor iniciaram a Tarefa 3.3. Na figura a seguir apresentamos essa tarefa que ilustra a relação das condições de um problema em diagramas. Em seguida, propõe-se que os alunos relacionem esses diagramas com as situações-problema apresentadas incialmente e com os Sistemas de Equações Lineares.

Figura 57 - Tarefa 3.3

3. Analise os esquemas a seguir:



Responda:

a) Quais as relações pode se estabelecer entre essas figuras, isto é, o que é geral e o que é específico?
b) Qual a relação entre elas e os problemas da questão 1? Justifique.
c) Estabeleça relações entre essas figuras com os sistemas de equações lineares. Quais as suas semelhanças? E o que caracteriza essas relações? Justifique.

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2018.

Dando continuidade a tarefa, os alunos não apresentaram dificuldades para interpretar os diagramas e relacioná-los com Sistemas Lineares. Nas figuras 1 e 2 (da tarefa) observaram que as representações tinham apenas um ponto em comum e relacionaram com uma única solução, no entanto, não lembraram como classificaria –

possível determinado. Na figura 3 (da tarefa), verificaram que as "condições" não apresentavam relação, e poderiam indicar um sistema sem solução – os alunos lembraram que ele é classificado como "impossível". Já, na figura 4 (da tarefa), os alunos observaram que as retas se sobrepunham, indicando que poderia representar um sistema com muitas soluções – também não recordaram que o Sistema poderia ser classificado como *possível e indeterminado.*

Analisamos que essas Tarefas, com diferentes questionamentos, análises e reflexões, permitiram "[...] modificar as imagens ideais ou os "projetos das coisas", e a essa modificação é que se chama de pensamento" (RIBEIRO, 2019, p.279). Nesse processo, as representações e a linguagem – nesse caso a linguagem algébrica, tem papel fundamental na transformação da imagem (DAVIDOV, 1988).

Na tarefa 3.4, apresentamos aos alunos uma definição formal de Sistemas de Equações Lineares e propusemos uma discussão sobre os elementos que o constituíam.

Figura 58 - Tarefa 3.4

4. Dando significado ao conceito/definição de sistema de equações lineares.

Analise esta representação de um sistema de equações lineares na sua forma geral:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Discuta com os seus colegas e registre:

a) O que essa definição tem a ver com as atividades anteriormente trabalhadas?
b) Quais os significados de n e m nessa representação?
c) Quais os significados de $a_{11}, a_{12}, a_{13} e\ a_{1n}$?
d) Quantas equações compõem esse sistema?
e) Quais os significados $x_1, x_2, x_3\ e\ x_n$? Como essas letras se comportam/repetem nessa representação?
f) Quais as semelhanças e as diferenças deste sistema e seus elementos $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ com o apresentado anteriormente?
g) O que cada equação expressa no sistema?
h) Qual a relação das equações com a solução do sistema? O que a relação entre as equações expressa no sistema?
i) Quais propriedades matemáticas são essenciais no processo de resolução de um sistema de equações? Justifique.

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2018.

As Tarefas sobre comparações e equações, sobretudo, quando discutimos a definição de equações com os alunos contribuíram significativamente para os alunos responderem essas questões. Gabriel comentou: “Nossa professor, essa “tarefa” é parecida com aquela de equações”. O professor respondeu que realmente elas apresentavam semelhanças por se tratavam de definições formais – generalizações, mas uma era de equações e essa é de Sistemas de Equações Lineares.

Sobre a relação dessa definição com as tarefas anteriores, César respondeu: “como é a definição de Sistemas Lineares, ela tem total relação com a tarefa anterior, pois estabelecemos também relação do problema com sistemas”. O professor então indagou: “mas em quais aspectos especificamente podemos explicitar uma relação?” Beatriz respondeu: “as equações determinam as condições do resultado do problema”. Observemos o diálogo:

> **Professor**: O que esta atividade tem a ver com as anteriormente trabalhadas?
> **César**: cada condição é uma equação e dentro dessa condição pode ter diversas variáveis, sendo que todas as condições formam a solução.
> **Professor**: Imaginem aquele problema das profissões como um sistema, agora é possível?
> **Miguel**: Cada pergunta seria uma equação/condição do sistema.
> **Professor:** Somente com a definição conseguiriam estabelecer relação com o problema?
> **Miguel**: Não, após a atividade das profissões foi mais fácil. (Experimento, 2018).

Assim, o professor explicou aos alunos que a definição representava a forma geral, formalizada, dos Sistemas de Equações Lineares. A definição geral poderia ser utilizada para construir Sistemas com duas equações e duas incógnitas e, até, infinitas equações e incógnitas.

Sobre a definição de Sistemas de Equações Lineares, continuaram as discussões:

> **Professor:** E quais os significados de n e m?
> **Gabriel**: *n* é a quantidade de variáveis e o *m* é a quantidade de coeficientes.
> **Professor**: Tem quantas equações nesse sistema?
> **Gabriel**: tem *n* equações, porque são muitas as equações.
> **Professor**: Porque o x_1 se repete em todas as linhas?
> **Miguel:** Porque a incógnita tem que ser a mesma.
> **Professor**: Quando não tem a incógnita o coeficiente vale quanto?
> **Miguel:** Zero (Experimento, 2018).

Além disso, César entendeu que “$a_{11}, a_{12}, a_{13} e\ a_{1n}$", representavam os valores dos coeficientes que multiplicavam as incógnitas e que eram diferentes.

César: O a é o número que está multiplicando o x, que é a incógnita, e o b é o resultado da equação.
Miguel: Uma dúvida, porque é representado a_{11}, a_{12}, a_{13}, e não pode ser somente a_1, a_2, a_3?
Professor: Porque é uma representação que pode ocorrer em forma de uma matriz, por exemplo - primeira linha; primeira coluna [...] (Experimento, 2018).

O professor ainda perguntou se os valores $(a_{11}, a_{12}, a_{13} e\ a_{1n})$ não poderiam ser iguais. Miguel disse: "acho que sim, tipo 2x +2y".

Nesse processo, observamos o desenvolvimento da abstração e generalização substantivas, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento teórico, "[...] a tarefa é uma unidade entre a meta (objetivo) e as condições para seu alcance" Davidov (2019, p. 293).

Sobre as semelhanças e as diferenças entre a definição geral de sistema e o apresentado no item *(f)* - $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$, Beatriz respondeu: " uma (a definição geral) representa n condições e a outra (exemplo do item f) aponta somente duas". Continuaram, assim, o diálogo e discussões sobre as tarefas e a definição de Sistemas de Equações Lineares.

Professor: Vocês acham que a aula está repetitiva?
Miguel: Um pouco. Porque parece que são as mesmas perguntas.
Professor: Sim. Mas antes estávamos tratando de qual assunto?
César: Comparações e Equações
Professor: São as mesmas perguntas de equações? O mesmo conteúdo? Se não, porque é repetitivo?
Alunos: Porque o sistema é um conjunto de equações.
Professor: Assim, se você entende bem equações, a chance de entender bem sistema é grande, por isso equações vem antes de sistema.
(Alunos: Concordaram)
Professor: O que cada equação expressa em um sistema?
Beatriz: Uma condição.
Professor: Qual a relação das equações com a solução do sistema?
Amanda: Que elas possuem um resultado simultâneo.
Professor: Por que é importante entender a fórmula mais geral?
Amanda: Porque é dela que sai as mais específicas.
(Experimento, 2018).

Analisamos que as tarefas promovidas até este momento de discussões começaram a contribuir com o desenvolvimento do pensamento teórico. De acordo com Aquino e Rodrigues (2019, p.256), fundamentados em Engels[15] (1974), "[...] o

[15] ENGEL, F. Viejo prólogo para el [Anti-]Dühring. Sobre la dialéctica. In: **Carlos Marx y Federico Engels. Obras Escogidas (en tres tomos)**. T. III, Moscú: Progreso, 1974, p. 57-65).

pensamento teórico é uma capacidade que se cultiva por meio das abstrações teóricas que expressam a síntese do conhecimento da realidade da vida”.

Nesse sentido, ponderamos que esta discussão sobre os juízos e o conceito de Sistemas de Equações Lineares, que partiu da análise do concreto real– com as comparações, e, agora, está avançando para as representações sintetizadas, sugerem que o desenvolvimento dos conceitos científicos é fundamental para a formação do pensam

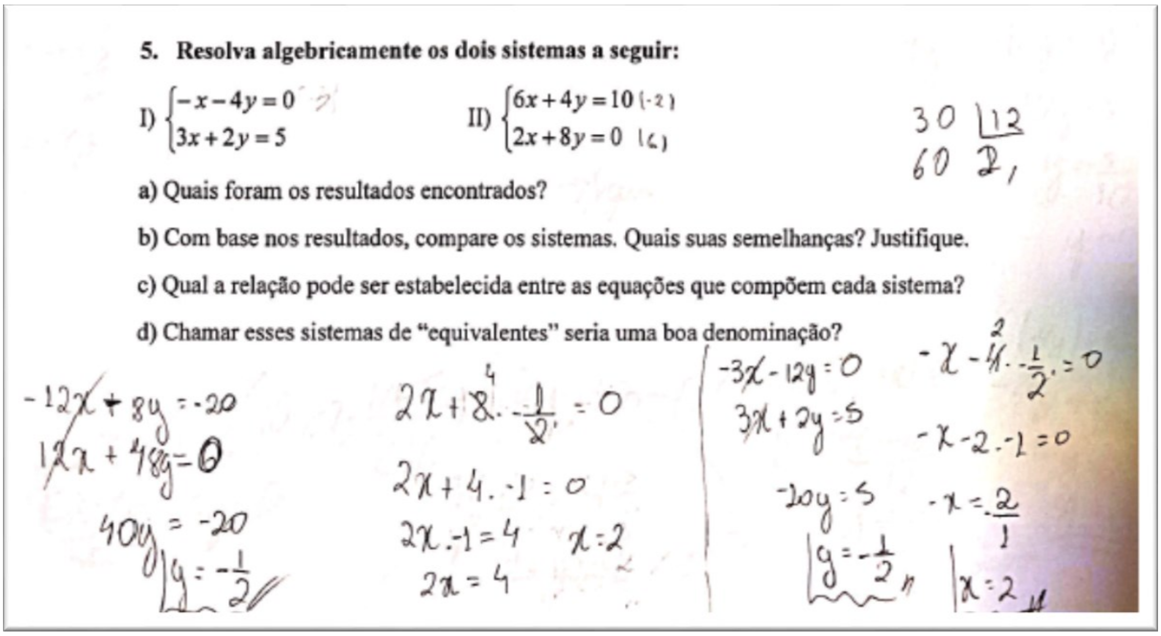
Davídov (1988, p 164) chama a atenção para o fundamento que diz respeito à assimilação dos conhecimentos científicos,

> [..] ao assimilar estes conhecimentos a pessoa já não lida com a realidade que imediatamente o circunda, pois o “objeto de cognição” está mediatizado pela ciência como formação social, pela sua história e pela experiência. nesse objeto de distintos aspectos, apresentados ao indivíduo em forma de conteúdo generalizado, abstrato, de seu pensamento.

Assim, corroboramos com Aquino e Rodrigues (2019) que analisam que o conhecimento cientifico é a forma universal de expressão do pensamento teórico e se desenvolve na atividade objetal-sensorial, dando sentido aos juízos e conceitos.

Na tarefa 3.5, propusemos que os alunos resolvessem algebricamente dois Sistemas de Equações Lineares com duas incógnitas. Os alunos não tiveram dificuldades em resolver os sistemas – como o exemplo apresentado na figura s seguir, todos os alunos utilizaram o método da adição para resolvê-lo.

Figura 59 - Tarefa resolvida por Miguel.



Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Após os alunos encontrarem as soluções dos dois sistemas, eles discutiram a tarefa com o professor. Beatriz foi a primeira a encontrar os resultados e já comentou que as soluções eram iguais. Conforme indicado no item (*b)* da tarefa, o professor orientou que os alunos analisassem as equações e os sistemas evidenciando se teriam alguma relação. Gabriel identificou que, na primeira equação do *Sistema II* $(6x + 4y = 10)$, os coeficientes eram duas vezes os valores dos coeficientes da segunda equação do *Sistema I* $(3x + 2y = 5)$. Assim como a equação $2x + 8y=0$ era igual a $–x – 4y = 0$ *multiplicado por (-2).* Assim Gabriel comentou: "as equações do sistema I são parecidas com a do sistema 2, basta multiplicarmos cada uma um valor que elas ficam iguais".

Desse modo o professor, então, perguntou se poderiam "classificar" a relação desses sistemas como equivalentes e se conheciam esse termo. Os alunos concordaram com o professor em poder denominar os sistemas como equivalentes, mas não recordavam desse termo. Desse contexto, o professor deu início as tarefas sobre Sistemas Equivalentes.

A Tarefa seguinte, foi iniciada com a definição de Sistemas Equivalentes, em que o professor pediu para que os alunos fizessem uma leitura. Em seguida, foi apresentado um vídeo[16] que explicava como identificar quando dois sistemas eram equivalentes.

Figura 60 - Orientações da Tarefa sobre Sistemas Equivalentes.

Sistemas Equivalentes – Definição

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Por exemplo, dados os sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Verificamos que o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

Exemplo de como identificar Sistemas Equivalentes: https://www.youtube.com/watch?v=cpwBxz-vw5A

Fonte: Elaborado pelo o autor, 2018.

Após a leitura da definição de Sistemas Equivalentes e a análise do vídeo, os professores e alunos discutiram:

> **Professor:** O vídeo apresentado abordou os sistemas equivalentes O que ele tem a ver com a resolução de sistemas lineares?
> **César e Miguel**: Quando os sistemas são equivalentes, a mesma solução que encontrar para um sistema será equivalente para outro sistema.
> **Professor:** Quando, por exemplo, se multiplicam as equações de um sistema, uma por -2 ou e a outra por 6, resultará num sistema equivalente?
> **Miguel:** Escalonamento é a mesma coisa?
> **Professor:** O escalonamento e método da adição, por exemplo, são constituídos com essa propriedade (sistemas equivalentes). Buscamos um sistema equivalente “mais fácil” de ser resolvido (Experimento, 2018).

As Tarefas 3.6 e 3.7, 3.8 e 3.9, desse modo, visaram promover a assimilação dos alunos sobre as ações e propriedades necessárias para o desenvolvimento de Sistemas Equivalentes. Trata-se de uma ação de uma série de tarefas práticas concretas particulares, que se resolvem a partir do modo de ação geral.

Ressaltamos as tarefas 3.8 e 3.9, em que continuamos a trabalhar com Sistemas Equivalentes, porém, acrescentamos mais uma incógnita, ou seja, começamos a estudar Sistemas Lineares com três equações e três incógnitas. Além disso, foram incluídos os teoremas que traduzem a ação geral para a obtenção de sistemas equivalentes, conforme apresentado a seguir.

[16] Vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=cpwBxz-vw5A. Acessado em 14 fev. de 2020

Figura 61 - Tarefa 3.8 e 3. 9.

8. Análise os sistemas equivalentes:

$$\text{I)}\begin{cases}2x+4y+2z=18\\2x+y-z=2\\-3x+y+2z=4\end{cases}\qquad \text{II)}\begin{cases}4x+2y-2z=4\\6x-2y-4z=-8\\x+2y+z=9\end{cases}$$

a) Quais as características desses sistemas equivalentes?

b) Com base no sistema apresentado e nas atividades realizadas, explique este teorema:

Teorema I: Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número K≠ 0, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

9. Análise os sistemas equivalentes:

$$\text{I)}\begin{cases}x+3y+2z=2\\3x+5y+4z=4\\5x+3y+4z=-10\end{cases}\qquad \text{II)}\begin{cases}x+3y+2z=2\\-4y-2z=-2\\-12y-6z=-20\end{cases}$$

a) Por que esses sistemas são equivalentes? Justifique

b) Com base no sistema apresentado e nas atividades realizadas, explique este teorema:

Teorema II: Se substituirmos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido S', será equivalente a S.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Mesmo nas ações envolvendo sistemas com três equações e incógnitas - *Sistema 3 x 3*, os alunos não tiveram dificuldades em identificar e justificar o porquê dos sistemas serem equivalentes, conforme a figura a seguir. Verificamos nos registros que eles estabeleceram as relações entre as equações que se configuravam como equivalentes – indicando a operação que precisariam exercer sobre a equação.

Figura 62 - Registro de Beatriz em relação a tarefa 3.8.

$$\text{I)}\begin{cases}2x+4y+2z=18\\2x+y-z=2\\-3x+y+2z=4\end{cases}\quad \begin{matrix}x2\\x-2\\:2\end{matrix}\quad \text{II)}\begin{cases}4x+2y-2z=4\\6x-2y-4z=-8\\x+2y+z=9\end{cases}$$

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Em relação aos teoremas apresentados, os alunos entenderam que eles revelaram uma maneira formal das ações que eles estavam desenvolvendo. Sobre o Teorema I, Gabriel comentou: "professor, quando multiplicamos toda a equação por um número e montamos um sistema, estamos fazendo isso". Beatriz analisou: "quando resolvemos um sistema por escalonamento utilizamos esses teoremas". César observou que não lembra de ter estudado esses teoremas, analisou que só resolvia os sistemas sem pensar em nada, mas que agora entende o que faz e tem sentido. Isso mostra que há um movimento entre o geral e o particular e que o pensamento teórico se desenvolve, quando ocorre o movimento, as contradições e nova sínteses.

Assim, na tarefa 3.10 foi proposto que os alunos utilizassem Sistemas Equivalentes para resolverem os Sistemas Lineares apresentados.

Figura 63 - Tarefa 3.10

10. Utilizando sistemas equivalentes, resolva:

a) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+2y+4z=10 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+7z=9 \end{cases}$

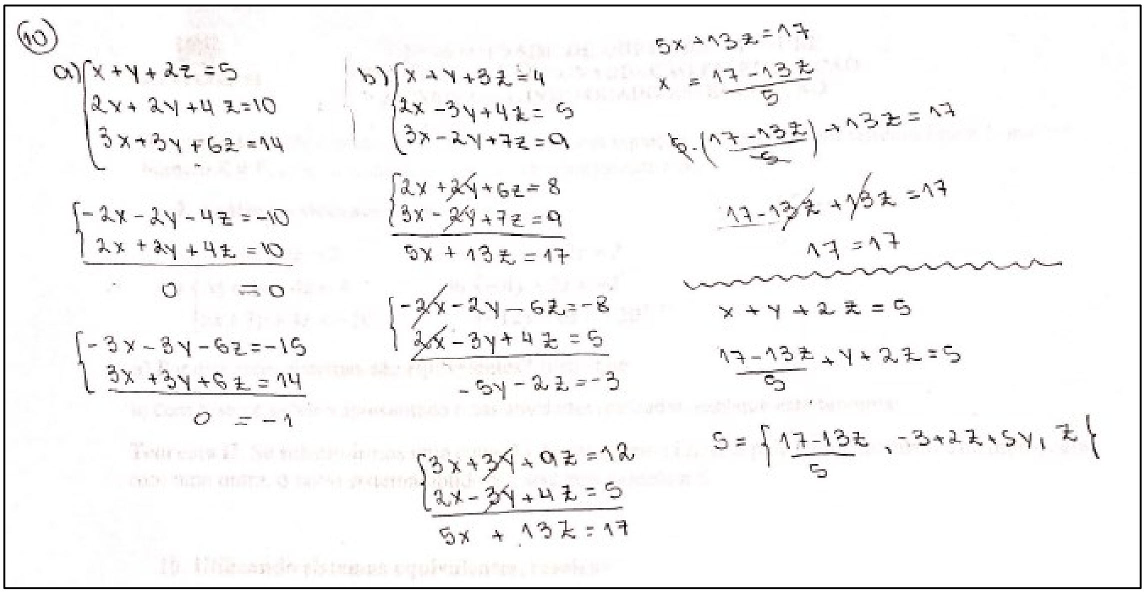
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

César, ao resolver esses sistemas, falou que "não estava dando certo". O professor, então, perguntou porque ele estava com dificuldade e, nesse contexto, relembrou aos alunos que os sistemas poderiam ter uma única, infinitas ou nenhuma solução. Os demais alunos não apresentaram dificuldades em resolvê-los, ressaltamos que eles estudaram esse conteúdo nos meses de março e abril, e realizaram a tarefa em outubro e novembro do mesmo ano.

