

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

DJALMA GONÇALVES PEREIRA

A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DOS LOGARITMOS NA
PERSPECTIVA DE LEONID V. ZANKOV

UBERABA, MG

2020

A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DOS LOGARITMOS NA
PERSPECTIVA DE LEONID V. ZANKOV

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Uberaba, como requisito parcial para obtenção do título de doutor, sob a orientação da Profa. Dra. Marilene Ribeiro Resende.

Linha de Pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem.

UBERABA.MG

2020

Catálogo elaborado pelo Setor de Referência da Biblioteca Central UNIUBE

Pereira, Djalma Gonçalves.

P414o A organização do ensino-aprendizagem dos logaritmos na perspectiva de Leonid V. Zankov / Djalma Gonçalves Pereira. – Uberaba, 2020.

303 f. : il. color.

Tese (Doutorado) – Universidade de Uberaba. Programa de PósGraduação em Educação. Linha de pesquisa: Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem.

Orientadora: Profa. Dra. Marilene Ribeiro Resende.

1. Ensino. 2. Aprendizagem. 3. Ensino médio. 4. Logaritmos. I. Resende, Marilene Ribeiro. II. Universidade de Uberaba. Programa de Pós-Graduação em Educação. III. Título.

CDD 371.102

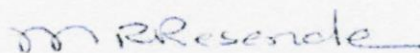
Djalma Gonçalves Pereira

A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DOS LOGARITMOS NA
PERSPECTIVA DE LEONID V. ZANKOV

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade de Uberaba, como requisito final para a obtenção do título de Doutor em Educação.

Aprovada em 04/05/2020

BANCA EXAMINADORA



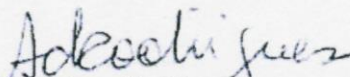
Prof.^a Dr.^a Marilene Ribeiro Resende
(Orientadora)
UNIUBE - Universidade de Uberaba.



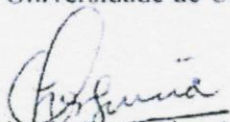
Prof.^a Dr.^a Fabiana Fiorezi de Marco
UFU - Universidade Federal de
Uberlândia.



Prof.^a Dr.^a Marisa da Silva Dias
UNESP/Bauru - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho".



Prof.^a Dr.^a Adriana Rodrigues
UNIUBE - Universidade de Uberaba.



Prof. Dr. Orlando Fernandez Aquino
UNIUBE - Universidade de Uberaba.

RESUMO

No contexto atual de mudanças no ensino médio brasileiro, de desvalorização do ensino com foco na formação de conceitos, de necessidade de organização adequada do ensino-aprendizagem da matemática, e visando ao desenvolvimento do aluno, situou-se o objeto desta pesquisa – *a organização do ensino-aprendizagem do conceito dos logaritmos na perspectiva do sistema didático de Zankov*. Insere-se o trabalho na linha de pesquisa Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba e no projeto de pesquisa intitulado “Conteúdos algébricos no ensino médio: discussões e propostas na perspectiva da teoria histórico cultural”, aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, em 2017. Tem o projeto como objetivo geral analisar as contribuições do sistema zankoviano para organização do ensino dos logaritmos, visando à apropriação desse conceito, na perspectiva do ensino desenvolvimental. Para a condução da investigação, foram definidos os seguintes objetivos específicos: analisar as propostas de ensino dos logaritmos nos documentos como Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Base Nacional Comum Curricular – BNCC e livros didáticos; descrever de forma sintética o movimento lógico e histórico do conceito dos logaritmos, visando ao seu ensino; propor e analisar os efeitos de um experimento didático formativo, na perspectiva zankoviana, desenvolvendo o conceito dos logaritmos cujo movimento lógico e histórico foi investigado. Com base nos princípios do sistema experimental de Leonid V. Zankov na perspectiva da dialética materialista e da teoria histórico-cultural, a tese retoma a relação entre a apropriação conceitual e desenvolvimento do psiquismo a partir de evidências demonstradas durante a realização das ações. Realizou-se a pesquisa em quatro etapas: a revisão de literatura, a elaboração do sistema didático experimental, o desenvolvimento do experimento e, finalmente, a análise e produção do relatório. O trabalho experimental foi realizado com seis alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular situada na cidade de Uberaba, MG. Foram planejadas e propostas três Tarefas de Estudo, realizadas em 16 encontros, definindo-se a partir delas os eixos de análise: apreensão de relações essenciais do conceito, a aplicação dinâmica dos princípios didáticos, a unidade do afetivo-cognitivo. Os resultados comprovam que a organização do ensino-aprendizagem do conteúdo “logaritmos”, com base em princípios do sistema didático zankoviano, é uma possibilidade para o desenvolvimento integral dos escolares, pois esse sistema tem como um dos pressupostos a ênfase na afetividade; no papel reitor dos conhecimentos teóricos

tratados a partir do desenvolvimento lógico e histórico dos logaritmos; no ensino a um alto grau de dificuldade; no desenvolvimento do pensamento independente dos alunos. Ao longo do desenvolvimento do experimento, fomos compreendendo que muitas das limitações da aprendizagem conceitual e do desenvolvimento psíquico dos sujeitos decorrem da falta de organização adequada do ensino, pois, para tal, é necessário o entendimento do processo de apropriação de novos conhecimentos por parte dos sujeitos envolvidos e além de investimentos na questão afetiva envolvendo aluno, professor e conteúdo. O experimento permitiu observar a ligação intrínseca entre o conceito científico, a prática escolar e a esfera afetiva dos alunos. Foi possível concluir, ainda, que o sistema didático estabelece pressupostos e diretrizes, porém não se pode desconsiderar as condições objetivas que cercam a atividade de ensino e aprendizagem, o que impede ou dificulta a sua realização.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Logaritmos. Zankov. Ensino Médio. Sistema Didático Experimental.

ABSTRACT

In the current context of changes in Brazilian High School, wherein teaching and learning focused on the formation of concepts has become devalued, and aiming for student development, the subject of this research was set – the organization of teaching and learning of the concept of logarithms in the perspective of Zankov's didactic system. Thus it falls under the line of research Professional Development, Teaching Work and the Teaching-Learning Process of the Graduate Program in Education at the University of Uberaba and in the research project entitled "Algebraic content in High School: discussions and proposals from the perspective of historical-cultural theory", approved by FAPEMIG, in 2017.

Its general objective is to analyze the contributions of the Zankovian system for the organization of logarithmic teaching, aiming at the appropriation of this concept, from the perspective of developmental teaching. To conduct the investigation, the following specific objectives were defined: to analyze the proposals for teaching logarithms in documents such as National Curriculum Parameters – (Brazilian PCN), Common National Curricular Base – (Brazilian BNCC) and textbooks; briefly describe the logical and historical movement of the concept of logarithms, with a view to their teaching; to propose and analyze the effects of a didactic formative experiment, in the Zankovian perspective, developing the concept of logarithms whose logical and historical movement was investigated. Based on the principles of Leonid V. Zankov's experimental system in the historical-cultural perspective, the thesis resumes the relationship between conceptual appropriation and the development of the psyche based on evidence. This work was accomplished in four stages: the literature review, the elaboration of the experimental didactic system, the development of the experiment and, finally, the analysis and production of the report. The experimental work was carried out with 2nd grade high school students from a private school located in the city of Uberaba, MG. Three Study Assignments were planned and applied, which constituted the units of analysis. The results prove that the organization of teaching-learning of the content "logarithms", based on principles of the Zankovian didactic system, is a possibility for the integral development of the students, since this system has as one of the assumptions the emphasis on affectivity; in the rector role of theoretical knowledge treated from the logical and historical development of logarithms; in teaching to a high degree of difficulty; in the development of students' independent thinking.