Nos registros de Amanda, verificamos que ela utilizou o método de escalonamento – com as propriedades de sistemas equivalentes. Ela obtém que o resultado do sistema, no item (*a)*, é impossível, e, no item (*b)*, possível e indeterminado; porém, não registra essas classificações. Além disso, ela comete um erro, no item (*b)*, no final da resolução, ao colocar *y* em função de *z,* não realizando uma operação de divisão de forma correta.

O erro apresentado, embora impacte no resultado final do sistema, não indicou que aluno não estava desenvolvendo os juízos e o conceito de Sistemas de Equações Lineares; representa uma falta de atenção e concentração no processo de resolução.

Figura 64 - Registro de Amanda na tarefa 3.10



10

a) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+2y+4z=10 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x-2y-4z=-10 \\ 2x+2y+4z=10 \end{cases}$

$0=0$

$\begin{cases} -3x-3y-6z=-15 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases}$

$0=-1$

b) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+7z=9 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+\cancel{2y}+6z=8 \\ 3x-\cancel{2y}+7z=9 \end{cases}$

$5x+13z=17$

$\begin{cases} -\cancel{2x}-2y-6z=-8 \\ \cancel{2x}-3y+4z=5 \end{cases}$

$-5y-2z=-3$

$\begin{cases} 3x+\cancel{3y}+9z=12 \\ 2x-\cancel{3y}+4z=5 \end{cases}$

$5x+13z=17$

$5x+13z=17$

$x=\frac{17-13z}{5}$

$\cancel{5}\cdot\left(\frac{17-13z}{\cancel{5}}\right)+13z=17$

$17-\cancel{13z}+\cancel{13z}=17$

$17=17$

$x+y+2z=5$

$\frac{17-13z}{5}+y+2z=5$

$S=\left\{\frac{17-13z}{5}, -3+2z+5y, z\right\}$

Fonte: Registros dos alunos, 2018.

Nas tarefas 3.11 e 3.12, os alunos precisariam representar e interpretar geometricamente os Sistemas de Equações Lineares. Para isso, propusemos que eles utilizassem um recurso tecnológico – o GeoGebra[17].

Figura 65 - Tarefas 3.11 e 3.12.

Utilizando o GeoGebra como Recurso

11. No Geogebra, construa os gráficos destes sistemas:

I) $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x+4y=10 \\ 2x+8y=0 \end{cases}$

a) O que esses gráficos tem em comum?

b) Como sistemas equivalentes são representados graficamente?

12. Com o auxílio do Geogebra resolva estes sistemas.

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x+y-z=0 \\ -x-y+z=1 \\ 3x-y+z=2 \end{cases}$

Discute com os colegas:

a) É possível resolver por esse método? Quais foram as dificuldades encontradas?

b) O que tem em comum entre esse método de resolução com o escalonamento?

[17] O GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface – sua distribuição é livre.

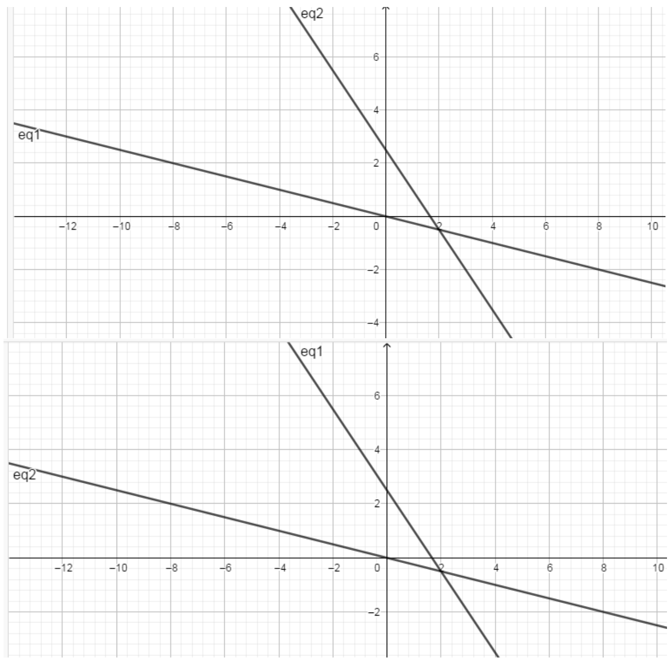
Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Nesse contexto, ponderamos que, de acordo com Davidov (1991/2019), um dos problemas não resolvidos na Teoria da Atividade de Estudo está relacionado à utilização de computadores. O autor critica o uso das tecnologias computacionais como um método tradicional, no entanto, reconhece a importância de buscar integrar essas tecnologias aos processos de ensino-aprendizagem de modo que seu uso esteja pautado por uma necessidade.

Considerando a dificuldade de representar geometricamente Sistemas de Equações Lineares com três equações e três incógnitas, evidenciamos a necessidade do uso do GeoGebra como uma alternativa do aluno explorar e compreender as representações geométricas dos sistemas lineares.

Na figura 73, apresentamos a resolução do César realizada no GeoGebra. Os alunos não conheciam essa ferramenta, assim, o professor teve que explicar como ela funcionava – como construir os gráficos, entre outros. Os alunos rapidamente entenderam o funcionamento e construíram primeiro a representação dos sistemas lineares (Item I e II da tarefa 11).

Figura 66 - Resoluções de César no Geogebra dos sistemas I) $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x+4y=10 \\ 2x+8y=0 \end{cases}$, respectivamente.



Fonte: Registros dos alunos, 2018

Ao visualizarem os gráficos, os alunos verificaram, primeiro, que o ponto de intersecção das retas – em ambas representações era o mesmo. Em seguida, observaram também que a disposição das retas eram as mesmas, ou seja, os gráficos eram iguais. Assim, concluíram que os sistemas equivalentes têm a mesma representação geométrica.

Salientamos, ainda, sobre essa tarefa, que César e Miguel resolveram os sistemas algebricamente para verificarem se a intersecção das retas realmente eram a solução. Eles gostaram muito do GeoGebra e comentaram que com ele fica muito mais fácil encontrar a solução de sistemas e entendê-las.

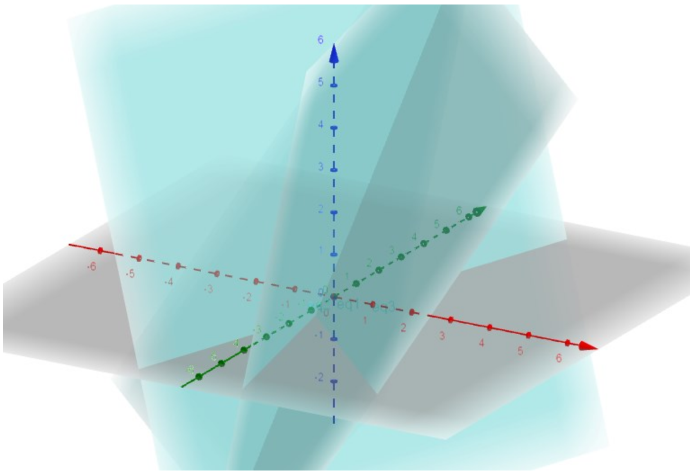
Na tarefa 12, também era necessário o uso do GeoGebra, no entanto, nos itens *b* e *c*, os alunos teriam que representar sistemas 3x3. Ao construírem o gráfico – como realizado por Miguel, na figura a seguir, tiveram uma reação de estranheza.

O professor, então explicou que, usualmente, embora os sistemas 3x3 sejam muito trabalhados em sala de aula, pouco se discute sobre sua representação geométrica. Assim, debateu com os alunos:

> **Professor**: de que forma cada equação foi representada?
> **César:** Por um plano?!
> **Professor**: e existe alguma relação entre esses planos?
> **César:** Parece que sim! (Experimento, 2018).

Assim, os alunos, no GeoGebra, exploraram a representação – com rotações e zoom, e verificaram que os pontos de intersecção dos planos eram a solução do sistema. Eles constataram, ainda, ao realizarem as representações das demais tarefas, que quando os planos são paralelos, não tem uma solução; e, quando os planos se sobrepõem, tem-se infinitas soluções. Comentaram que o geral que fundamentava a análise dos sistemas 2x2 era o mesmo para o sistema 3x3, a diferença na representação geométrica ocorria pelo uso das retas e dos planos, respectivamente.

Figura 67 - Registro de Miguel - item c - tarefa 3.12.



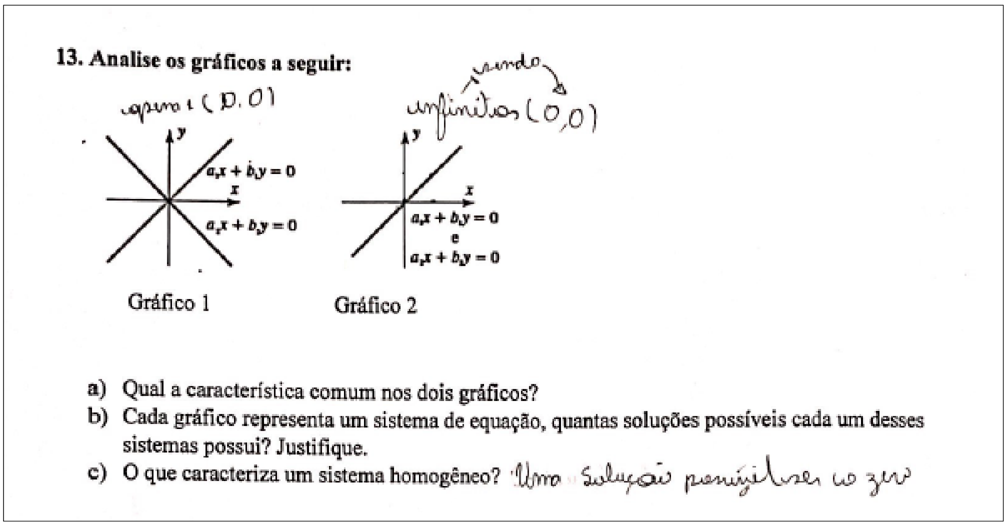
Fonte: Registros dos alunos, 2018

Nas |tarefas 3.13, 3.14 e 3.15, a intenção foi promover a discussão de Sistemas de Equações Lineares - possível determinado, possível indeterminado e impossível, e a compreensão de um sistema homogêneo, considerando as diferentes formas de representação.

Na tarefa 3.13, apresentamos dois gráficos juntamente com suas representações algébricas – na forma geral. Os alunos observaram que as retas de ambos os gráficos passavam pela coordenada (0,0). Indicaram, sem dificuldades, que, no Gráfico 1, tinha apenhas uma solução (0,0), e, no Gráfico 2, teria infinitas soluções.

O professor, então, questionou os alunos: “dentre as infinitas soluções do sistema representado pelo Gráfico 2 vocês conseguem me dizer pelo menos uma?” Os alunos não conseguiram responder, o professor orientou que eles analisarem a representação algébrica, sugerindo substituir x e y por 0. Após os alunos identificarem que (0,0) poderia ser uma das infinitas soluções do sistema representado pelo Gráfico 2 – conforme na figura seguir, o professor definiu e explicou as características de um sistema homogêneo.

Figura 68 - Registro do aluno Gabriel.

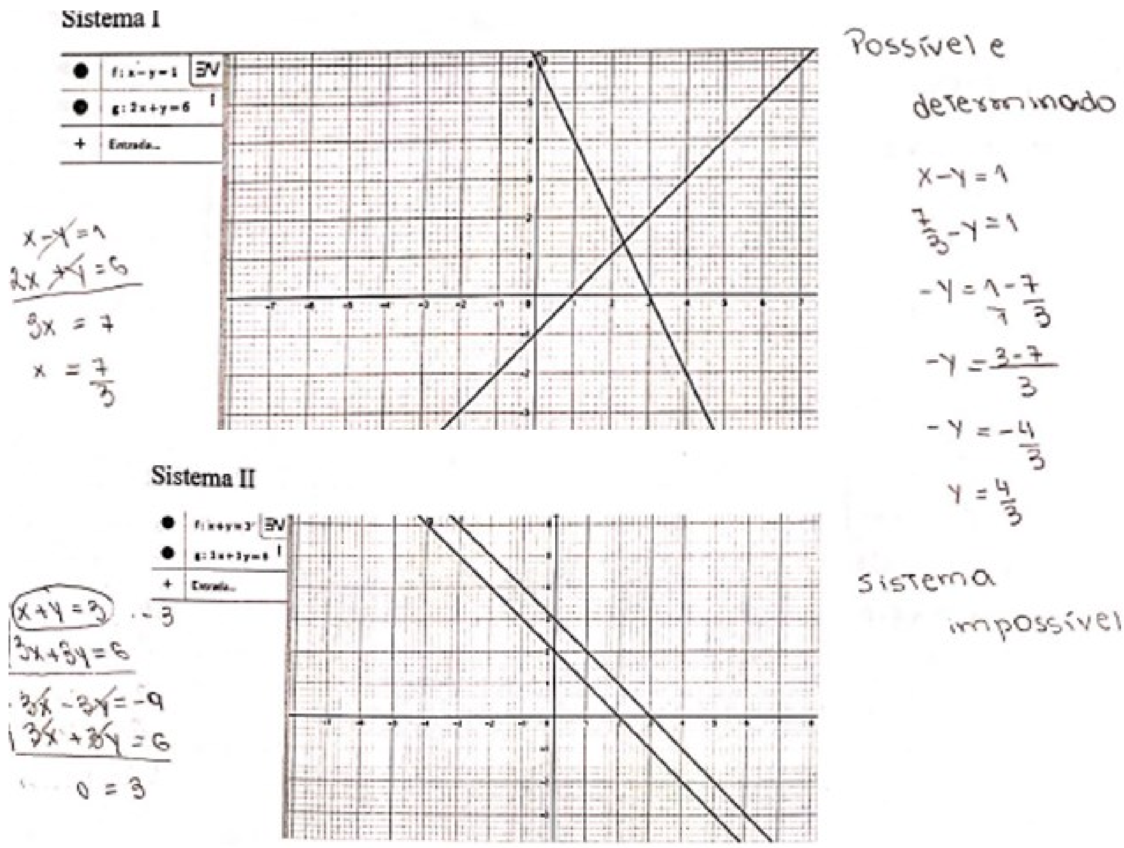

13. Analise os gráficos a seguir:

a) Qual a característica comum nos dois gráficos?
b) Cada gráfico representa um sistema de equação, quantas soluções possíveis cada um desses sistemas possui? Justifique.
c) O que caracteriza um sistema homogêneo? Uma solução possível ser o zero

Fonte: Registros dos alunos, 2018

Nas tarefas 3.14 e 3.15, os alunos analisaram os Sistemas Lineares, relacionando suas representações algébricas e geométricas. A seguir, apresentamos os registros de Beatriz sobre os Sistemas I e II da tarefa 3.14. Ela resolveu algebricamente e conferiu a representação geométrica, posteriormente, classificou os sistemas em possível determinado e impossível.

Figura 69 - Registros da Beatriz.



Fonte: Registros dos alunos, 2018

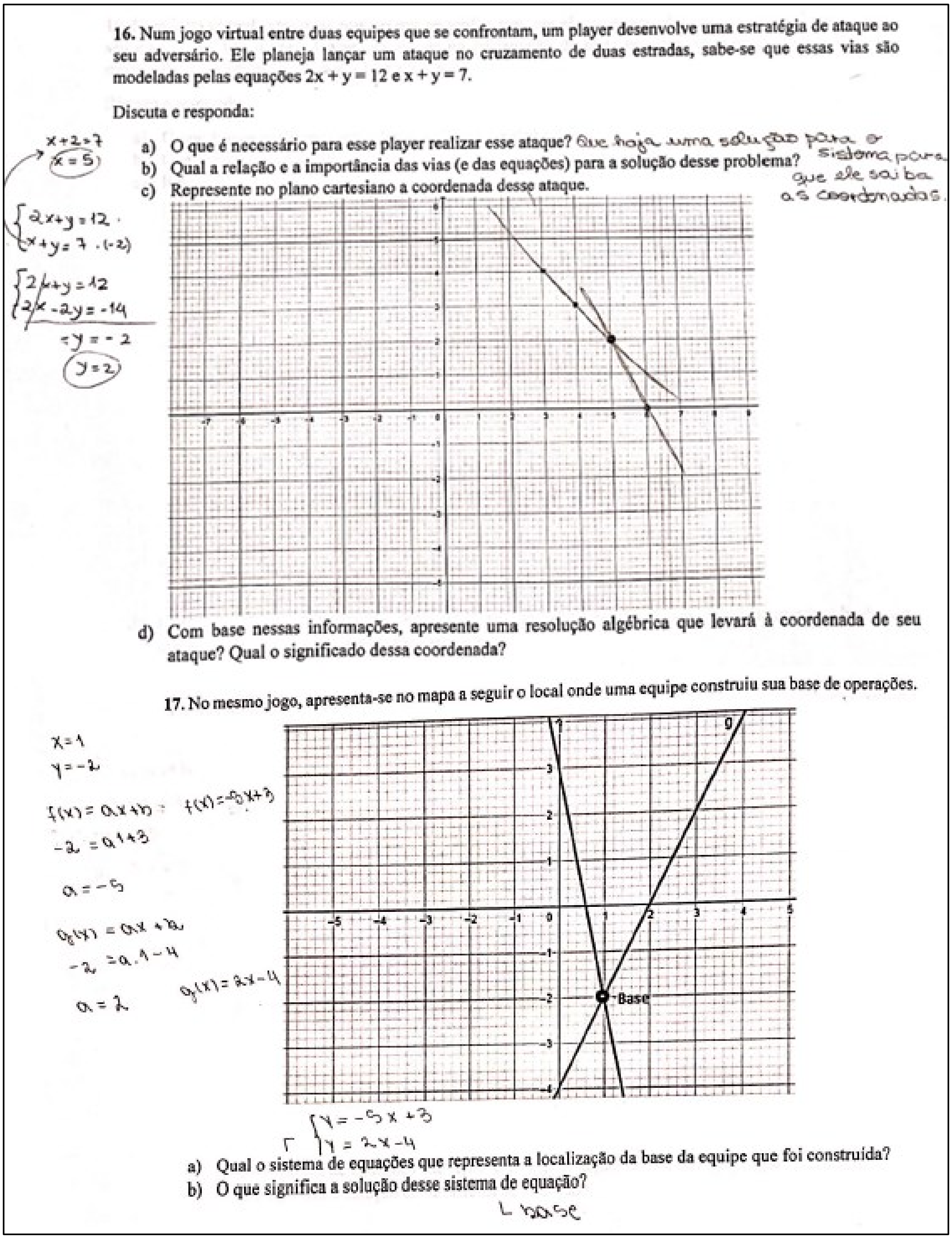
Nesse contexto, as discussões sobre as tarefas 3.14 e 3.15 reforçaram às apropriações sobre os diferentes tipos de representações de sistemas lineares. Os alunos relataram que, quando estudaram esse conteúdo, não lembravam de ter tido uma explicação e/ou feito um “exercício” que envolvia a representação geométrica de sistemas lineares.

Comentaram que as aulas de sistemas lineares eram focadas em resoluções, e a participação neste experimento estava contribuindo com seus estudos – no esclarecimento de “dúvidas que tinham ficado”, em novos aprendizados, de forma relacionada com outros conteúdos, como funções.

Nas tarefas 3.16, 3.17 e 3.18, os alunos precisariam mobilizar os juízos e o conceito de Sistema de Equações Lineares para resolver uma determinada situação-problema.

Discutimos que nas tarefas 3.16, 3.17, as situações-problema exigiam o conhecimento das modelagens algébrica e geométrica. Percebemos, conforme o registro de Amanda, a seguir, que os alunos não tiveram dificuldade de interpretar o problema e resolvê-lo. Consideremos que o desenvolvimento do pensamento teórico favorecido pelas tarefas foi fundamental para que os alunos interpretassem a situação apresentada conscientes dos conhecimentos teóricos que precisariam mobilizar para resolvê-la.

Figura 70 - Registros de Beatriz nas tarefas 3.16 e 3.17.



16. Num jogo virtual entre duas equipes que se confrontam, um player desenvolve uma estratégia de ataque ao seu adversário. Ele planeja lançar um ataque no cruzamento de duas estradas, sabe-se que essas vias são modeladas pelas equações 2x + y = 12 e x + y = 7.