Keywords: Teaching-Learning. Logarithms. Zankov. High School. Experimental Teaching System.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Rede conceitual dos logaritmos	62
Figura 2	Trabalhos selecionados a partir dos descritores “ensino dos logaritmos” e “logaritmos”	64
Figura 3	Capa e sumário do vol. 4 de matemática	72
Figura 4	Apresentação do capítulo dos Logaritmos no Bernoulli	73
Figura 5	Capa do livro Matemática 2º grau – volume 1, Souza, Maria Helena Soares de Souza e Walter Spinelli, Matemática 2º grau – volume 1, SP: Scipione, 1996	74
Figura 6	Página de exercícios de aplicação dos Logaritmos	75
Figura 7	Capa do livro Matemática – volume 1, Kátia Cristina Stocco Smole e Kiyukawa. SP: Saraiva, 1988	76
Figura 8	Página das propriedades imediatas	77
Figura 9	Capa do livro Matemática no Ensino Médio – 1ª série / Márcio Cintra Goulart 3.ed São Paulo: Scipione, 2005	78
Figura 10	Página dos Logaritmos. Função Logarítmica	80
Figura 11	Capa do livro Matemática, uma nova abordagem – volume 1 (versão com trigonometria), José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno. SP: FTD, 2000	81
Figura 12	Página o que é logaritmo	82
Figura 13	Capa do livro volume 1 (PNLD), Joamir Roberto de. Souza SP:FTD, 2010	83
Figura 14	Capa do livro Matemática contextos e aplicações – volume 1 (PNLD), Luiz Roberto Dante. SP: Ática, 2012	85
Figura 15	Página de exemplos de exercícios e aplicações	86

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Paralelo entre o pensamento empírico e o pensamento teórico sob a perspectiva de Davidov	38
Quadro 2	Premissas do sistema didático zankoviano e o sistema para o ensino dos logaritmos	52
Quadro 2	Tarefas e objetivos	104

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tipos de abordagens dos logaritmos nos trabalhos selecionados	64
-----------------	---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABA - Associação Brasileira de Antropologia
ANPOCS - Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Ciências Sociais
BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC - Base Nacional Comum Curricular
CAAE - Certificado de apresentação para Avaliação Ética
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CONEP - Conselho Nacional de Saúde
ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais
IES – Instituição de Ensino Superior
MEC – Ministério da Educação
MMC – Máximo Divisor Comum
OA - Objetos de aprendizagem
PA – Progressão Aritmética
PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais
PG – Progressão Geométrica
PH – Potencial Hidrogênio
PISA - *Programme for International Student Assessment*
PNLD - Plano Nacional do Livro Didático
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBS - Sociedade Brasileira de Sociologia
THA - Trajetória hipotética de aprendizagem
UFC – Universidade Federal do Ceará
UEPB – Universidade Federal da Paraíba
UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
UNESP – Universidade Estadual Paulista
URSS - União das Repúblicas Socialistas Soviéticas
USP – Universidade de São Paulo
ZDP – Zona de Desenvolvimento Próximo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 O SISTEMA DIDÁTICO ZANKOVIANO: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS	27
1.1 Leonid V. Zankov e a implantação do experimento na antiga União Soviética	27
1.2 Os pressupostos e os princípios psicológicos do sistema didático de L. V. Zankov	33
1.3 Princípios didáticos de L. V. Zankov	37
1.3.1 Primeiro princípio: O papel reitor dos conhecimentos teóricos	38
1.3.2 Segundo Princípio: Ensino a um alto grau de dificuldade	40
1.3.3 Terceiro princípio: Avanço em grande ritmo	42
1.3.4 Quarto princípio: Compreensão pelos escolares do processo de estudo -	43
1.3.5 Quinto princípio: Planejamento cuidadoso das aulas para promover a aprendizagem de cada aluno em particular	44
1.4 O processo de desenvolvimento dos estudantes no sistema zankoviano	46
1.4.1 Atividades de observação, segundo L. V. Zankov	47
1.4.2 Atividade mental	49
1.4.3 Atividades práticas	51
1.5 Síntese de pontos importantes do sistema didático zankoviano e a sua relação com a organização didática de ensino proposto	52
2 LOGARITMOS: ASPECTOS HISTÓRICOS, LÓGICOS E CURRICULARES (PCN, BNCC, LDB)	54
2.1 Aspectos lógicos e históricos do conceito dos logaritmos	54
2.2 O ensino dos logaritmos em pesquisas na pós-graduação	63
2.3 O ensino dos logaritmos nos PCN e na BNCC do Ensino Médio	66
2.4 O ensino dos logaritmos nos livros didáticos	69
2.4.1 O material didático adotado pela escola, local do experimento	72
2.4.2 Análise de livros didáticos indicados para o ensino médio	74
3 O EXPERIMENTO DIDÁTICO – A METODOLOGIA DA PESQUISA	88
3.1 Retomando alguns pressupostos do experimento didático: a condução do experimento, o papel da fala e das emoções	88
3.2 A trajetória da pesquisa	99
3.3 Planejamento do experimento	102
3.3.1 O Diagnóstico	104
3.3.2 As tarefas/ações propostas e seu objetivos	104
4 A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DOS LOGARITMOS: A ANÁLISE DOS RESULTADOS DO EXPERIMENTO	108
4.1 Traçando os perfis dos participantes	108