Discuta e responda:

a) O que é necessário para esse player realizar esse ataque? Que haja uma solução para o sistema para que ele saiba as coordenadas.

b) Qual a relação e a importância das vias (e das equações) para a solução desse problema?

c) Represente no plano cartesiano a coordenada desse ataque.

x + 2 = 7
x = 5

$\begin{cases} 2x+y=12 \\ x+y=7 \cdot(-2) \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y=12 \\ -2x-2y=-14 \end{cases}$

$-y=-2$

$y=2$

d) Com base nessas informações, apresente uma resolução algébrica que levará à coordenada de seu ataque? Qual o significado dessa coordenada?

17. No mesmo jogo, apresenta-se no mapa a seguir o local onde uma equipe construiu sua base de operações.

x = 1
y = −2

f(x) = ax + b   f(x) = −5x + 3
−2 = a·1 + 3
a = −5

g(x) = ax + a
−2 = a·1 − 4
a = 2   g(x) = 2x − 4

$\begin{cases} y=-5x+3 \\ y=2x-4 \end{cases}$

a) Qual o sistema de equações que representa a localização da base da equipe que foi construída?

b) O que significa a solução desse sistema de equação?
L base

Fonte: Registros dos alunos, 2018

Com estas tarefas, concluímos o desenvolvimento desta proposta de organização do ensino de Sistemas de Equações Lineares, com base na Teoria da Atividade de Estudo.

As tarefas que tiveram como foco os Sistemas de Equações Lineares, relacionaram o conhecimento teórico com situações concretas do cotidiano, discutiu os juízos e o conceito de sistemas lineares, evidenciou os processos de resolução – presente no movimento histórico da álgebra, articulou as formas de representação algébrica e geométrica – incluindo o uso das tecnologias digitais, debateu sistemas equivalentes e propôs diferentes situações-problema para serem resolvidos, num movimento dialético: do abstrato ao concreto, do geral ao particular, das diferentes representações semióticas de um mesmo objeto.

Avaliamos que a Tarefas 3 foi desenvolvida de forma efetiva, mostrando que os alunos já estavam "ambientados" com uma organização de ensino pautada na Teoria da Atividade de Estudo. Para tanto, consideramos que as Tarefas 1 e 2 foram fundamentais para que os alunos apropriassem de relações gerais presentes em uma rede de juízos e conceitos que se relacionam com Sistemas de Equações Lineares, bem como para entenderem uma organização de ensino diferente da qual estavam habituados, que discute juízos e conceitos, procurando desvelar a sua essência, e que não apenas reproduz, promove a repetição e a memorização de conteúdo.

Assim, em relação à ***transformação dos dados da tarefa***, analisamos que nas tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares, os alunos conseguiram estabelecer a relação geral desse conhecimento. A aproximação da tarefa que abordou uma situação-problema de que profissão escolher com a definição de sistema de equações lineares – tarefas particulares, induziu o aluno a desenvolver a abstração substantiva que desvela a essência do objeto, que, posteriormente se deduzirá nos casos particulares

A mediação do professor e as situações apresentadas – com constantes momentos de reflexões, permitiram que os alunos evidenciassem que a simultaneidade constituía a essência do conceito de Sistemas de Equações Lineares. Os alunos observaram que as equações se inter-relacionavam e cada uma delas configura-se como uma "condição" a ser satisfeita.

No entanto, não bastava encontrar, de forma independente, o resultado de apenas uma equação, a solução do sistema precisaria responder, simultaneamente, as "condições", de todas as equações. *"Nota-se que o estudante não inventa a abstração substancial, mas por intermédio das ações mentais realizadas na solução de tarefas* *desenvolve o conteúdo da relação essencial que deve ser refletido no conceito teórico"* (SOUZA; FEROLA; COELHO, 2019, p.382).

Com a orientação do professor o aluno reproduziu "[...] o movimento historicamente realizado de redução do concreto ao abstrato, que resultou na elaboração científica da relação essencial, conteúdo do conceito teórico (SOUZA; FEROLA; COELHO, 2019, p.382-383).

Sobre a **modelação da relação universal,** observamos que ela está diretamente relacionada com a transformação dos dados da tarefa, visto que nela sintetiza-se a essência do conceito que compõe o modelo. Deste modo, após os alunos terem identificado a relação geral do objeto estudado e relacioná-la com sua definição na forma mais elaborada, realizamos reflexões – discutindo e dando sentido aos elementos, as representações, as classificações e ao comportamento dos Sistemas Lineares, de modo que os alunos assimilassem suas características internas, engendrando o desenvolvimento do pensamento teórico. Também, esteve presente a preocupação com a modelagem em diferentes linguagens: gráfica/geométrica, algébrica e retórica.

O pensamento teórico, que ocorre pelas abstrações substantivas, requer a investigação integral do objeto para evidenciar a sua relação geral. Nesse processo, gradativamente, o experimento vai adquirindo caráter cognoscitivo, podendo ser realizado mentalmente. Assim, "a tarefa do pensamento teórico consiste em elaborar os dados da contemplação e da representação em forma de conceito e com ele reproduzir omnilateralmente o sistema de conexões internas que originam o concreto dado, descobrir sua essência" (DAVÍDOV, 1988, p.143).

Por conseguinte, o desenvolvimento do pensamento teórico está ancorada nas ações de análise e síntese. As tarefas estimularam esses aspectos do pensamento, incluindo os estudos que tiveram como foco as comparações e equações e que, posteriormente, foram transpostos nas tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares.

No que tange ao c**ontrole e avaliação como resultado da tarefa de aprendizagem,** observamos a autonomia que os alunos desenvolveram no decorrer das tarefas. Nas primeiras, estavam muito dependentes do professor e, posteriormente, trabalhando em duplas, verificavam com os colegas "qual era o resultado" e, se necessário, observavam o que tinham errado e/ou como foi desenvolvida a resolução, para, em seguida, realizar as devidas correções.

Os alunos consideraram que as tarefas realizadas ampliaram a "visão" que tinham sobre a matemática, que era concebida numa perspectiva mais "mecânica" e procedimental. O compromisso dos alunos em participar de todas as tarefas durante dois meses, de forma voluntária e com entusiasmo, indica que as tarefas de estudo estavam proporcionando seu desenvolvimento humano e a apropriação de conteúdos algébricos.

Avaliamos que as tarefas de estudo que abordaram os Sistemas de Equações Lineares nas suas formas específica, contextualizada e problematizada; com suas características internas e externas, com ações procedimentais e reflexivas; e com abordagens clássicas e tradicionais; promoveram um processo de ensino-aprendizagem que contribuiu para a formação humana dos alunos.

Analisar, sintetizar, avaliar de forma aprofundada um dado objeto, possibilitou aos alunos apropriarem-se de conhecimentos que vão além da especificidade da matemática. Também, os juízos e os conceitos estudados, na perspectiva da Teoria da Atividade de Estudo, evidenciaram, sobretudo nas últimas tarefas, a efetividade desta forma de organizar o ensino visando a ressignificação do ensino da álgebra.

6.4 Avaliação do Experimento enquanto procedimento de pesquisa

Neste tópico, avaliamos o experimento didático-formativo. Apresentamos observações de como o experimento foi elaborado e executado; analisamos de que forma o experimento foi se constituindo durante o processo de investigação.

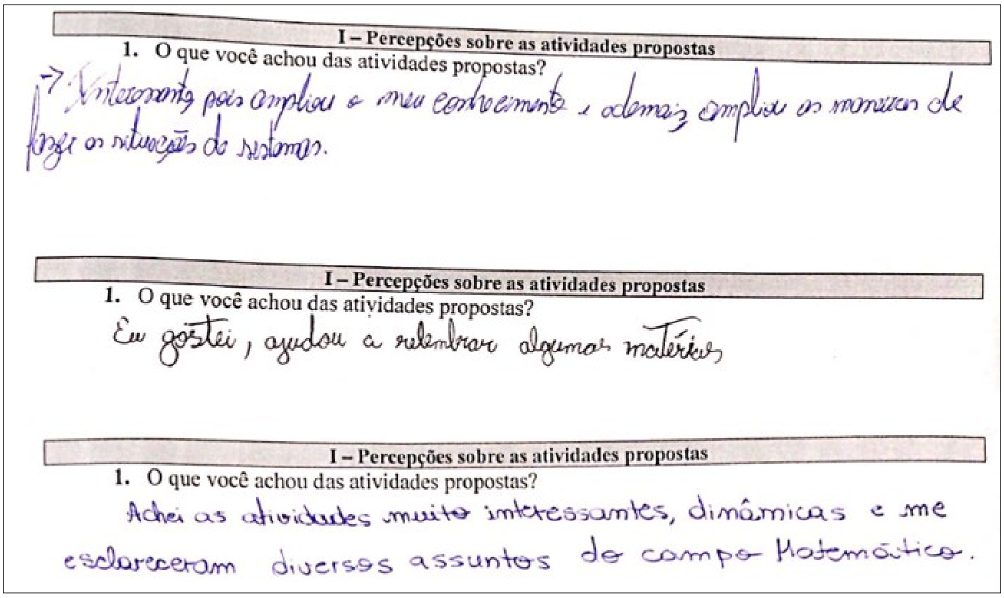
Além disso, os alunos ao final do experimento, responderam um questionário sobre o conteúdo e a percepção que eles tiveram das tarefas de estudo, avaliando o que foi proposto.

6.4.1 Avaliação dos alunos

Após finalizarmos o experimento didático-formativo, pedimos que os alunos respondessem um questionário – sem identificação, sobre suas percepções e contribuições sobre as tarefas propostas. Assim, temos a seguir as percepções dos alunos sobre as tarefas propostas, as dificuldades que tiveram, o que contribui para sua aprendizagem, a relevância da atividade, a mediação do professor e sugestões para o aprimoramento da organização do ensino.

Os alunos consideraram as tarefas interessantes e indicaram que elas contribuíram para relembrar conteúdos e esclarecer dúvidas pertencentes ao campo matemático.

Figura 71 - Percepções dos alunos sobre as tarefas propostas.



I – Percepções sobre as atividades propostas

1. O que você achou das atividades propostas?

Interessante pois ampliou o meu conhecimento e ademais ampliou os maneiras de fazer as situações do sistemas.

I – Percepções sobre as atividades propostas

1. O que você achou das atividades propostas?

Eu gostei, ajudou a relembrar algumas matérias

I – Percepções sobre as atividades propostas

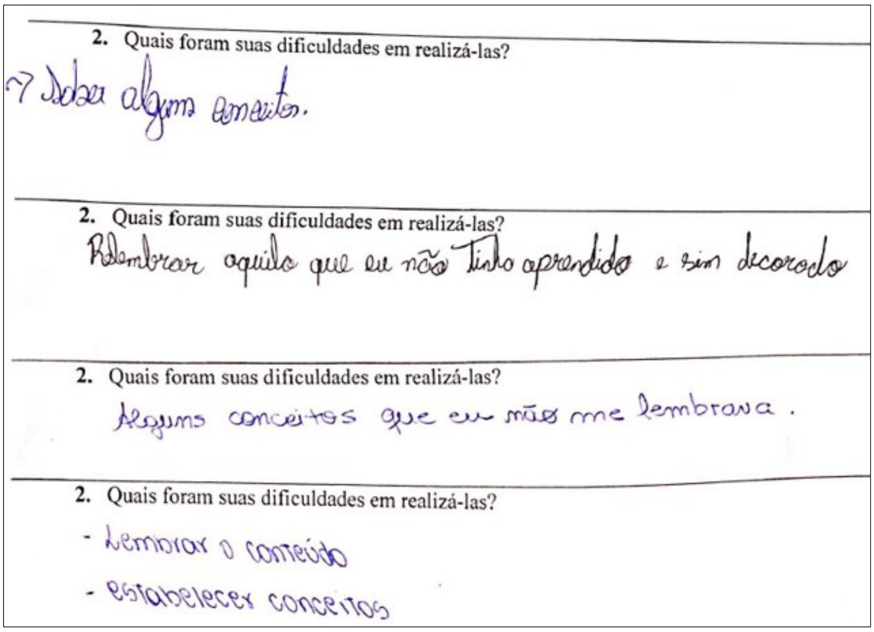
1. O que você achou das atividades propostas?

Achei as atividades muito interessantes, dinâmicas e me esclareceram diversos assuntos do campo Matemático.

Fonte: Registros dos alunos, 2018

Em relação às dificuldades com que eles se depararam no experimento, relataram, de forma recorrente, que o esquecimento dos conceitos que já haviam estudados prejudicou no desenvolvimento das tarefas. Isso nos remete a pensar sobre as atuais formas de ensino-aprendizagem, uma vez que o conteúdo das tarefas eles já haviam estudado 5 meses antes de realizá-las. Esse relato dos alunos reforça a proposta de repensarmos os atuais processos de ensino-aprendizagem e, principalmente, ressignificar o ensino da álgebra, estabelecendo conceitos, como diz um dos participantes.

Figura 72 - Dificuldades dos alunos durantes as tarefas de estudo.



2. Quais foram suas dificuldades em realizá-las?

Saber alguns conceitos.

2. Quais foram suas dificuldades em realizá-las?

Relembrar aquilo que eu não tinha aprendido e sim decorado

2. Quais foram suas dificuldades em realizá-las?

Alguns conceitos que eu não me lembrava.

2. Quais foram suas dificuldades em realizá-las?

- Lembrar o conteúdo
- estabelecer conceitos

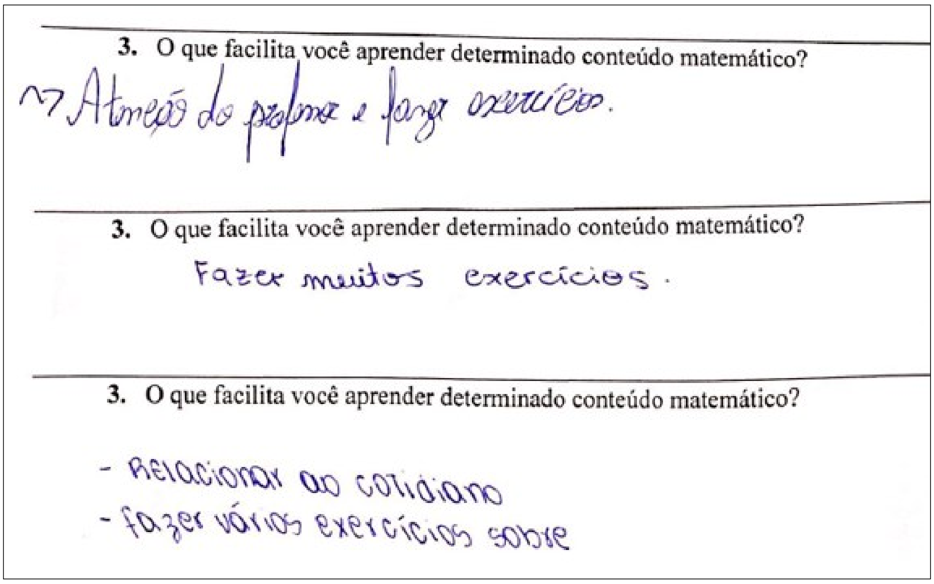
Fonte: Registros dos alunos, 2018

Sobre o que os alunos consideram que facilita a aprendizagem, uma aluna destacou a atenção do professor. Assim, reforçamos que mediação docente potencializa a aprendizagem do aluno, conforme observado no desenvolvimento das tarefas de estudo.

Outro ponto é o fato de relacionar o conteúdo com o cotidiano, ou seja, dar vida e significado aos conteúdos escolares. Observamos que o ensino dos conteúdos escolares ocorre de forma fragmentada e descontextualizada. Por exemplo, em relação ao ensino de Sistemas de Equações Lineares, verificamos, tanto na pesquisa bibliográfica, como na empírica, que a ênfase dada é no método de resolução, sem provocar a necessidade de estudar esse conteúdo. Também, não é utilizada uma abordagem que integre álgebra e geometria, e outas áreas do conhecimento.

Os alunos relataram ainda que fazer muitos exercícios facilita eles aprenderem determinado conteúdo. Analisamos que essa resposta condiz com a prática que está enraizada nas salas de aulas. Nas escolas, as “listas de exercícios” são predominantes no processo de “aaquisição” de um conteúdo novo.

Figura 73 - Respostas dos alunos sobre o que facilita aprenderem determinado conteúdo.



3. O que facilita você aprender determinado conteúdo matemático?

R: Atenção do professor e fazer exercícios.

3. O que facilita você aprender determinado conteúdo matemático?

Fazer muitos exercícios.

3. O que facilita você aprender determinado conteúdo matemático?

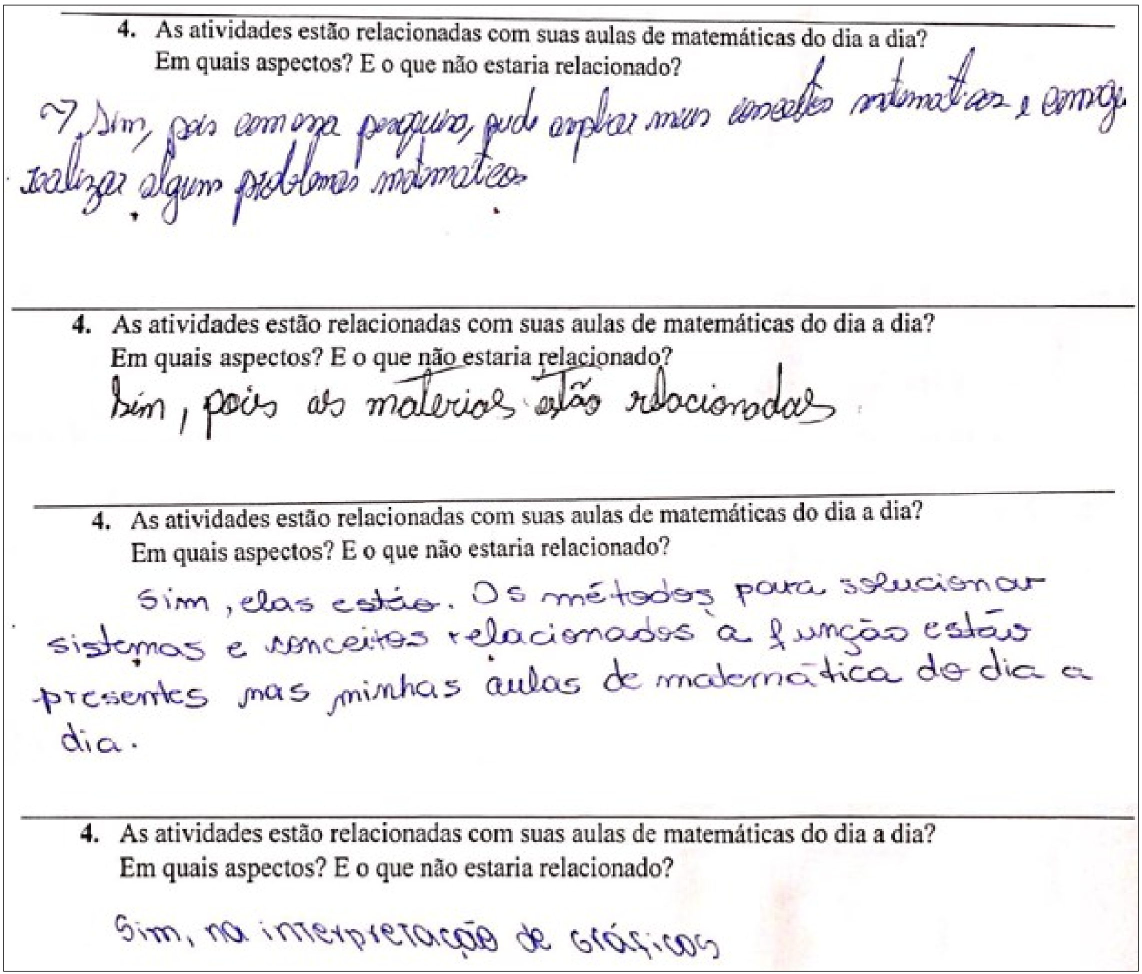
- Relacionar ao cotidiano
- fazer vários exercícios sobre

Fonte: Registros dos alunos, 2018

Sobre a contribuição do experimento para o cotidiano e o estudo escolar, os alunos observaram a convergência da temática do experimento com os conteúdos escolares. De fato, o conteúdo proposto compõe a BNCC, estando presente em avaliações externas como ENEM, e obrigatoriamente no curriculo escolar do ensino médio.