4.1.1 Perfil dos alunos participantes	108
4.1.2 Perfil do professor colaborador	109
4.2 Análise do diagnóstico	110
4.3 Análise da Tarefa 1: o histórico	116
4.3.1 Análise da Ação 1 da Tarefa 1 – A necessidade	116
4.3.2 Análise das Ações 2 e 3 da Tarefa 1 – O processo manual e a dificuldade	118
4.3.3 Análise da Ação 4 da Tarefa 1 - Os números na atualidade	121
4.3.4 Análise da Ação 5 da Tarefa 1 – A busca por uma solução	122
4.4 Análise da Tarefa 2: o lógico	128
4.4.1 Análise da Ação 6 da Tarefa 2 – Explorando os expoentes	128
4.4.2 Análise da Ação 7 da Tarefa 2 – Explorando o logaritmo	131
4.5 Análise Tarefa 3: o conceito	137
4.5.1 Análise da Ação 8 da Tarefa 3 – O logaritmo	137
4.5.2 Análise da Ação 9 da Tarefa 3 – A função logarítmica	143
4.5.3 Análise da Ação 10 da Tarefa 3 – Compreendendo mais a fundo	146
4.5.5 Análise da Ação 11 da Tarefa 3 – A função exponencial	1499
4.6 Análise do diagnóstico final	155
CONSIDERAÇÕES FINAIS	162
REFERÊNCIAS	170
ANEXOS – MATERIAL A SER ANALISADO E INCORPORADO AO TEXTO	173

INTRODUÇÃO

A pesquisa ora apresentada insere-se na Linha de Pesquisa “Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo Ensino-Aprendizagem” e no contexto mais amplo do projeto “guarda-chuva”, intitulado “Conteúdos algébricos no ensino médio: discussões e propostas na perspectiva da teoria histórico cultural”, aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, em 2017, APQ-01914-17, coordenado pela professora Dra. Marilene Ribeiro Resende. Toma como objeto de estudo a organização do processo ensino-aprendizagem dos logaritmos a partir de pressupostos de Leonid V. Zankov.

No contexto atual de mudanças no ensino médio brasileiro, de desvalorização do ensino com foco na formação de conceitos, de necessidade de organização adequada do ensino-aprendizagem da matemática, visando ao desenvolvimento do aluno, contexto que descreveremos com mais detalhe a seguir, situamos o objeto desta pesquisa – *a organização do ensino-aprendizagem do conceito dos logaritmos na perspectiva do sistema didático de Zankov*.

Ao ingressar na escola, o sujeito é inserido em um universo no qual suas capacidades, ainda em desenvolvimento, serão estimuladas e aprimoradas. A escola é o lugar onde a apropriação da cultura é intencional e estruturada, buscando levar o sujeito ao desenvolvimento de suas funções psicológicas superiores com vista a tornar-se um membro criativo e produtivo da sociedade.

Esse desenvolvimento das funções psíquicas superiores, que ocorre, inicialmente, no plano interpsicológico, e, depois no intrapsicológico tem na escola um espaço propício, pois, nela, as relações sociais se intensificam. Vigotski (1993), em sua lei genética geral do desenvolvimento cultural, explica o desenvolvimento nestes dois planos – o interpsicológica e o intrapsicológico.

Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, memória, lógica, formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (VIGOTSKI, 1993, p.163).

Essa lei vigotskiana tem um caráter seminal, pois formula os pressupostos do desenvolvimento humano numa outra perspectiva, estabelecendo que a sua origem se dá no social, no interpsicológico, para depois ser internalizado num movimento que modifica o indivíduo e também o objeto para si. Essa lei está na base da Teoria Histórico-Cultural, da qual um dos precursores é Vigotski.

Assim, ao assumirmos a escola como local onde a apropriação da cultura é intencional, afirmamos que ela atua na ativação das relações sociais citadas por Vigotski, que, segundo ele, estão na origem de “todas as funções psíquicas superiores”. Lembrando que se essas funções aparecem duas vezes, ou em dois planos, sendo um deles o social, a escola é essencial para a ativação destes planos. Neste sentido, a escola é um espaço especial de humanização do homem.

Na escola ocorre um tipo de relação social que é intencional, na qual a mediação¹ ocupa papel fundamental, visto que a passagem de um plano a outro não se dá de forma direta, mas de forma mediada. A mediação ocorre por meio de instrumentos e de signos, dos quais a linguagem tem papel fundamental. A escola, o professor e o material didático podem se tornar elementos mediadores no processo de ensino-aprendizagem-desenvolvimento do aluno, interferindo intencionalmente nos planos interpsicológico e intrapsicológico de desenvolvimento cultural do homem.

A linguagem, instrumento mediador, é um dos elementos mais importantes nessa interação/mediação escolar e impõe-se como necessidade social do ser humano. A criança, em certo ponto de sua vida e convívio social, sente a necessidade de se comunicar, primeiramente por meio da fala e, em seguida, por meio da escrita. No campo do ensino da matemática, a linguagem matemática, em especial a linguagem algébrica, um elemento mediador importante para a compreensão do mundo e da ciência, enfrenta problemas quanto ao seu uso e compreensão, dentro e fora da escola, dadas as suas características e relações com os objetos matemáticos.

Não se pode desconsiderar que há nesse contexto um problema histórico de ensino-aprendizagem, pois se convive com a representação de que a matemática escolar

¹ Vigotski teve como finalidade em seus trabalhos, edificar uma psicologia que contribuiu para uma pedagogia no quadro teórico-epistemológico do marxismo. Para isso, usou como exemplo a metáfora do conceito de trabalho em Marx, que deu origem ao conceito de mediação. O processo de mediação, por meio de instrumentos e signos, é fundamental para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, distinguindo o homem dos outros animais. A mediação é um processo essencial para tornar possível as atividades psicológicas voluntárias, intencionais, controladas pelo próprio indivíduo.

é o conteúdo mais difícil. Essa realidade indica a necessidade de investimentos nos processos de ensino-aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino, assim como em pesquisas, que possam trazer maior efetividade a esses processos, de modo a contribuir para o desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores e para o desenvolvimento do pensamento teórico, indispensáveis à humanização do homem.

Na escola, para que a aprendizagem ocorra e, com ela, o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, é necessária a organização adequada do ensino, ou seja, uma organização que tenha pressupostos epistemológicos e didáticos claros e coerentes. Vigotski (1998) afirma que a aprendizagem não implica necessariamente em desenvolvimento, mas a organização de forma adequada é requisito necessário para que isso ocorra.