Os alunos observaram que o conteúdo desenvolvido também contribui na aprendizagem de interpretração de gráfico. Observamos, na literatura, nos documentos que orientam o ensino da álgebra e nas observações das aulas a pouca ênfase dada às representações gráficas. Assim, no processo de elaboração das tarefas, já estávamos conscientes da necessidade de propor uma tarefa que se relacionasse com os conhecimentos gráficos/geométricos, na busca de compartilhar significados e favorecer a construção de sentido para o objeto em estudo, na perspectiva vigotskiana de relação entre pensamento e linguagem.

Figura 74 - Relevância das tarefas propostas.


4. As atividades estão relacionadas com suas aulas de matemáticas do dia a dia?
Em quais aspectos? E o que não estaria relacionado?

Sim, pois com essa pesquisa, pude ampliar meus conceitos matemáticos e conseg. realizar alguns problemas matemáticos

4. As atividades estão relacionadas com suas aulas de matemáticas do dia a dia?
Em quais aspectos? E o que não estaria relacionado?

Sim, pois as materias estão relacionadas

4. As atividades estão relacionadas com suas aulas de matemáticas do dia a dia?
Em quais aspectos? E o que não estaria relacionado?

Sim, elas estão. Os métodos para solucionar sistemas e conceitos relacionados a função estão presentes nas minhas aulas de matemática do dia a dia.

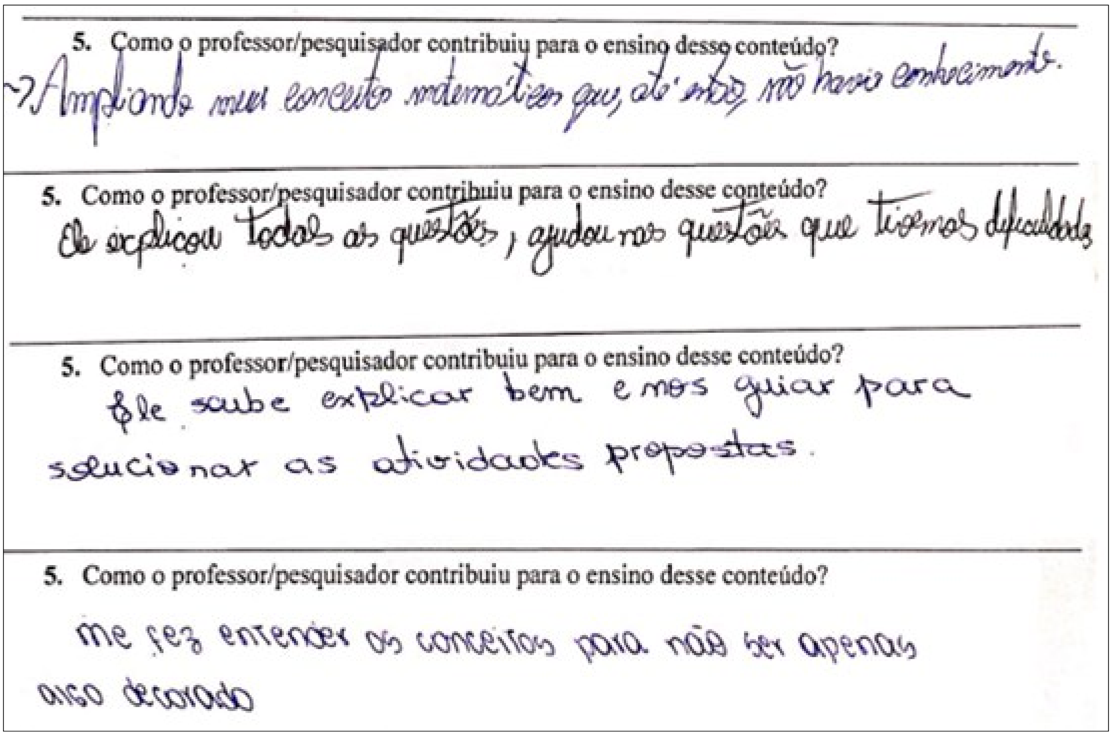
4. As atividades estão relacionadas com suas aulas de matemáticas do dia a dia?
Em quais aspectos? E o que não estaria relacionado?

Sim, na interpretação de gráficos

Fonte: Registros dos alunos, 2018

Sobre a atuação do professor, os alunos observaram que ele orientou os alunos esclarendo as dúvidas, promovendo a discussão de conceitos, para além da mecanização e memorização dos conteúdos. Durante o desenvolvimento das tarefas, também ficou evidente a importância da mediação do professor, atuando na ZDP, potencializando os processos de ensino-aprendizagem e promovendo a formação do pensamento teórico.

Figura 75 - Contribuição do professor no desenvolvimento das tarefas.



5. Como o professor/pesquisador contribuiu para o ensino desse conteúdo?
Ampliando meus conceitos matemáticos que, até então, não havia conhecimento.

5. Como o professor/pesquisador contribuiu para o ensino desse conteúdo?
Ele explicou todas as questões, ajudou nas questões que tivemos dificuldade

5. Como o professor/pesquisador contribuiu para o ensino desse conteúdo?
Ele sabe explicar bem e nos guiar para solucionar as atividades propostas.

5. Como o professor/pesquisador contribuiu para o ensino desse conteúdo?
me fez entender os conceitos para não ser apenas algo decorado

Fonte: Registros dos alunos, 2018

Apenas um aluno apresentou uma sugestão para o aprimoramento das tarefas realizadas. Ele considera importante utilizar mais recursos tecnológicos e uma abordagem que proponha ao aluno "fazer mais contas". Consideramos que incorporar as tecnologias nas tarefas de estudo realmente é uma necessidade e, ao mesmo tempo, um desafio, visto que as tecnologias, na perspectiva da Atividade de Estudo, não tem sentido se forem utilizadas como "reprodutoras", como ocorre em exposições de *slides* em Datashow. Precisamos utilizar as tecnologias no ensino de modo que ela estejam articulada com um motivo e uma necessidade do objeto estudado e que colaborem para a construção do pensamento teórico..

A avaliação dos alunos sobre o desenvolvimento do experimento didático-formativo e das tarefas de estudo foi positiva, resultado esse que transpareceu no decorrer da realização das tarefas. Contemplamos que os alunos foram participativos durante o experimento e contribuíram integralmente para sua realização, como também ganharam em autonomia.

6.4.2 Avaliação do pesquisador em relação ao desenvolvimento do experimento didático-formativo

Neste tópico, apresentamos uma discussão sobre o desenvolvimento do experimento didático-formativo, evidenciando o olhar do presente pesquisador que vivenciou a experiência de desenvolver tarefas de estudo com os alunos do ensino médio, fundamentadas na Teoria da Atividade de Estudo.

Nesta pesquisa, primeiro, buscamos apropriarmo-nos do referencial teórico-metodológico que fundamentam o experimento didático-formativo – notadamente a dialética-materialista, a Teoria Histórico-Cultural e a Atividade de Estudo. Identificamos nesse momento nossa primeira dificuldade, ao mesmo tempo que o referencial traz consigo uma riqueza de conhecimento e uma abordagem de ensino que se diferencia das atuais práticas exercidas no Brasil, representa um sistema complexo de material didático e com elevado grau de abstração.

Nesse contexto, verificam-se ainda poucas obras traduzidas no português, principalmente aquelas que "exemplificam" tarefas de estudo que já foram desenvolvidas na prática – por exemplo, que abordem o ensino da matemática e/ou de outros componentes curricular específico.

A complexidade da teoria está presente no experimento formativo que de acordo com Davidov (2019) precisa abranger aspectos filosóficos, lógicos, psicológicos, didáticos e metodológicos. "Os problemas modernos da Atividade de Estudo são essencialmente um problema lógico-psicológico-pedagógico integrado". (DAVIDOV, 2019, p. 244). Ou seja, nas circunstâncias ideais para a realização de um experimento, necessitaríamos de uma equipe multidisciplinar trabalhando de forma integrada. As condições reais da pesquisa no Brasil dificultam a organização dessa equipe de profissionais, bem como, nas escolas de educação básica, o tempo dos profissionais cada vez mais escasso.

Em relação a teoria, outro aspecto de dificuldade foi que os experimentos realizados pelos autores soviéticos ocorreram em séries iniciais, assim, não encontramos um referencial teórico que discutisse a Teoria da Atividade de Estudo no Ensino Médio, com adolescentes entre 15 e 17 anos. Nesse contexto, tivemos que adequar os pressupostos do referencial e das tarefas já realizadas para atender ao contexto do Ensino Médio brasileiro.

Nesta pesquisa almejávamos desenvolver uma atividade formativa com os professores das escolas participantes, também, com o propósito social de promover a formação dos professores daquelas escolas. Trabalharíamos com temas atuais como o "novo" ensino médio, BNCC, e os fundamentos desta pesquisa – teoria da atividade do estudo, promovendo reflexões sobre as práticas que eles desenvolviam em sala de aula. No entanto, a atividade formativa que iriamos propor para os docentes do Ensino Médio – elaborada, discutida e validada durante esta pesquisa, não se efetivou pela dificuldade na adesão dos docentes. Os professores alegavam sobrecarga de trabalho, falta de tempo e dificuldade de um horário para fazer as tarefas propostas. Tentamos, ainda, promover essa atividade formativa via WhatsApp, mas os professores não deram retorno.

O experimento com alunos de uma outra escola também não pode ser realizado, devido ao caráter voluntário de participação dos alunos, a ausência dos estudantes comprometeu a continuidade do experimento. Fomos em uma escola pública, observamos as aulas, e tivemos uma lista com 17 nomes de alunos que se interessaram a participar da pesquisa. No primeiro encontro, nenhum aluno comparecer. Voltamos novamente à escola e reforçamos o convite aos alunos, no dia do novo encontro, estavam presentes cinco alunos. Eles fizeram o diagnóstico, se manifestaram entusiasmados e disseram que iriam participar da pesquisa. No encontro seguinte foi apenas um aluno. Reforçamos o convite e conversamos com a professora e, assim, foram nos apresentadas dificuldades para realização.

Cabe ponderar, ainda, que a construção e reconstrução das tarefas de aprendizagem, durante todo período do experimento, foram constantes. Avaliamos que o experimento didático-formativo é uma abordagem complexa, que requer do pesquisador estudo aprofundado do tema, disponibilidade e persistência para exercer e acompanhar o trabalho de campo, resiliência para superar as dificuldades e profundidade para análise dos dados.

O experimento didático-formativo, embora seja composto por elementos complexos, o seu desenvolvimento e o seu resultado é compensador. Na escola em que realizamos o experimento observamos, semanalmente, os alunos assíduos, comprometidos e entusiasmados com as tarefas de estudo. Além disso, o desenvolvimento dos alunos e a forma como eles evoluíram no processo de apropriação do conteúdo estudado foi evidente e faz valer todos os obstáculos superados no seu processo de construção. Foi no contexto dialético, das condições subjetivas e objetivas que avaliamos essa pesquisa.

7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta investigação, apresentamos o estudo que se refere a de desenvolver na prática escolar do ensino médio, uma organização do processo de ensino-aprendizagem de sistemas de equações lineares, em consonância ao desenvolvimento do pensamento teórico. A questão norteadora da pesquisa foi: Como organizar o ensino-aprendizagem de sistemas de equações lineares no ensino médio, potencializando o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno?

No desenvolvimento desta pesquisa, delineamos, com base nas investigações sobre o cenário do ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares;, no movimento lógico-histórico desse conhecimento, nas contribuições da Teoria Histórico-Cultural e da Teoria da Atividade de Estudo de Davídov, uma forma de organizar o seu ensino a partir de uma rede de juízos e conceitos que criasse condições para apropriação desse conteúdo matemático em suas manifestações internas e para a formação do pensamento teórico. Ao abordarmos o assunto do lógico-histórico da álgebra e, sobretudo, dos Sistemas Lineares, apresentamos as devidas definições formais e as propriedades desses conhecimentos, no entanto, não explicitamos os seus conceitos, ou seja, os seus significados a partir da relação com outros conceitos. Esses emergiram como sínteses de abstrações realizadas, a partir das pesquisas bibliográfica, documental e de campo, das reflexões dos pesquisadores do grupo de estudo, no qual está inserido o GEPIDE – Grupo de Estudos e Pesquisas em Instrução, Desenvolvimento e Educação – Uniube, que ocorreram ao longo do processo desta pesquisa.

Concebemos que o conceito de Sistemas de Equações Lineares, que embasou a elaboração das tarefas estudo, é um reflexo da essência desse conhecimento constituído por relações gerais, tais como: simultaneidade, a inter-relação entre as equações, as comparações fundamentadas na relação de igualdade, métodos de resolução e diferentes representações semióticas do mesmo objeto. Além disso, as definições relativas a esse conhecimento - a síntese, na sua forma mais elaborada, está repleta de elementos que sintetizam generalidades do conhecimento algébrico, como variável, incógnita, fluência, interdependência, coeficientes, equivalências, modelos algébricos e geométricos.

Esses elementos, na perspectiva dialética, indicam de que modo surge e se desenvolve o conceito como um todo, manifestando sua função e seu desempenho na formação e no desenvolvimento do conceito como uma totalidade, que contém as partes e nelas está contido.

Utilizamos como metodologia o experimento didático-formativo que, conforme os estudos de Davidov (1979; 1986; 1988, 1991, 1997/2019), esteve presente na elaboração de programas didáticos na ex-União Soviética, na segunda metade do século XX. É um método, por meio do qual se criam condições para o desenvolvimento do aluno, adequado a investigações que tem como base os pressupostos da Atividade de Estudo.

A presente abordagem nos proporcionou de forma aprofundada os conhecimentos algébricos e, principalmente, de Sistemas Lineares. Indicou a necessidade de investigarmos o cenário em que esse conhecimento é desenvolvido, seu movimento lógico-histórico, a realidade de ensino – orientado pelo currículo, avaliações e pela a prática dos docentes. E, assim, nos proporcionou condições – teóricas, práticas e procedimentais, para (re)pensarmos uma organização de ensino para o referido conteúdo.

Em relação à análise dos documentos legais que regem o ensino médio e direcionam a aprendizagem de Sistemas Lineares, verificamos consideráveis avanços – do PCN a BNCC, na elaboração de um currículo de matemática que contemple a resolução de problemas, a interpretação da realidade articulada com a representação/significado da linguagem algébrica e a necessidade de representar de diferentes formas (algébrica e geométrica) os conteúdos estudados, embora existam muitas críticas da comunidade acadêmica em relação a este documento, especialmente aos seus pressupostos, inclusive uma perspectiva pragmática, por nós questionada.

No entanto, analisamos a dificuldade de se reproduzirem, na prática, essas diretrizes curriculares, visto que, nas observações das aulas, foi possível constatar que predomina um ensino com foco na resolução de exercícios/problemas, o uso das "listas de ensino" e uma abordagem tradicional. A organização do ensino, presente nas salas de aulas não privilegia as discussões de juízos, conceitos, em seu nexos interno, e a formação do pensamento teórico.

Nesse cenário educacional, constatamos que, os resultados do ENEM demonstraram um baixo desempenho dos alunos brasileiros - não supera uma média de 40% nas habilidades que envolvem a álgebra. Ponderamos que o ENEM - composto por uma diversidade de situações-problema – demanda dos alunos a mobilização de conhecimentos integrais – relações multidisciplinares, que suscitam a necessidade do desenvolvimento do pensamento teórico. Além disso, identificamos que, frequentemente, a não apropriação dos juízos – que se relacionam ao desenvolvimento do pensamento, influencia e dificulta o processo de resolução de problemas exigidos pelo ENEM.

Sobre o que dizem as pesquisas a respeito do ensino da álgebra - sistema lineares, analisamos dissertações e teses que abordam essa temática. Verificamos que são poucos os estudos de ensino de sistemas lineares/álgebra, especificamente, no ensino médio. Em relação à utilização da Teoria da Atividade do Estudo e do Experimento Didático-Formativo, que articulam o ensino da álgebra no ensino médio, não identificamos nenhuma tese produzida.

Observamos que as pesquisas sobre a álgebra no ensino médio apresentam propostas de ensino, mas sem fundamentação teórica consistente e/ou o desenvolvimento (teste), "na prática", das tarefas de estudo/ensino propostas. Outra lacuna identificada refere-se à necessidade de ensinar Sistemas de Equações Lineares, integrando as modelagens geométrica e algébrica, e explorando as tecnologias digitais.

A organização do experimento didático-formativo e seu desenvolvimento foi marcados pelo movimento de construção e reconstruções. Cujo processo considerou o nosso amadurecimento em relação ao referencial teórico-metodológico, a validação com professores que vivenciam a realidade do ensino médio brasileiro, a análise/diálogo de/com pesquisadores que atuam com essa temática e os *feedbacks* dos alunos durante a realização tarefas.

Quanto à análise do experimento didático-formativo, evidenciamos a importância do professor, como organizador e como responsável pela mediação, atuando na ZDP. Segundo Vigotski (2007), a mediação do professor potencializa a aprendizagem, uma vez que adentra na ZDP - distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de potencial, em razão das funções em maturação estimuladas.

Verificamos, em todo o processo de organização da atividade de estudo, a importância de o professor ter domínio de pressupostos teóricos, o que nos leva a pensar sobre a necessidade desse docente desenvolver o seu pensamento teórico, por meio da pesquisa, do estudo, da análise e das sínteses a respeito do seu fazer, para que a *práxis* ocorra, de fato. A ação do professor é intencional, seu planejamento e suas ações precisam estar coerentes com o objetivo almejado. Desse modo, o professor ao organizar o ensino, consciente dos objetivos propostos, transforma os seus alunos e também se transforma. Esse é um processo dialético, que envolve contradições, movimento, abstrações e generalizações substantivas, que servirão de base para novas sínteses.

Nessa linha de pensamento, corroboramos com o estudo de Bernardes (2012) que assinala que o pensamento teórico não é natural e nem espontâneo. O ensino da álgebra e a apropriação de seus juízos e conceitos – como sistemas lineares, equações e incógnitas, necessita da organização do ensino e da mediação do professor. Para o aluno superar o pensamento empírico, o planejamento e a ação do docente, para revelar a essência do objeto, são fundamentais.

Observamos, assim, nesta pesquisa que o desenvolvimento do pensamento teórico ocorre de forma gradativa e diretamente relacionada com a mediação do professor. Os alunos participantes, ao discutirem, sobre os juízos e a rede de conceitos que envolvem Sistemas de Equações Lineares, edificaram mudanças qualitativas no nível e nas suas formas de ação e apropriam-se dos juízos e conceitos estudados, incorporando-os na sua própria.

No que tange à formação do conceito de Sistemas de Equações Lineares, verificamos a importância de os alunos se apropriarem das representações algébricas – juízos e conceitos, nas suas formas mais gerais – incógnitas, variáveis, coeficientes, etc. Há indícios de que o domínio desses conhecimentos científicos contribuiu para a formação do pensamento teórico sobre Sistemas de Equações Lineares – que se revela por uma rede conceitual.

Avaliamos que a discussão sobre os juízos e o conceito de Sistemas de Equações Lineares, inicia-se na análise do concreto real – com as comparações, e pelas representações e relações gerais relacionados a sua rede conceitual – que requer o estudo das equações e seus juízos, avança para a transformação dos dados e a modelação da relação geral de Sistemas de Equações Lineares – a simultaneidade. Essa ação possibilita ao aluno converter a essência desse conteúdo na relação de casos particulares – pelo uso da relação geral identificada.

De acordo com Davídov (1996/2019), os principais componentes do pensamento teórico desenvolvidos, - a reflexão, a análise e o plano interno de ação, realizados de maneira sistemática, não se limitaram a aprendizagens especificamente matemáticas. Para Elkonin (1974, p.45), a atividade de estudo promove "[...] transformações que o aluno provoca a si mesmo", engendra uma autotransformação.

Na elaboração do experimento didático-formativo, ressaltamos que não buscamos tarefas diferentes das encontradas nos livros e em sala de aula, nas provas, como as do ENEM – o que esse estudo almejou foi organizar o ensino com o objetivo de desenvolver o pensamento-teórico, ou seja, as relações gerais, os nexos internos, o que exige o conhecimento das teorias mencionadas e da matemática. De acordo com Davídov (2019, p.204), [...] a Atividade de Estudo em particular, não é um fim em si mesma, pois são pré-requisitos para o desenvolvimento intelectual e moral da criança, de sua esfera intelectual e motivacional.

Avaliamos, assim, que a organização do processo ensino-aprendizagem, que desenvolvemos na prática escolar do ensino médio de uma escola de Uberaba - MG criou condições para o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos, notadamente, sobre Sistemas de Equações Lineares, a partir dos resultados apresentados e analisados neste texto. Os indícios de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos ~~transpareceu~~ estão presentes nos diálogos entre alunos e professor e nos registros presentes nas tarefas – resoluções, comentários e observações. Neles foram expressadas as inter-relações dos juízos e conceitos que revelam a essência dos Sistemas de Equações Lineares.

Confirmamos a tese de que o ensino-aprendizagem de equações lineares no ensino médio, visando ao desenvolvimento do pensamento teórico, com base nos fundamentos da Teoria da Atividade de Estudo, é uma forma de se contrapor à abordagem pragmática dos conteúdos presentes nos documentos que orientam o ensino médio, no ensino desenvolvido. A proposta de organização do processo de ensino-aprendizagem cria condições para o desenvolvimento da consciência e do pensamento teórico do aluno, essenciais para a formação humana.

Desse modo, esta pesquisa apresentou uma possibilidade de ressignificar a organização do ensino da álgebra/ Sistemas de Equações Lineares, no ensino médio, indicando aos professores e à comunidade acadêmica um caminho possível para ser realizado, debatido e aprimorado. Traz, ao ensino médio, a possibilidade de adequar os princípios da Teoria da Atividade de Estudo aos processos de ensino-aprendizagem e aguarda novos estudos e contribuições que almejam transformar a realidade educacional brasileira.

REFERÊNCIAS

AQUINO, O. F. **O Experimento Didático-Formativo:** contribuições de L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov. Artigo para Mesa Redonda. I Seminário GEPID/OBEDUC, 2013

AQUINO, O. F; RODRIGUES, A. A formação do pensamento na escola: uma discussão na interseção entre a filosofia, a psicologia e a didática In: Roberto Valdés Puentes; Andréa Maturano Longarezi. (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin, Davídov, Repkin. 1ed.Campinas: Mercado de Letras, 2019, v.

BAUMGART, J.K. **Tópicos para uso da Matemática em sala de aula**: Álgebra. São Paulo: Ática, 1992.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.** 2008. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BERNARDES, M. E. M. **Mediações simbólicas na atividade pedagógica: Contribuições da Teoria Histórico-Cultural para o Ensino e a Aprendizagem**. Curitiba, PR: CRV, 2012.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes –LDB**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm. Acesso em: 30 mar. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2009) **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília: INEP/MEC.

BRASIL **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio.** Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília> MEC, 2012. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 10 fev. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2012) ENEM. **Cadernos de Prova ENEM 2012**. Brasília: INEP/MEC

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2013) ENEM. **Cadernos de Prova ENEM 2013**. Brasília: INEP/MEC

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. (2014) ENEM. **Cadernos de Prova ENEM 2014**. Brasília: INEP/MEC

BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. **Aprova o Plano Nacional de Educação** - PNE e dá outras providências. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2014/Lei/l13005.htm. Acesso em: 11 jul.2017

BRASIL. Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis nos 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Disponível em: *http://legis.senado.leg.br/legislacao/ListaTextoIntegral.action?id=251273&norma=27066.* Acesso em: 30 mar. 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRITO, M. R. F. de (1998). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática. ***Zetetiké,*** *6*(9), 109-162.

BOZHOVICH, L.I. **La personalidad y su formación en la edad infantil.** Editorial Pueblo y Educación. Instituto Cubano del Libro. Habana, 1976.

CEDRO, W. L.; MOURA, M. O. Experimento didáctico: un camino metodológico para la investigación en la educación matemática. **Revista iIberoamericana de educación matemática** – jun. de 2010 – n. 22. p.53-66.

CELLARD, A. **A análise documental.** In: POUPART, J. et al. A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos. Petrópolis, Vozes, 2008

DAVIDOV, V. V. **Tipos de generalización em la enseñanza**. 3 ed. (Trans M. Shuare.) Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

________. **Problemas do ensino desenvolvimental** - A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Revista Soviet Education, August/VOL XXX, n° 8, 1986.

________. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: **La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS.** Antología. Moscú: Progreso, 1987.

________. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico** – Investigación psicológica teórica y experimental. Moscú. Editorial Progresso, 1988.

________. **O que é a atividade de estudo.** Revista "Escola inicial" nº 7, ano 1999. Tradução do russo (para uso em sala de aula) de Ermelinda Prestes.

________. **Os Problemas psicológicos do Processo de Aprendizagem dos Estudantes.** In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). Teoria da aprendizagem desenvolvimental: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 171-174.

________. Desenvolvimento Psíquico da Criança. In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). **Teoria da aprendizagem desenvolvimental:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 175-120.

________. Conteúdo e Estrutura da Atividade de Estudo**.** In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). **Teoria da aprendizagem desenvolvimental**: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 215-234.

________. Atividade de Estudo: situação atual e problemas de pesquisa**.** In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). Teoria da aprendizagem desenvolvimental: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 235-248.

________. Atividade de Estudo e Aprendizagem Desenvolvimental**.** In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). **Teoria**

da aprendizagem desenvolvimental: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 249-266.

________. Problemas de Pesquisa da Atividade de Estudo**.** In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). **Teoria da aprendizagem desenvolvimental**: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 267-288.

________. Uma nova abordagem para o entendimento do conteúdo e estrutura da atividade**.** In: Roberto Valdés Puentes; Cecilia Garcia Coelho Cardoso; Paula Alves Prudente Amorim. (Org.). **Teoria da aprendizagem desenvolvimental**: contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 1ed.Curitiba: CRV, 2019, v. 10, p. 289-300.

DAVIDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. K. La concepción de la actividad de estúdio em los escolares. In: SHUARE, M. (Comp.) **La psicologia evolitiva em la URSS: Antología.** Moscú: Editorial Progreso, 1987.

DIAS, F. C. Sistemas Lineares para o Ensino Médio com o auxílio do Winplot. 2014. 51 f. **Dissertação** (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.

DUARTE, N. **Os conteúdos escolares e a ressurreição dos mortos**: contribuição à teoria histórico-crítica do currículo. Campinas, SP: Autores Associados, 2016. - (Coleção educação contemporânea).

ELKONIN, D. B. Desarrollo Psíquico de los Escolares. In: SMIRNOV, A. A. (redactor jefe); LEONTIEV, A. N.; TIEPLOV, B. M. (Orgs.). **Psicologia**. Cuba: Imprensa Nacional de Cuba, 1961. p. 553-559.

ELKONIN, D. B. Sobre el problema de la periodización del desarrollo psíquico en la infancia. In: DAVIDOV, V.; SHUARE, M. (Orgs.). **La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS**: Antología. Moscou: Editorial Progresso, 1987. p. 104-124.

FEROLA, B. C. SOUZA, L. M. A.; COELHO, G. M. S. Da mente à mão: a ascensão do abstrato ao concreto em uma instrumentalização didática davidoviana. In: Roberto Valdés Puentes; Andréa Maturano Longarezi. (Org**.**). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin, Davídov, Repkin. 1ed.Campinas: Mercado de Letras, 2019.

FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática:** período 2001 – 2012.Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2016

FREITAS, R. A. M. M. Pesquisa em didática: o experimento didático formativo. In: Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste, 2010, Uberlândia. **X Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED Centro-Oeste:** Desafios da Produção e Divulgação do Conhecimento. Uberlândia, 2010. v. I. p. 1-11.

FRIGOTTO, G.; CIAVATTA, M. Perspectivas sociais e políticas da formação de nível médio: avanços e entraves nas suas modalidades. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 32, n. 116, p. 619-638, jul.-set. 2011Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/es/v32n116/a02v32n116.pdf. Acesso em: 30 mar. 2017.

HUNGARO, E. M. A questão do método na constituição da teoría social de Marx. In: CUNHA, C.;SOUSA, J. V.; SILVA, M.A. (Org.) **O Método Dialético na Pesquisa em Educação**. Capinas, SP: Autores Associados 2014.

KHIDIR, K. S. Aprendizagem da Álgebra - uma análise baseada na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davídov. 2006. 104 f. **Dissertação** (Mestrado em Ciências Humanas) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, GOIÂNIA, 2006.

KON, I.S. **Psicología de la primera juventud. In**: A. V. PETROVSKY Psicología pedagógica y de las edades. Editorial Pueblo y Educación. Instituto Cubano del Libro. Habana, 1985.

KOPNIN, P.V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. **Educ. rev.**, Curitiba , n. 24, p. 113-147, Dec. 2004 . Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602004000200006&lng=en&nrm=iso>. access on 16 Feb. 2020. https://doi.org/10.1590/0104-4060.352.

LIBÂNEO, J. C. A pedagogia em questão: entrevista com José Carlos Libâneo. In: **Olhar de professor,** Ponta Grossa, (10-1), 11-33, 2007. Disponível em: http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/684/68410102.pdf Acesso em: 06/07/2013.

LIBÂNEO, J. C. Políticas educacionais no Brasil: desfiguramento da escola e do conhecimento escolar. ***Cad. Pesqui.*** **[online]**. 2016, vol.46, n.159, pp.38-62. ISSN 0100-1574. http://dx.doi.org/10.1590/198053143572.

LONGAREZI, A. M. Teoria do experimento formativo no Sistema Elkonin-Davídov-Repkin. In: Roberto Valdés Puentes; Andréa Maturano Longarezi. (Org.). **Ensino Desenvolvimental:** sistema Elkonin, Davídov, Repkin. 1ed.Campinas: Mercado de Letras, 2019.

LEONTIEV, A. N. **Actividad Conciencia y Personalidad**. La Habana: Pueblo y Educación, 1983.

MARX, K. **Para a crítica da economia política**. São Paulo: Abril Cultural, 1982.

MARX, Karl. Introducción. In: **Elementos fundamentales para la crítica de la economía política** (Grundrisse) (1857-1858). Vigésima edición, vol. 1, México, D.F.: Siglo XXI Editores, 1857

___________. **Manuscritos Econômicos-filosóficos e outros textos escolhidos.** 2. ed. São Paulo: Abril Cultural (Os pensadores), 1978

___________. **O Capital.** 31 ed. Civilização Brasileira: Rio de Janeiro, 2016

MOURA, M. (2000). O educador matemático na coletividade da formação: Uma experiência com a escola pública. **Tese de Livre Docência**. Faculdade Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MOURA, A. R. L. DE; SOUSA, M. DO C. DE. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetike**, v. 13, n. 2, p. 11-46, 16 fev. 2005.

NETTO, J. P. Introdução ao método na teoria Social. In: ***Serviço Social*****: direitos sociais e competências profissionais**. Brasília: CFESS/Abepss, 2009.

NEVES, J. D. O ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental: a formação do conceito de função. 238 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação) Universidade de Uberaba, Uberaba 2014.

PANOSSIAN, M. L. Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino. **Dissertação** (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PANOSSIAN, M. L. O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**.** 2014. 317 f. **Tese** (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: Acesso em: 29 jun. 2018.

PEDRINI, L. C. O Estudo de Sistemas Lineares nos ensinos fundamental e médio **Dissertação** (Mestrado em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013

PREZOTTI FILHO. P.R. Uma proposta de ensino dos temas sistemas lineares e determinantes **Dissertação** (Mestrado em Matemática – PROFMAT) –. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

PUENTES, R. V. Sistema Elkonin-Davidov-Repkin: gênese e desenvolvimento da Teoria da Atividade de Estudo – TAE (1959-2018). In: Roberto Valdés Puentes; Andréa Maturano Longarezi. (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin, Davídov, Repkin. 1ed.Campinas: Mercado de Letras, 2019, v. 1,

RADFORD, L. **Cognição Matemática: história, antropologia e epistemologia.** Organização e Revisão Técnica: MOREY, B.; MENDES, I. A. São Paulo: Livraria da Física, 2011. (Sociedade Brasileira de História da Matemática).

RUFATO, S. A. C. Sistemas lineares, aplicações e uma sequência didática. **Dissertação** (Mestrado em Matemática – PROFMAT) –. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

ROSA, E. J.; MOURA, M. O.; DAMÁZIO, A. Teoria da modelagem. In: Roberto Valdés Puentes; Andréa Maturano Longarezi. (Org.). **Ensino Desenvolvimental**: sistema Elkonin, Davídov, Repkin. 1ed.Campinas: Mercado de Letras, 2019.

RESENDE, M. R. O pensamento teórico segundo Davídov: abstração e generalizações substantivas e a educação matemática. In: Roberto Valdés Puentes; Andréa Maturano Longarezi. (Org.). **Ensino Desenvolvimental:** sistema Elkonin, Davídov, Repkin. 1ed.Campinas: Mercado de Letras, 2019, v. 1, p. 297-323.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F. S. F.; MORETTI, V. D.: Sobre o processo de humanização. In: MOURA, M. O. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber livro, 2010.

SARTES, L. M. A.; SOUZA-FORMIGONI, M. L. O. Avanços na psicometria: da Teoria Clássica dos Testes à Teoria de Resposta ao Item.**Psicol. Reflex. Crit.**, Porto Alegre , v. 26, n. 2, p. 241-250, 2013 . Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-79722013000200004&lng=en&nrm=iso>. access on 25 Apr. 2019. http://dx.doi.org/10.1590/S0102-79722013000200004.

SANTOS, C. M. ; ZUIN, E. S. L. . **Sistemas de Equações Lineares em livros didáticos (1930-1970):** apontamentos para a formação inicial e continuada de professores de Matemática e áreas afins. 2017. (Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Material didático).

SILVA, J. T. **A álgebra nos livros didáticos de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo na perspectiva histórico-cultural** 2015 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade de Uberaba, Uberaba, 2015

SFORNI, Marta Sueli de Faria. Interação entre Didática e Teoria Histórico-Cultural.**Educ. Real.**, Porto Alegre , v. 40, n. 2, p. 375-397, June 2015 . Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2175-62362015000200375&lng=en&nrm=iso>. access on 25 Apr. 2019. Epub Apr 03, 2015. http://dx.doi.org/10.1590/2175-623645965.

SOUSA, Maria do Carmo de; PANOSSIAN, Maria Lúcia; CEDRO, Wellington Lima. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014. – (Série Educação Matemática).

SOUZA, R. C. C. R.; MAGALHÃES, S. M. O.; SILVEIRA, M. J. A tradição do materialismo histórico-dialético na produção acadêmica sobre professores. In: CUNHA, C.; SOUSA, J. V.; SILVA, M.A. (Org.) **O Método Dialético na Pesquisa em Educação**. Capinas, SP: Autores Associados 2014.

VYGOTSKI, L. S. Pensamiento y Lenguaje. In: **Obras Escogidas**. Tomo III. Segunda Edición. Madrid: Visor, 2001.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

APÊNDICES

Apêndice 1– Carta de autorização/solicitação para a realização da pesquisa

CARTA DE SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA REALIZAÇÃO DE PESQUISA NO COLÉGIO xxxxxxxxxxxxxxxx

Uberaba, 20 de novembro de 2017.

Ao Senhor xxxxxx
Diretor do Colégio xxxxxx

Prezado Senhor

Solicitamos a Vossa Senhoria a autorização para realizar a pesquisa "**Sistemas de Equações Linhares no Ensino Médio: aprendizagem e desenvolvimento fundamentado na Teoria Histórico-Cultural"** no Colégio Cenecista Dr. José Ferreira, desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba – UNIUBE, sob a responsabilidade do doutorando Júlio Henrique da Cunha Neto e da Profª. Drª. Marilene Ribeiro Resende.

Trata-se de um estudo com o objetivo de construir um experimento didático-formativo, tendo como foco o ensino-aprendizagem do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, em uma perspectiva lógico-histórica, com a intenção de verificar quais as contribuições que se derivam do ensino do referido conteúdo para o desenvolvimento e a aprendizagem do aluno do ensino médio.

Neste sentido, os professores de matemática do 2º ano do Ensino Médio serão convidados a participar desta pesquisa, junto com os alunos do referido ano escolar. Será discutidas e construídas, com os docentes, atividades de ensino sobre o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares, pautadas na teoria histórico-cultural. Em seguida, será proposto aos alunos um conjunto de aulas que serão observadas e gravadas pelos pesquisadores, durante determinado período, em que eles irão realizar atividades de ensino sobre o conteúdo citado. Em anexo, apresentamos o projeto de pesquisa detalhado.

Esclarecemos-lhe o caráter voluntário da adesão das pessoas, assegurando-lhes a inteira liberdade de participar, ou não, da pesquisa ou retirar seu assentimento e/ou consentimento, em qualquer fase do estudo. Não haverá nenhum tipo de coação aos sujeitos e todos serão respeitados em sua decisão. O pesquisador compromete-se a manter o sigilo, resguardando o anonimato dessa Instituição e dos sujeitos pesquisados, e garante a não utilização das informações em prejuízo das pessoas.

Colocamo-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos

.

Atenciosamente,

Júlio Henrique da Cunha Neto
Doutorando do Programa de Pós-graduação da Universidade de Uberaba

Marilene Ribeiro Resende
Professora do Programa de Pós-graduação da Universidade de Uberaba

Apêndice 2 – Termo de Assentimento

TERMO DE ASSENTIMENTO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa **Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio: aprendizagem e desenvolvimento fundamentado na Teoria Histórico-Cultural**, desenvolvida no âmbito da Universidade de Uberaba, no Programa de Pós-Graduação em Educação, sob responsabilidade do doutorando Júlio Henrique da Cunha Neto e da Professora Doutora Marilene Ribeiro Resende.

Esta pesquisa tem como objetivo desenvolver atividades de ensino sobre o conteúdo de **Sistemas de Equações Lineares – conteúdo curricular do 2º ano do Ensino Médio e presente no ENEM**, visando à uma aprendizagem mais efetiva do aluno e, consequentemente, ao desenvolvimento do pensamento matemático.

Esta pesquisa se justifica devido a importância dos conteúdos escolares, sobretudo os conceitos algébricos, à formação humana e matemática do indivíduo, em um momento em que se discutem consideráveis reformulações para o Ensino Médio brasileiro.

Se você aceitar participar, irá se envolver com atividades de aprendizagem relacionadas ao conteúdo de sistemas lineares, as quais ocorrerão às xxxx, às xxhxxmin, no xxxxxxxxxx. Essas atividades serão gravadas em vídeo e áudio. Você responderá, também, a um questionário no início da pesquisa e outro, ao final, para verificar o seu entendimento sobre o tema em questão, bem como sobre seu processo de aprendizagem sobre o referido conteúdo.

Você poderá ter benefícios ao participar da pesquisa, pois as atividades visam propiciar a aprendizagem dos conteúdos envolvidos – Sistemas de Equações Lineares, com uma abordagem diferenciada. Os resultados estarão à disposição dos interessados, quando essa for finalizada

.

A sua participação depende, também, da autorização de seu responsável legal. Você será esclarecido(a) em qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar. A sua recusa não lhe trará qualquer prejuízo.

Os pesquisadores se comprometem a assegurar o anonimato do sujeito pesquisado. Comprometem-se, ainda, a não utilizar imagens e nomes dos participantes do estudo, em prejuízo das pessoas. Esclarecemos que os dados serão utilizados com fins científicos, como na participação em congressos e publicação de artigos científicos.

Este Termo encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra, fornecida a você.

Eu, ____, aluno (a) do __º ano ____ do Ensino Médio do Colégio __________________________________, tomei conhecimento das atividades de pesquisa que serão realizadas na escola e, por minha livre e espontânea vontade, decidi que:

☐ **Aceito participar das atividades de pesquisa.**

☐ **Não aceito participar das atividades de pesquisa**.

Uberaba, de de 2018.

____ ________________________________
Assinatura do aluno Assinatura do Professor Pesquisador

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADOR RESPONSÁVEL: Júlio Henrique da Cunha Neto
Telefone e e-mail: (34) 9 9179-6401 – julio_h_neto@hotmail.com

PESQUISADORA RESPONSÁVEL: Profª. Drª. MARILENE RIBEIRO RESENDE
Telefone e e-mail: 3319 8831 – marilene.resende@uniube.br

O responsável por você deve assinar um termo para consentir a sua participação.