No contexto da escola, no século XXI, cabe ponderar que a organização do ensino-aprendizagem e, conseqüentemente, os processos de desenvolvimento do sujeito, que ocorrem nos dois planos já citados, não podem ignorar que vivemos em um mundo em que a difusão de informações e conhecimentos acontece de maneira cada vez mais acelerada e independente do ambiente escolar. Boa parte disso se dá em consequência dos avanços científicos e tecnológicos. Esses, por sua vez, nos têm apresentado novos desafios à prática educacional e pedagógica, que visa à participação do sujeito como ser social e transformador do meio.

Essa necessidade de organização adequada da aprendizagem da matemática, visando ao desenvolvimento do aluno, é um dos desafios que levou à realização desta pesquisa, relacionada ao ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Médio.

Pode-se começar refletindo sobre o esforço consciente do trabalho docente para promover a apropriação e/ou transformação do sujeito em um sujeito autônomo, comprometido com a sociedade em que vive, como cidadão do mundo. Entretanto, é preciso admitir que, tratando-se do ensino de matemática historicamente, a promoção e/ou transformação do sujeito nem sempre tem alcançado êxito. Muitos são os alunos marcados por desempenho insatisfatório, o que inibe, certamente, o desenvolvimento intelectual e pessoal, gerando, inclusive, medo e angústia, provocados pelo mau desempenho. Resultados insatisfatórios são observáveis nas avaliações sistêmicas, como no *Programme for International Student Assessment* (PISA), no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), dentre outras, nas quais os índices alcançados em matemática são insatisfatórios.

Em um cenário educacional crítico, não só no ensino de matemática, mas no ensino em geral, no Brasil, neste final das duas primeiras décadas do século XXI, emergem mudanças constantes nas políticas públicas para a educação, especificamente para o Ensino Médio. Dentre elas, a homologação da Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, que institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Essa lei altera a organização curricular do ensino médio que será composta pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que serão ofertados de acordo com o contexto e a possibilidade dos sistemas de ensino. São eles: I) linguagens e suas tecnologias; II) matemática e suas tecnologias; III) ciências da natureza e suas tecnologias; IV) ciências humanas e sociais aplicadas; V) formação técnica e profissional. Estabelece, ainda, que apenas o ensino de língua portuguesa e o de matemática serão obrigatórios nos três anos do ensino médio.

Muitas críticas foram feitas a essas mudanças por associações científicas, por pesquisadores como pelas comunidades escolares. Dentre elas, as apresentadas em Nota Pública pela revogação da referida Lei e das propostas da BNCC (2018), pelo Comitê do Ensino Médio da Sociedade Brasileira de Sociologia (SBS), pela Associação Brasileira de Ensino de Ciências Sociais (ABECS); pela Comissão de Educação, Ciência e Tecnologia da Associação Brasileira de Antropologia (ABA); pela Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Ciências Sociais (ANPOCS), indicando: a destruição do Ensino Médio em seu caráter universalizante, como última etapa da Educação Básica no Brasil; o esvaziamento das disciplinas escolares, sobretudo das áreas de humanas, importantes para a compreensão crítica da realidade; a possibilidade de existência de uma “escola pobre para os pobres”, na medida em que não há a obrigatoriedade de oferta dos itinerários formativos em todas elas. Esses são riscos com os quais concordamos e que estão postos, embora esteja lento o movimento de implantação dessa reforma.

Podemos dizer que há contradições que dificilmente serão superadas, caso essa Lei vigore. Por exemplo, no Art. 35-A, nela acrescido, no inciso 7º, está proposto que “Os currículos do ensino médio deverão considerar a formação integral do aluno, de maneira a adotar um trabalho voltado para a construção de seu projeto de vida e para sua formação nos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais”. Porém, reduzindo os conteúdos escolares e, conseqüentemente, a oportunidade de apropriação de conceitos teóricos, os alunos, sobretudo os de classes sociais menos favorecidas, terão diminuídas as suas chances de desenvolvimento e de humanização, que poderiam ocorrer pelo

desenvolvimento do pensamento teórico. As escolas particulares certamente serão cautelosas nas suas reformulações, procurando garantir uma educação básica de qualidade.