Apêndice 3 – Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
Nome do(a) participante da pesquisa:____

Nome do responsável legal pelo(a) participante da pesquisa:____________________

Identificação (RG) do responsável legal:_______________________________________

Título do Projeto: **"Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio: aprendizagem e desenvolvimento fundamentados na Teoria Histórico-Cultural"**.

Instituição proponente da pesquisa: Universidade de Uberaba.

Pesquisador responsável: Doutorando Júlio Henrique da Cunha Neto.

Identificação: julio_h_neto@hotmail.com – (34) 9 9179 6401.

CEP-UNIUBE: Av. Nenê Sabino, 1801 – Bairro: Universitário – CEP: 38055-500-Uberaba/MG, tel: 34-3319-8959 / E-mail: cep@uniube.br

O(a) aluno (a)____,seu/sua ____________________________________ (grau de parentesco), está sendo convidado(a) para participar da pesquisa "**Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio: aprendizagem e desenvolvimento fundamentados na Teoria Histórico-Cultural**", desenvolvida no âmbito da Universidade de Uberaba, do Programa de Pós-Graduação em Educação, sob a responsabilidade do doutorando Júlio Henrique da Cunha Neto e da Professora Doutora Marilene Ribeiro Resende.

Esta pesquisa tem como objetivo desenvolver atividades de ensino sobre o conteúdo de **Sistemas de Equações Lineares – conteúdo curricular do 2º ano do Ensino Médio e presente no ENEM**, visando uma aprendizagem mais efetiva do aluno e, consequentemente, ao seu desenvolvimento.

O processo de ensino-aprendizagem da matemática tem trazido dificuldades aos professores, aos alunos, conforme têm demonstrado as avaliações externas, como a do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). Considerando o contexto atual, em que se estabelece uma "reforma" para o Ensino Médio e se discute uma Base Nacional Comum Curricular para o referido nível, a importância dos conteúdos escolares à formação humana do indivíduo e a necessidade de aprimoramento das formas de ensinar os conteúdos matemáticos, é que se justifica a presente pesquisa.

Se você consentir que o(a) aluno(a), sob sua responsabilidade, participe desta pesquisa, ele(a) será convidado(a) a realizar as atividades de ensino, incluindo tarefas de aprendizagem – relacionadas ao conteúdo de sistemas lineares, as quais ocorrerão às xxxx, às xxhxxmin, no xxxx. Ressalta-se que o tempo de duração do experimento será definido de acordo com as necessidades apresentadas pelos alunos e a disponibilidade da escola. Essas atividades serão gravadas em vídeo e áudio. Ele(a) responderá, também, a um questionário no início das atividades, e outro, ao final, para verificar o seu entendimento sobre o tema em questão, bem como sobre seu processo de aprendizagem.

Esta pesquisa poderá trazer benefícios aos participantes, pois as atividades de ensino a serem realizadas têm o objetivo de propiciar a aprendizagem dos conteúdos envolvidos – Sistemas de Equações Lineares – assunto recorrente no ENEM e nas avaliações vestibulares. Os resultados estarão à disposição dos interessados, do responsável legal pelo participante da pesquisa, quando essa for finalizada.

Para a participação do(a) aluno(a), precisamos de sua autorização. Você será esclarecido(a), caso desejar, sobre qualquer aspecto pertinente ao estudo, a qualquer tempo, e estará livre para dar o consentimento de participação. No entanto, a sua recusa não trará qualquer prejuízo ao(a) aluno(a). Os pesquisadores se comprometem a assegurar o anonimato do sujeito pesquisado. Comprometem-se, ainda, a não utilizar imagens e nomes dos participantes do estudo, em prejuízo das pessoas. Esclarecemos que os dados serão utilizados para fins científicos, como na participação em congressos e publicação de artigos científicos.

O aluno(a) poderá deixar de participar desta pesquisa no momento que que desejar, sem lhe acarretar quaisquer danos. Salientamos, também, que a sua livre participação, fundamentada perante este Termo de Consentimento, não prevê benefícios materiais ou financeiros ao participante.

Você receberá uma via deste Termo, assinada pela equipe, constando a identificação e os telefones dos pesquisadores, caso você queira entrar em contato com eles.

Uberaba, ___, de __________________, 2018.

____

Nome do responsável e assinatura

____

Júlio Henrique da Cunha Neto – (34) 9 9179-6401
Pesquisador Responsável

____

Marilene Ribeiro Resende – (34) 3319 8811
Pesquisadora Responsável

Apêndice – Convite aos alunos

Convite

Convidamos você para participar, como voluntário, da pesquisa, desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba, sobre o processo de ensino-aprendizagem de **Sistemas de Equações Lineares – conteúdo curricular do Ensino Médio e presente no ENEM.**

A presente pesquisa, sob a responsabilidade do doutorando **Júlio Henrique da Cunha Neto** e da **Professora Doutora Marilene Ribeiro Resende**, tem como objetivo desenvolver atividades de ensino sobre o conteúdo acima descrito.

Caso aceite participar deste estudo, você irá se envolver com tarefas de aprendizagem, as quais contribuirão para o desenvolvimento do seu pensamento matemático. As atividades ocorrerão uma vez por semana, às xxx-feiras, às xx horas, no Colégio xxxx. **Venha participar desta pesquisa!!!**

Apêndice 5 - Questionário

UNIVERSIDADE DE UBERABA – UNIUBE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MESTRADO E DOUTORADO EM EDUCAÇÃO

Linha de pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-aprendizagem.

QUESTIONÁRIO SOBRE ATITUDES EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES:
Você foi convidado(a) como voluntário(a) para participar da pesquisa **Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio: aprendizagem e desenvolvimento fundamentado na Teoria Histórico-Cultural, desenvolvida no âmbito da Universidade de Uberaba -** Programa de Pós-Graduação em Educação. Para realizarmos essa investigação, consideramos essencial conhecer as atitudes dos alunos em relação à matemática. Solicitamos-lhe que responda este questionário, cujos resultados serão usados nas fases posteriores da referida pesquisa. Esperamos contar com a sua contribuição.

I – DADOS PESSOAIS

1. **Qual seu sexo:** ① Masculino ② Feminino
2. **Idade:**
3. **Qual a escolaridade de seu Pai?** ① Sem escolaridade ② Ensino Fundamental Incompleto ③ Ensino Fundamental Completo ④ Ensino Médio Incompleto ⑤ Ensino Médio Completo ⑥ Ensino Superior Incompleto ⑦ Ensino Superior Completo ⑧ Pós-Graduação Incompleto ⑨ Pós-Graduação Completo
4. **Qual a escolaridade de sua Mãe?** ① Sem escolaridade ② Ensino Fundamental Incompleto ③ Ensino Fundamental Completo ④ Ensino Médio Incompleto ⑤ Ensino Médio Completo ⑥ Ensino Superior Incompleto ⑦ Ensino Superior Completo ⑧ Pós-Graduação Incompleto ⑨ Pós-Graduação Completo

Atitudes em relação à Matemática (BRITO, 1996)				
A - Concordo Totalmente	B - Concordo Parcialmente	C – Nem Concordo Nem Discordo	D – Discordo Parcialmente	E - Discordo Totalmente

		A	B	C	D	E
1	Eu fico sob uma terrível tensão na aula de Matemática.	①	②	③	④	⑤
2	Eu não gosto de Matemática e me assusta ter fazer essa matéria.	①	②	③	④	⑤
3	Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.	①	②	③	④	⑤
4	Matemática é fascinante e divertida.	①	②	③	④	⑤
5	A Matemática me faz sentir seguro(a) e é, ao mesmo tempo, estimulante.	①	②	③	④	⑤

6	"Dá um branco" na minha cabeça e não consigo pensar claramente quando estudo matemática.	①	②	③	④	⑤
7	Eu tenho sensação de insegurança quando me esforço em Matemática.	①	②	③	④	⑤
8	A Matemática me deixa inquieto(a), descontente, irritado(a) e impaciente.	①	②	③	④	⑤
9	O sentimento que tenho com relação à Matemática é bom.	①	②	③	④	⑤
10	A Matemática me faz sentir como se estivesse perdido(a) em uma selva de números e sem encontrar a saída.	①	②	③	④	⑤
11	A Matemática é algo que aprecio grandemente.	①	②	③	④	⑤
12	Quando eu ouço a palavra Matemática, eu tenho um sentimento de aversão.	①	②	③	④	⑤
13	Eu encaro a Matemática com um sentimento de indecisão que é resultado do medo de não ser capaz em Matemática.	①	②	③	④	⑤
14	Eu gosto realmente de Matemática.	①	②	③	④	⑤
15	A Matemática é uma das matérias que realmente eu gosto de estudar na escola.	①	②	③	④	⑤
16	Pensar na obrigação de resolver um problema matemática me deixa nervoso(a).	①	②	③	④	⑤
17	Eu nunca gostei de Matemática e é a matéria que mais me dá medo.	①	②	③	④	⑤
18	Eu fico mais feliz na aula de Matemática que na aula de qualquer outra matéria.	①	②	③	④	⑤
19	Eu me sinto tranquilo(a) em Matemática e gosto muito dessa matéria.	①	②	③	④	⑤
20	Eu tenho uma reação definitivamente positiva com relação à Matemática: eu gosto e aprecio essa matéria.	①	②	③	④	⑤

Apêndice 6 – Diagnóstico

Diagnóstico: Ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares

1. **Utilize equações para representar as situações problemas a seguir, sabendo-se que não são conhecidos os preços de cada item:**

a) Num supermercado, 5 cadernos, 4 canetas e 2 borrachas custam, juntos, R$ 25,00. Nesse mesmo local, 2 cadernos, 3 canetas e 5 borrachas custam, juntos, e das mesmas marcas dos anteriores, R$ 13,50.

b) Uma loja de eletrodomésticos faz as seguintes promoções:
• Compre um micro-ondas e um liquidificador por apenas R$ 600,00.
• Compre um micro-ondas e um refrigerador por apenas R$ 1.400,00.
• Compre um refrigerador e um liquidificador por apenas R$ 1.100,00

2. Resolva os problemas a seguir:

1. Num pátio de veículos existem automóveis e motocicletas. O número total de rodas é 150 e o número de motocicletas é o triplo do número de automóveis. Qual o número de veículos que se encontra no pátio?

2. A soma de dois números é 60 e a diferença é 12. Determine esses números.

3. Numa loja, os artigos A e B, juntos custam R$70,00. Dois artigos A mais um C custam R$105,00 e a diferença de preços entre os artigos B e C, nessa ordem, é R$ 5,00. Qual o preço do artigo C?

4. Um cliente fez um orçamento com uma cozinheira para comprar 10 centos de quibe e 15 centos de coxinha, e o valor total foi de R$ 680,00. Ao finalizar a encomenda, decidiu aumentar as quantidades de salgados e acabou comprando 20 centos de quibe e 30 centos de coxinha. Com isso, ele conseguiu um desconto de 10% no preço do cento do quibe e 15% no preço do cento de coxinhas, e o valor total da compra ficou em R$ 1.182,00. De acordo com esses dados, qual foi o valor que o cliente pagou pelo cento da coxinha? (Fonte: Adaptado, Exame Nacional do Ensino Médio, 2ª aplicação, 2014)

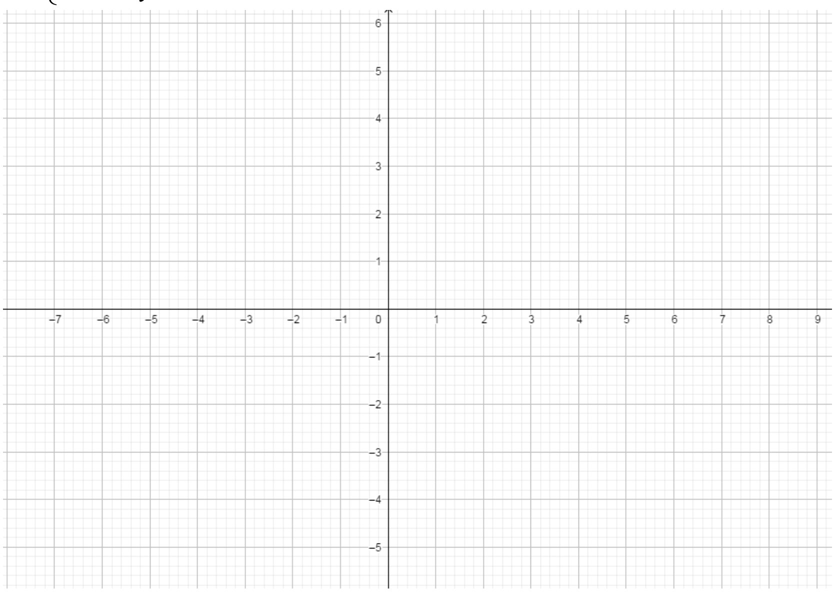
3. Resolva estes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x+4y=1 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

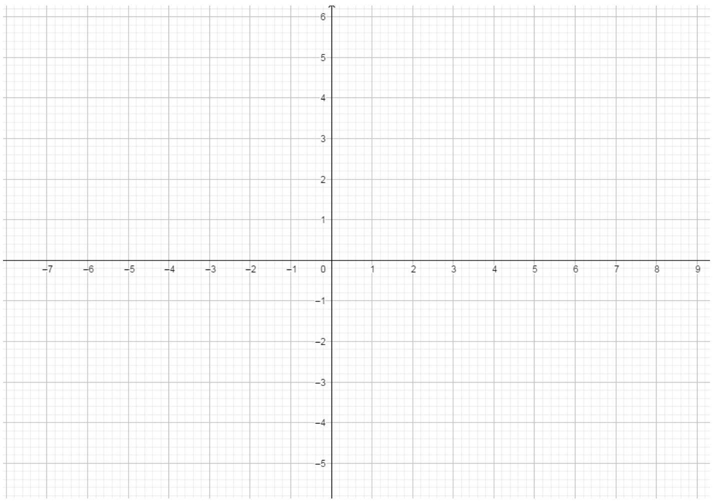
b) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-y-z=3 \end{cases}$

4. Represente graficamente o sistemas lineares, classifique-os e indique o significado dessas representações.

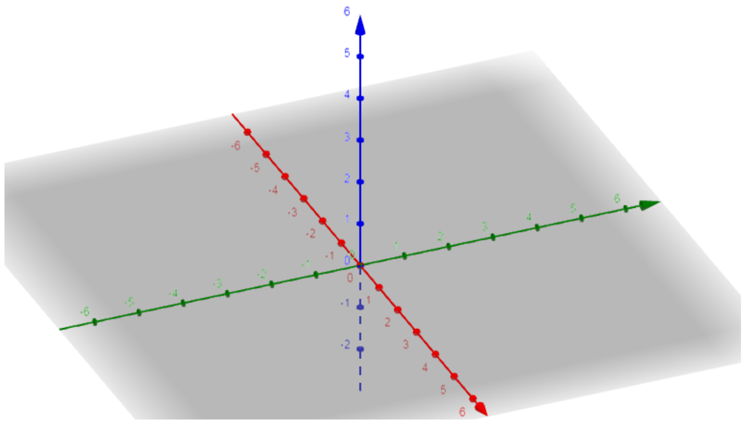
a) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$



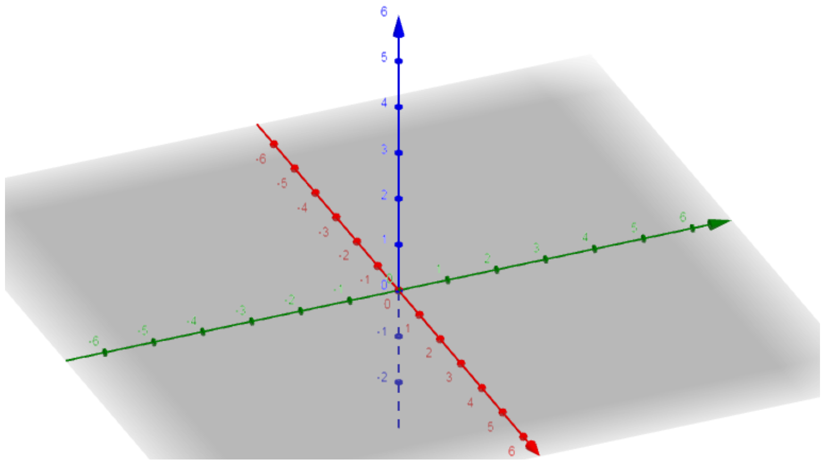
b) $\begin{cases} x-y=3 \\ 4x-4y=6 \end{cases}$



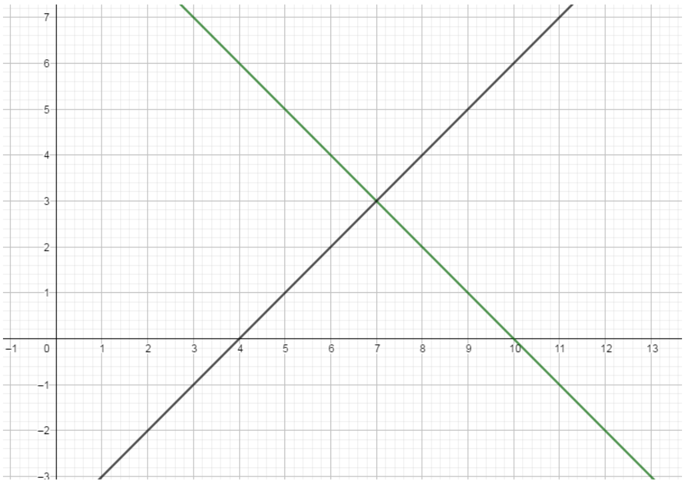
c) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-3y+z=0 \\ 5x-y-z=3 \end{cases}$



d) $\begin{cases} 2\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=4 \\ x+y+2z=3 \\ 3x+2y+3z=9 \end{cases}$

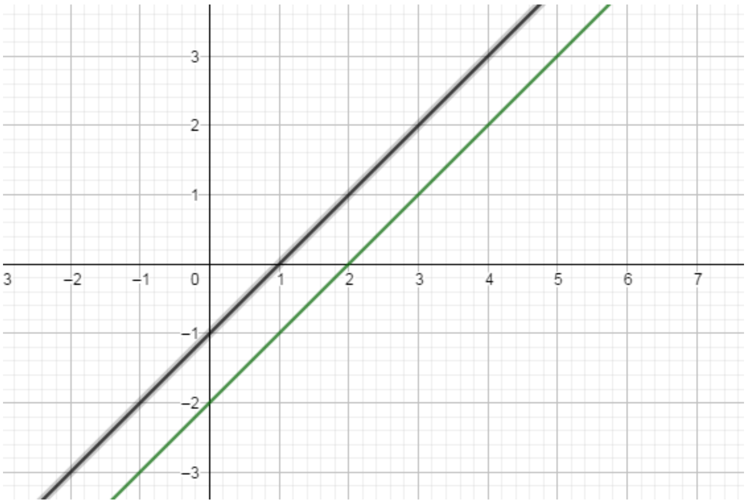


5.Análise o gráfico a seguir.



1. Estabeleça um conjunto de equações algébricas para representar essa situação?
2. Qual a relação pode ser estabelecida entre as duas retas?
3. Como o ponto de interseção entre as retas pode ser determinado algebricamente?
4. Qual significado matemático/algébrico podemos atribuir à interseção das retas?

6. Análise o gráfico a seguir.



1. Estabeleça um modelo algébrico para representar essa situação.
2. Qual a relação pode ser estabelecida entre as duas retas?
3. Qual o significado algébrico para essa relação?

7. Sobre a resolução dos problemas anteriores, responda:

1. O que você pensou para resolver cada um dos problemas apresentados?
2. Quais componentes (elementos/evidências) de um problema que o permitem identificar a necessidade da construção de um sistema de equações lineares?

Diagnóstico: Ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares

Para o próximo encontro, elabore uma apresentação, tendo como base os seguintes direcionamentos:

1. O que é um sistema?
2. O que é um sistema de equações lineares?
3. O que caracteriza um sistema?
4. O que caracteriza uma equação?
5. O que caracteriza a linearidade?
6. Quais elementos estão envolvidos num sistema de equações? E qual a importância e o significado de cada um desses elementos para o sistema?
7. Defina o significado de sistemas para você.
8. Defina, matematicamente, sistema de equações a e estabeleça sua forma geral.

O modo de apresentação do trabalho é livre, pode-se utilizar as tecnologias, vídeos, e toda sua criatividade. Além disso, os direcionamentos apresentados servem como base para o trabalho, ou seja, o aluno pode ir além deles.

Apêndice 7 – Atividade 1

Tarefas de Aprendizagem – Introduzindo a Ideia de Comparação

a) Vamos falar de Moda!!!

Quando nos vestimos muitas vezes bate aquela dúvida sobre qual é o melhor *look*. Experimentam-se muitas roupas até chegar a uma decisão. Nesse contexto, estes questionamentos são recorrentes:

a) Qual o melhor look para uma determinada ocasião?

b) O que leva (quais as condições) uma pessoa escolher uma determinada roupa em detrimento de outras? Quais ações ela realiza para escolher uma roupa?

Observe a figura a seguir:

Fonte: http://www.agitonazarepaulista.com.br/materias/nova-itgirl-exbbb-aline-da-dicas-para-escolher-o-look-em-cada-ocasiao/30

Discuta com seus colegas:

a) O que seria determinante para uma pessoa escolher especificamente um dos looks da imagem anterior?
b) Quais ações (condições/fatores) que podem contribuir no processo de escolha de uma roupa?

b) Qual a sua preferência

Qual a sua preferência?

1) ( ) Facebook ou ( ) Instagram
2) ( ) Twitter ou ( ) Snapchat
3) ( ) Youtube ou ( ) Netflix
4) ( ) Táxi ou ( ) Uber
5) ( ) Spotify ou ( ) Deezer

a) O que você levou em consideração para a escolha de cada uma de suas preferências?
b) As preferências escolhidas foram realizadas tendo como base duas opções, sendo a **comparação** uma ação necessária nessa atividade. Durante as escolhas poderíamos indicar que uma preferência é melhor, pior ou igual que outra. Desse modo, o que caracteriza uma comparação? Existem elementos matemáticos que estão presentes durante o exercício dessa ação?
c) Discuta com seus colegas outras situações em que são necessárias exercer comparações e que a matemática esteja presente.

c) A Ideia da Comparação na história da matemática

Curiosidades e pesquisa

Você sabe como surgiu o processo de contagem?
Você sabe como surgiu o calendário Egípcio?
Você sabe como os problemas envolvendo números eram resolvido?
Você conhece o método da falsa posição?

Responda:

5. Dos conteúdos escolares de matemática que você já estudou, em quais deles a ideia de comparação estava presente?
6. Qual a importância de estabelecer comparações no estudo da matemática?
7. Quais "elementos" matemáticos estão presentes quando você estabelece uma comparação? Justifique.

d) E os grupos de WhatsApp?

Discutindo com os colegas:

a) Você participa de grupos nas redes sociais?
b) Qual a necessidade de um grupo de WhatsApp?

Atualmente, as redes sociais já estão incorporadas no cotidiano das pessoas, sobretudo, dos jovens. Nelas podemos formar diferentes grupos para discutir sobre os mais diversos assuntos, no âmbito familiar, estudantil, profissional, lazer, entre outros. E você, participa de muitos grupos?

Para facilitar essa discussão, enumere na figura a seguir alguns grupos que você participa, em seguida, responda o questionamento apresentado.

Grupo 1:____________________
Grupo 2:____________________
Grupo 3:____________________
Grupo 4:____________________
Grupo 5:____________________
Grupo 6:____________________
Grupo 7:____________________
Grupo 8:____________________

O que tem de geral no processo de formação de cada um desses grupos?

Responda:

1. O que caracteriza cada um desses grupos?
2. Há uma relação geral presente em todos eles?
3. Podemos comparar esses grupos? Por quê?
4. O que seria necessário para formarmos um grupo dos participantes deste estudo?
5. A característica geral indicada na formação desses grupos poderia ser aplicada para formarmos um grupo dos participantes deste estudo? Justifique.

Tarefas de Aprendizagem – Ideia de Comparação com Blocos Lógicos

e) Atividade com os Blocos Lógicos

a) Como podemos comparar e/ou agrupar este conjunto de objetos (blocos lógicos)? Justifique.
b) Agrupe os o blocos lógicos do modo que você considerar mais conveniente.

a. Após agrupar os blocos lógicos, discuta com seus colegas:

a) Quais critérios foram utilizados para o agrupamento dos objetos?
b) O que caracteriza o(s) grupo(s) de objetos formados? Justifique.
c) Podemos comparar esses grupos?
d) O que nos permite realizar comparações entre grupos distintos?
e) Podemos estabelecer critérios para facilitar as comparações entre grupos de objetos? Quais seriam?
f) Elabore/Relate momentos da sua vida cotidiana em que você necessita realizar um agrupamento de objetos.
g) Elabore/Relate situações em que comparamos grupos de objetos de forma equivocada.

f) **Análise dois grupos do material que você organizou no exercício anterior. Por exemplo:**

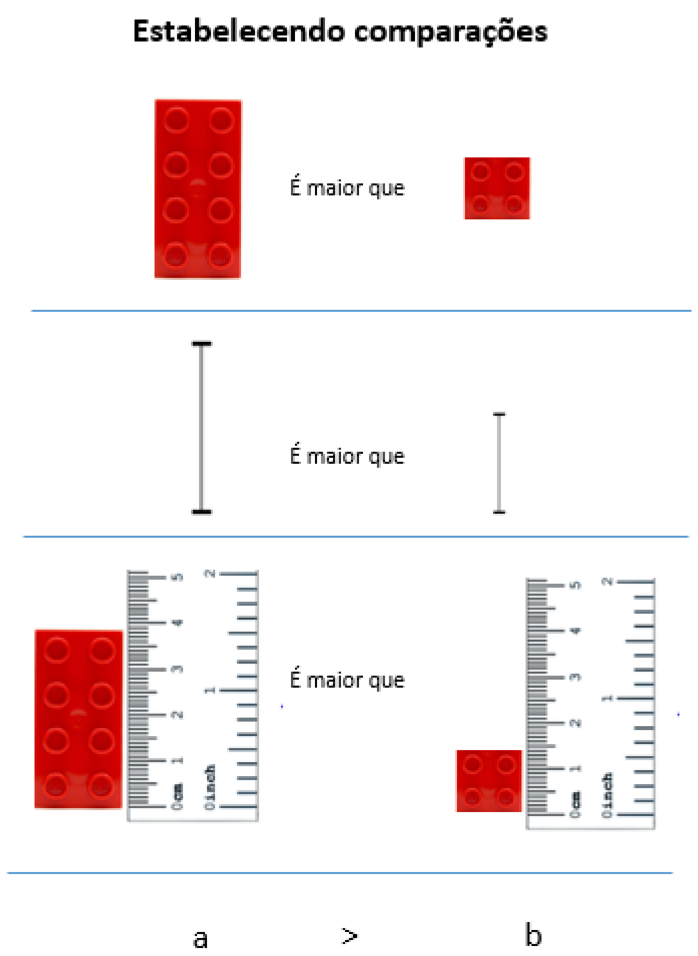
Exemplo - Grupo 1

Exemplo - Grupo 2

Discuta com seus colegas:

a) Podemos comparar esses grupos? Como compará-los?
b) Quais instrumentos/recursos podemos utilizar para realizar essas comparações?
c) Quais características/atributos desses objetos consideramos para exercer a comparação: largura, comprimento, peso, cor, formato, outros?
d) Discute e conheça as formas de comparação apresentadas pelos seus colegas, há uma maneira mais viável de realizar uma comparação?
e) Como a matemática pode contribuir para estabelecer essas comparações?
f) Quais símbolos (elementos) matemáticos podem ser utilizados para estabelecer comparações? Como isso pode ocorrer?

g) As comparações realizadas anteriormente podem ser representadas de diferentes formas, conforme a figura a seguir.



- O que os segmentos (representação gráfica) representa? Unidade de medidas? Valores numéricos? Justifique.
- Qual a relação entre essas formas de comparação?
- Qual a importância em estabelecer uma designação alfabética (incógnitas) para um objeto e/ou de um sinal para registrar uma comparação?
- O que as letras a e b representam nessa comparação?
- Podemos atribuir qualquer valor às letras a e b, como altura, largura, espessura, a profundidade, o perímetro, etc.?
- Letra: uma variável, uma incógnita? Construa, com suas palavras, uma definição para esses termos.
- Em quais situações é mais conveniente utilizar incógnitas para estabelecer uma comparação?
- Existem situações presentes no seu cotidiano que você podem ser representadas com incógnitas? Apresente exemplos.
- Como um incógnita pode ser representada geometricamente? Se possível, represente geometricamente uma incógnita.

Apêndice 8 – Atividade 2

Tarefas de Aprendizagem – Relembrando a ideia de Equações

a) **Analise a figura a seguir.**

______________________ ________

____ _______________

Em relação aos segmentos apresentados, responda:

- É possível comparar esses segmentos? Como? Justifique.

- Quais as relações podem ser estabelecidas em relação aos segmentos apresentados?

- Com suas palavras estabeleça defina:

a) Comparação:
b) Relação:

- Com base nas relações estabelecidas, qual delas é representada por uma igualdade?

b) **Analise a definição geral de equação**

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{13}x_3 + a_{1n}x_n = b$.
Os números $a_{11} + a_{12} + a_{13} + ... + a_{1n}$, todos reais, são chamados *coeficientes* e b, também real é o *termo independente* da equação (IEZZI; HAZZAN,1985, p.115).

Discuta com os seus colegas e registre:

a) Qual o significado das incógnitas na equação?
b) As equações apresentam apenas uma incógnita? Justifique.
c) Qual o significado dos coeficientes?
d) Qual o significado do termo independente?

c) **Resolva estas equações:**

- $x + x - 4 = 5 - 2x$

- $3(2x - 1) = -2(x + 3)$

d) **Considerando que uma equação de grau 1 é da seguinte forma: *ax + b = 0, a ≠ 0*; analise as propriedades:**

a) Propriedade de *unicidade*, da adição, em que *a = a', b = b',* → *a + b = a' + b'.* Por exemplo, se ax +b – b = 0 – b, ou seja, ax = -b".
b) Propriedade da unicidade da multiplicação, em que *a = a', b = b',* → *a . b = a' . b',* resultando, sem alterar a igualdade, que ao multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$, tem-se $a \cdot \frac{1}{a}$ x = $-b \cdot \frac{1}{a}$, sendo $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, conclui-se que $x = -\frac{b}{a}$.

a) Qual a relação dessas propriedades com a resolução da questão 3?
b) O que caracteriza o processo de resolução de uma equação?

e) **Resolva estes problemas:**

a) Gustavo tinha certa quantia em dinheiro, foi ao shopping e gastou 1/3 da quantia na compra de uma revista, gastou 1/4 da quantia na compra de um CD e ainda ficou com R$ 25,00. Qual era a quantia que Gustavo possuía?

b) Os 44 alunos do 1º período de um curso de Matemática representam 40% dos alunos de todos os períodos desse curso. Quantos são os alunos de todos os período desse curso de Matemática?

f) **Escreva as equações que podem representar as situações-problema a seguir:**

a) Se um trabalhador recebe 510 reais em tíquetes de alimentação, com valores de 20 reais ou 50 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?

b) Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôLei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes?

g) **Resolvas as equações:**

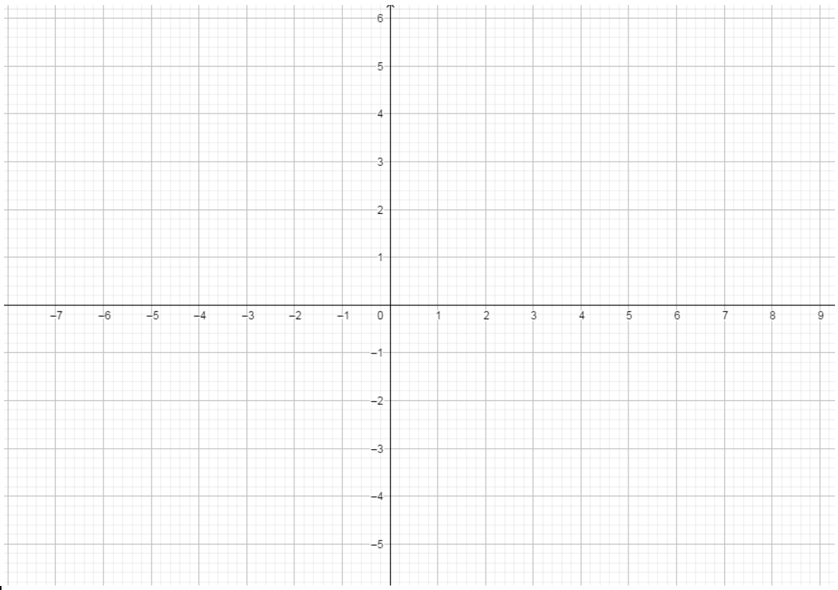
a) $10x + 12y = 80$

b) $5x - 2y = 2$

c) $20x + 50y = 510$

h) **Represente graficamente as equações:**

a) $2x + 3y = 9$



x	Y

b) $3x + 4y = 20$

x	**y**

c) $5x - 2y = 2$

x	**y**

i) **Considerando a atividade anterior, discuta com seus colegas:**

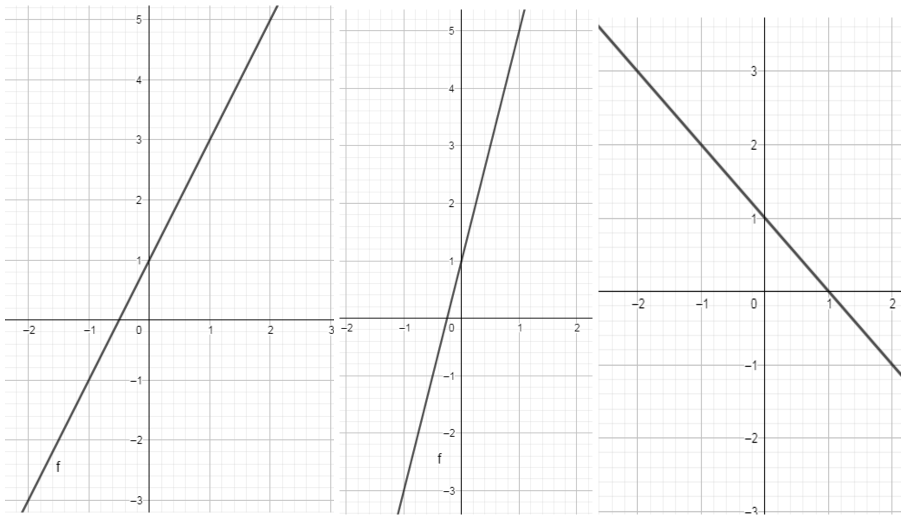
a) Qual a diferença entre as equações de uma e duas incógnitas? Justifique.
b) O que caracteriza uma equação com duas incógnitas?
c) Relata para os seus colegas o que você pensou para resolver essas equações.
d) Quais são os procedimentos (propriedades matemáticas) essenciais para resolver uma equação de uma incógnita? E de duas?

j) **Relacione as definições a seguir com as equações e seus elementos.**

Variável	"[...] é afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela" (p.120).
Fluência	"Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, toda esta Realidade em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos os compartimentos comunicam e participam, todos, um da vida dos outros".
Interdependência	"O mundo está permanente evolução; todas as coisas, a todo momento, se transformam, tudo flui(...)".

k) **Considerando que uma equação com duas incógnitas pode ser modelada pela forma: $y=ax + b$, quais equações representam estas retas:**

a) **b)** **c)**



Analisando a relação entre as representações algébrica e geométrica, responda:

a) Qual o significado pode se atribuir em relação à variação do coeficiente das equações?
b) Qual o comportamento do termo independente das equações?

l) **Elabore situações-problema considerando a necessidade de:**
   a) Encontrar o valor de uma incógnita, sendo o número 5 coeficiente da equação.
   b) Encontrar o valor de uma incógnita, sendo o número 10 o termo independente da equação.
   c) Encontrar o valor de duas incógnitas.
   d) Quais conhecimentos você mobilizou para elaborar essas situações-problema?

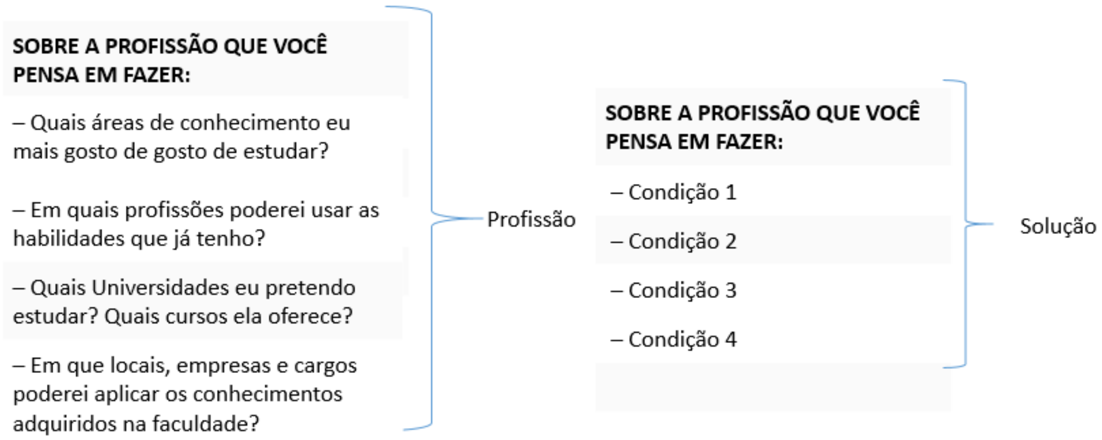
Apêndice 9 – Atividade 3

Tarefa 3 – Sistemas de Equações Lineares

a) **Qual a futura profissão que você pensa em exercer?**
Leia a reportagem em anexo e discuta com os colegas sobre as questões propostas.

Link da Reportagem: https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/como-escolher-o-curso-que-melhor-se-encaixa-em-seu-perfil/

A escolha da futura profissão não é simples. Para se dar bem é necessário colocar na balança um série de fatores, como afinidades, habilidades, bem estar, retorno financeiro, entre outros. Com base na reportagem, elaboramos o esquema a seguir para ajudá-los a pensar sobre a sua futura profissão. Para encontrar a profissão “ideal” é importante que “a resposta” atenda à todas condições apresentadas.



Desse modo, responda:

a) Qual profissão você pretende exercer? Quais as condições possibilitaram você decidir por ela?

b) Considerando suas respostas às condições do problema inicial, dentre as possíveis soluções apresentadas a seguir, qual seria a profissão mais adequada? Justifique.

Profissões
Advogado(a)
Médico(a)
Engenheiro(a)

c) Nathália pretende escolher sua profissão orientando-se pela reportagem do guia do estudante. Sabe-se que ele gosta das ciências biológicas, do contato com outras pessoas, pretende estudar na Universidade de Uberaba e quer trabalhar em empresas/instituições de saúde. Qual destas cursos ele poderá cursar? Justifique.

Cursos
Medicina
Enfermagem
Fisioterapia
Terapia Ocupacional
Odontologia

d) Já Gabriel gosta das ciências exatas e tem facilidade na linguagem dos computadores, quer estudar na mesma Universidade que a Nathália. Nessas condições, qual destes cursos atende a esses interesses? Justifique.

Cursos
Medicina
Enfermagem
Fisioterapia
Terapia Ocupacional
Odontologia

a) Discuta com os colegas:

a) Qual a característica geral desse problema?

b) Qual a relação do problema anterior com o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares?

b) Analise os esquemas a seguir:

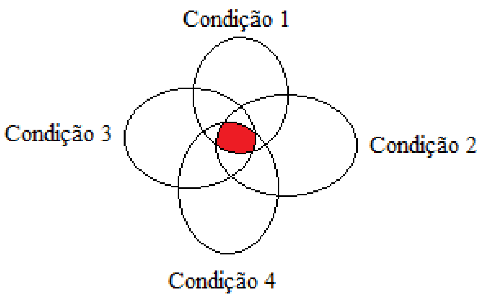


Figura1 - Representação 1

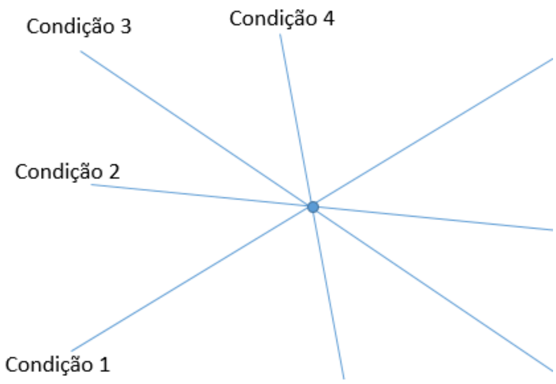


Figura 2 - Representação 2

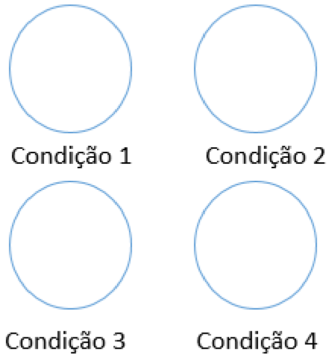


Figura 3 - - Representação 3

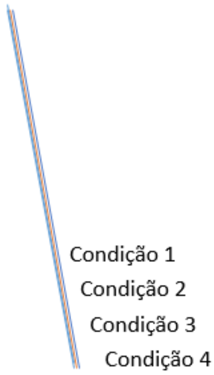


Figura 4- Representação 4

Responda:

1. Quais as relações pode se estabelecer entre essas figuras?
2. Qual a relação entre elas e os problemas da questão 1? Justifique.
3. Estabeleça relações entre essas figuras com os Sistemas de Equações Lineares. Quais as suas semelhanças? E o caracteriza essas relações? Justifique.

c) Dando significado ao conceito/definição de sistema de equações lineares.

Analise esta representação de um sistema de equações lineares na sua forma geral:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Discuta com os seus colegas e registre:

e) O que essa definição tem a ver com as atividades anteriormente trabalhadas?
f) Quais os significados de *n* e *m* nessa representação?
g) Quais os significados de $a_{11}, a_{12}, a_{13} e\ a_{1n}$?
h) Quantas equações compõem esse sistema?

i) Quais os significados x_1, x_2, x_3 e x_n? Como essas letras se comportam/repetem nessa representação?
j) Quais as semelhanças e as diferenças deste sistema e seus elementos $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ com o apresentado anteriormente?
k) O que cada equação expressa no sistema?
l) Qual a relação das equações com a solução do sistema? O que a relação entre as equações expressa no sistema?
m) Quais propriedades matemáticas são essenciais no processo de resolução de um sistema de equações? Justifique.

d) Resolva algebricamente os dois sistemas a seguir:

I) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x + 4y = 10 \\ 2x + 8y = 0 \end{cases}$

a) Quais foram os resultados encontrados?
b) Com base nos resultados, compare os sistemas. Quais suas semelhanças? Justifique.
c) Qual a relação pode ser estabelecida entre as equações que compõem cada sistema?
d) O que você entende por sistemas equivalentes?

Sistemas Equivalentes – Definição

Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Por exemplo, dados os sistemas:

$$S_1 = \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Verificamos que o par ordenado (x, y) = (1, 2) satisfaz ambos e é único. Logo, S_1 e S_2 são equivalentes: $S_1 \sim S_2$.

Exemplo de como identificar Sistemas Equivalentes: https://www.youtube.com/watch?v=cpwBxz-vw5A

e) **Calcular *m* e *n* de modo que sejam equivalentes os sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} mx - ny = -1 \\ nx + my = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a+2s=5 \\ 2a-3s=-4 \end{cases}$ e $\begin{cases} mx-ny=-1 \\ nx+my=2 \end{cases}$

7. Identifique os sistemas equivalentes

I) $\begin{cases} 4x+8y=12 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ II) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ III) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 4x+8y=12 \end{cases}$

IV) $\begin{cases} 3y=5 \\ x+2y=-5 \end{cases}$ V) $\begin{cases} -x-2y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ VI) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$

a) Quais sistemas são equivalentes? Justifique.
b) Quais as características desses sistemas equivalentes?
c) Dos sistemas não considerados equivalentes, o que caracterizou esse fato?

a) Análise os sistemas equivalentes:

I) $\begin{cases} 2x+4y+2z=18 \\ 2x+y-z=2 \\ -3x+y+2z=4 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 4x+2y-2z=4 \\ 6x-2y-4z=-8 \\ x+2y+z=9 \end{cases}$

a) Quais as características desses sistemas equivalentes?

b) Com base no sistema apresentado e nas atividades realizadas, explique este teorema:
Teorema I: Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número K$\neq$ 0, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

9. Análise os sistemas equivalentes:

I) $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ 3x+5y+4z=4 \\ 5x+3y+4z=-10 \end{cases}$ II) $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ -4y-2z=-2 \\ -12y-6z=-20 \end{cases}$

a) Por que esses sistemas são equivalentes? Justifique
b) Com base no sistema apresentado e nas atividades realizadas, explique este teorema:
Teorema II: Se substituirmos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido S', será equivalente a S.

a) **Utilizando sistemas equivalentes, resolva:**

a) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+2y+4z=10 \\ 3x+3y+6z=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+7z=9 \end{cases}$

Utilizando o GeoGebra como Recurso

11. No Geogebra, construa os gráficos destes sistemas:

I) $\begin{cases} -x-4y=0 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 6x+4y=10 \\ 2x+8y=0 \end{cases}$

a) O que esses gráficos tem em comum?

b) Como sistemas equivalentes são representados graficamente?

12. Com o auxílio do Geogebra resolva estes sistemas.

8. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$

Discute com os colegas:

10. É possível resolver por esse método? Quais foram as dificuldades encontradas?

11. O que tem em comum entre esse método de resolução com o escalonamento?

13. Analise os gráficos a seguir:

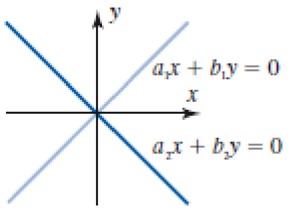


Gráfico 1

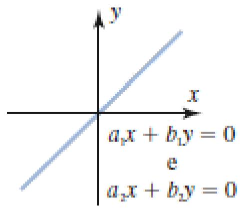


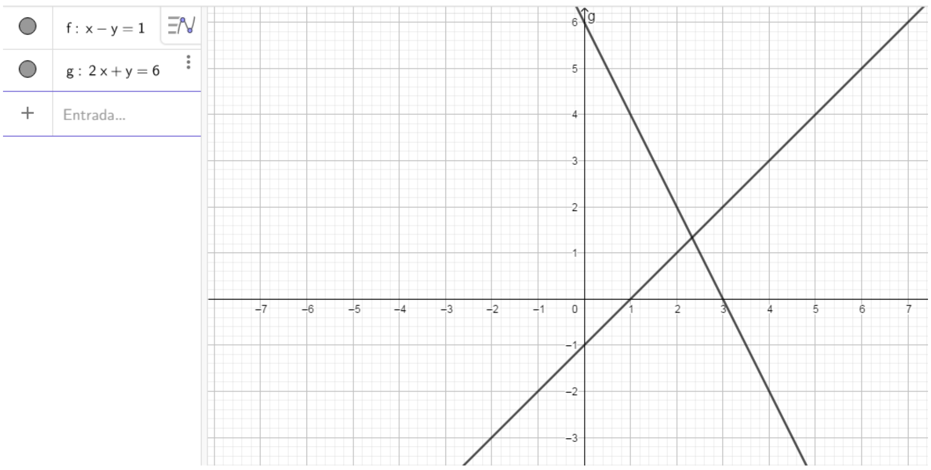
Gráfico 2

a) Qual a característica comum nos dois gráficos?
b) Cada gráfico representa um sistema de equação, quantas soluções possíveis cada um desses sistemas possui? Justifique.
c) O que caracteriza um sistema homogêneo?

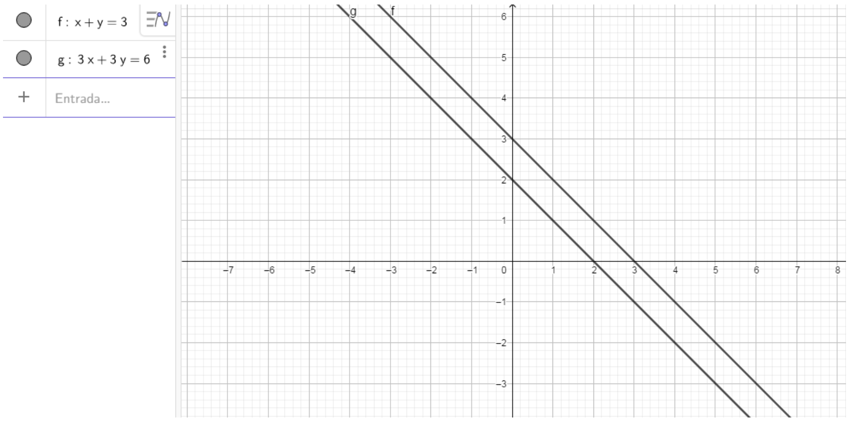
14. Análise os sistemas lineares e suas representações algébricas e geométricas.

1.1 Classificação

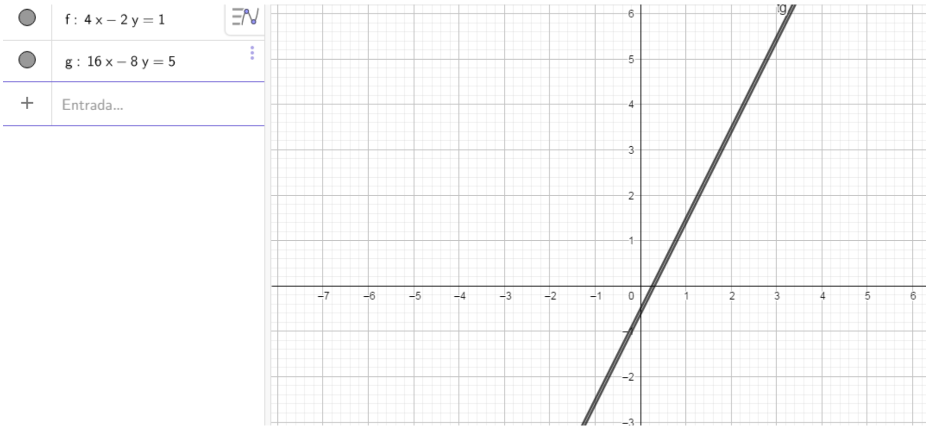
Sistema I



Sistema II



Sistema III

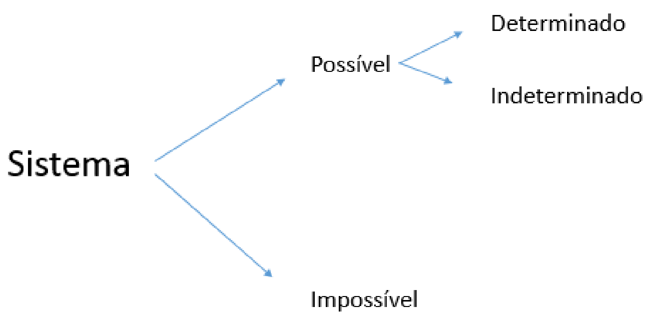


Discuta e registre suas respostas.

a) Resolva cada um dos Sistemas de Equações Lineares.

Sistema I:
Sistema II:
Sistema III:

b) Qual a relação de cada uma das soluções encontradas com a representação geométrica dos sistemas.
c) Qual a relação da resolução algébrica dos sistemas com a representação gráfica?
d) Sobre a classificação dos sistemas, explique o esquema a seguir explicitando evidencias algébricas e geométricas que levam a um determinada classificação.



15. Com base nas atividades realizadas, discuta este sistema:

$$S\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$$

1. Discuta o sistema
2. De acordo com as discussões, qual significado você atribui ao parâmetro a no comportamento de um sistema de equações lineares?

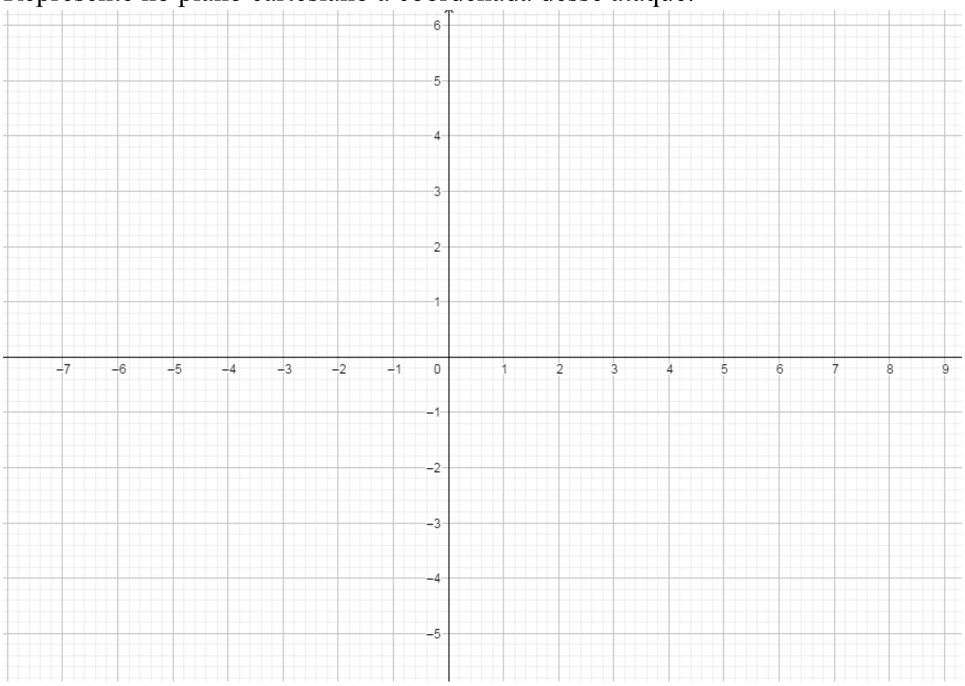
16. Num jogo virtual entre duas equipes que se confrontam, um player desenvolve uma estratégia de ataque ao seu adversário. Ele planeja lançar um ataque no cruzamento de duas estradas, sabe-se que essas vias são modeladas pelas equações 2x + y = 12 e x + y = 7.

Discuta e responda:

a) O que é necessário para esse player realizar esse ataque?

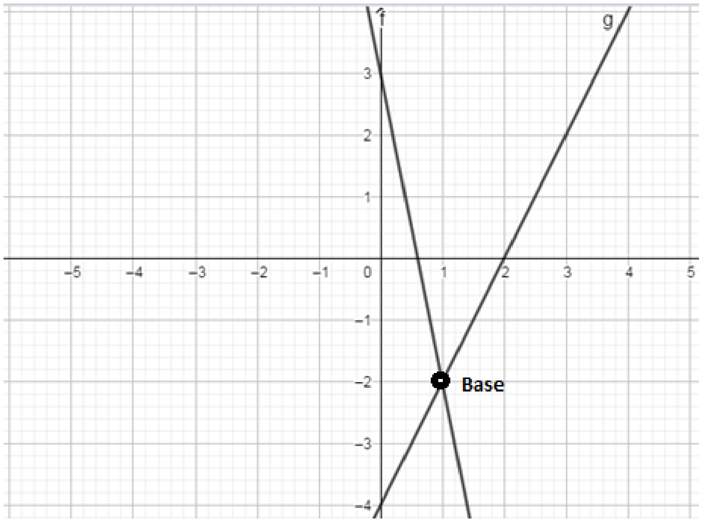
b) Qual a relação e a importância das vias (e das equações) para a solução desse problema?

c) Represente no plano cartesiano a coordenada desse ataque.



d) Com base nessas informações, apresente uma resolução algébrica que levará à coordenada de seu ataque? Qual o significado dessa coordenada?

17. No mesmo jogo, apresenta-se no mapa a seguir o local onde uma equipe construíu sua base de operações.



2. Qual o sistema de equações que representa a localização da base da equipe que foi construída?
3. O que significa a solução desse sistema de equação?

18. Um cliente fez um orçamento com uma cozinheira para comprar 10 centos de quibe e 15 centos de coxinha, e o valor total foi de R$ 680,00. Ao finalizar a encomenda, decidiu aumentar as quantidades de salgados e acabou comprando 20 centos de quibe e 30 centos de coxinha. Com isso, ele conseguiu um desconto de 10% no preço do cento do quibe e 15% no preço do cento de coxinhas, e o valor total da compra ficou em R$ 1.182,00.

Apêndice 10 – Questionário: Avaliação do Experimento

AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

I – Percepções sobre as atividades propostas

1. O que você achou das atividades propostas?
2. Quais foram suas dificuldades em realizá-las?
3. ~~O que facilita você aprender determinado conteúdo matemático?~~
4. As atividades estão relacionadas com suas aulas de matemáticas do dia a dia? Em quais aspectos? E o que não estaria relacionado?
5. ~~Como o professor/pesquisador contribuiu para o ensino desse conteúdo?~~
6. Apresente sugestões para o aprimoramento das atividades realizadas.

II – Avaliação da aprendizagem

A - Concordo Totalmente	B - Concordo Parcialmente	C – Nem Concordo Nem Discordo	D – Discordo Parcialmente	E - Discordo Totalmente

		A	B	C	D	E
1	Consigo reconhecer comparações em diversas situações do cotidiano.	①	②	③	④	⑤
2	Realizo escolhas, comparações, independente das condições dadas.	①	②	③	④	⑤

3	Quando determino uma preferência, já estabeleci uma comparação.	①	②	③	④	⑤
4	São elementos de uma comparação: desigualdades e igualdade.	①	②	③	④	⑤
5	A noção de comparação não tem nenhuma relação com a Matemática.	①	②	③	④	⑤
6	Tenho necessidade de designar uma letra para representar o valor de um objeto e registrar comparações.	①	②	③	④	⑤
7	Sempre utilizo os sinais >, < e = para estabelecer comparações.	①	②	③	④	⑤
8	Não existe diferença entre uma comparação e um relação.	①	②	③	④	⑤
9	A variável tem o mesmo significado de uma incógnita.	①	②	③	④	⑤
10	O conceito de equação envolve, essencialmente, comparações, igualdade, incógnitas e coeficientes.	①	②	③	④	⑤
11	Compreender o significado de incógnita não contribui para a resolução de uma equação.	①	②	③	④	⑤
12	As equações são compostas apenas com uma incógnita.	①	②	③	④	⑤
13	Os coeficientes são componentes de uma equação que pouco influenciam na resolução de sistemas lineares.	①	②	③	④	⑤
14	Os coeficientes traduzem as condições de uma determinada situação-problema.	①	②	③	④	⑤
15	O termo independente de uma equação é o valor que multiplica a incógnita.	①	②	③	④	⑤
16	Não consigo traduzir situações-problema presentes no meu dia-dia por meio de equações algébricas e gráficos.	①	②	③	④	⑤
17	Uma equação pode ser representada graficamente por uma reta.	①	②	③	④	⑤
18	A variável, a fluência e a interdependência compõem o conceito de equação.	①	②	③	④	⑤
19	Não consigo relacionar o conceito de Sistemas de Equações Lineares com as situações que vivo em meu cotidiano.	①	②	③	④	⑤
20	Sei resolver equações, então, sei resolver Sistemas de Equações Lineares.	①	②	③	④	⑤
21	Propriedades matemáticas me ajudam a resolver com mais eficiência sistemas de equações.	①	②	③	④	⑤
22	Resolvo com eficiência um sistema de equações, independentemente do método utilizado.	①	②	③	④	⑤
23	Em um sistema não a interdependência entre as equações.	①	②	③	④	⑤
24	Aplicativos e softwares me ajudam a entender o conceito de sistemas de equações.	①	②	③	④	⑤
25	Consigo representar graficamente um sistema de equações lineares.	①	②	③	④	⑤
26	Consigo classificar um sistema de equações com base na sua representação gráfica.	①	②	③	④	⑤
27	A solução de um sistema de equações busca responder, de forma simultânea, todas às condições de um determinado problema.	①	②	③	④	⑤
28	Relacionar situações-problema que envolve sistemas de equações com fatos presentes no meu cotidiano, pouco contribui para eu entender esse conceito matemático.	①	②	③	④	⑤
29	Consigo relacionar o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares com diferentes conhecimentos matemáticos.	①	②	③	④	⑤