No contexto de mudanças, propõe-se a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que define as “aprendizagens essenciais” (BRASIL, 2018, p. 7) que todos os alunos da Educação Básica devem desenvolver, homologada em dezembro de 2018. Os seus fundamentos pedagógicos têm foco nas competências, embora contraditoriamente apresente o compromisso com a educação integral.

Ao tratar da matemática no Ensino Fundamental, a BNCC propõe relacionar as observações empíricas a representações, as induções e conjeturas e a resolução de problemas. Em relação à matemática no Ensino Médio, são destacadas habilidades relativas aos “processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas”. (BRASIL/MEC BNCC, 2018, p. 529). Há, ainda, referências às competências de raciocinar, representar, comunicar e argumentar.

Nesse trecho, e, em diversos outros do documento, percebe-se o entendimento da matemática como instrumento de resolução de problemas, um sentido pragmático e utilitário, incentivando, de certo modo, um esvaziamento da matemática como meio de transformação do pensamento lógico dedutivo e científico.

Não podemos desconsiderar que há uma tendência de um discurso de esvaziamento do currículo escolar, criticado por muitos estudiosos da área, dentre eles o pedagogo Newton Duarte (2016), que em sua obra de 2016, intitulada “Os conteúdos escolares e a ressurreição dos mortos”, traz as contribuições da teoria histórico-crítica para essa discussão. Neste livro, Duarte destaca, dentre outras reflexões, a importância e o papel da mediação do professor no processo intencional e sistemático de ensino, que detém, em sua essência, as tarefas da educação escolar. Segundo Saviani (2008, p. 20), essas tarefas são:

- a) Identificação das formas mais desenvolvidas em que se expressa o saber objetivo produzido historicamente, reconhecendo as condições de sua produção e compreendendo as suas principais manifestações, bem como as tendências atuais de transformação.
- b) Conversão do saber objetivo em saber escolar, de modo que se torne assimilável pelos alunos no espaço e tempo escolares.
- c) Provimento dos meios necessários para que os alunos não apenas assimilem o saber objetivo

enquanto resultado, mas apreendam o processo de sua produção, bem como as tendências de sua transformação. (SAVIANI, 2008, p.20)

As tarefas escolares apresentadas por Saviani, nas quais incluímos o ensino-aprendizagem de matemática, nos esclarecem que há um conhecimento científico, produzido historicamente em determinadas condições; porém esse conhecimento precisa ser convertido em saber escolar, que o torne ensinável/assimilável pelos alunos, também situados num tempo e lugar escolar. Essas tarefas incluem a organização de meios que enfatizem não apenas o produto, mas também o processo de produção e de transformação desse conteúdo. Essa perspectiva vai em um sentido diferente de propostas que enfatizam a aplicação imediata dos conhecimentos, desconsiderando os conceitos científicos que as sustentam.

A escola é espaço de humanização pela apropriação da cultura. É local de apropriação do conhecimento científico pelas novas gerações, pois a escola é o lugar onde o conhecimento historicamente acumulado é transferido com a intencionalidade de perpetuação da espécie como ser pensante e ativo no mundo. Por isso, a decisão do que ensinar na escola envolve relações de passado, presente e, conseqüentemente, de futuro.

Entretanto, como afirma Newton Duarte (2016), apoiado em Saviani (2008), vivemos em um mundo de obsolescência programada do conhecimento. Com a desculpa de que milhões de *terabytes* de dados de informações estão armazenados, o homem tende a arriscar na renúncia de seu direito de aprender, conhecer e, conseqüentemente, de ser. Com a intenção de resistir a este processo que pode ser deformador, a escola deveria, com seu currículo, trazer esperança através da preservação do conhecimento produzido historicamente pelo homem; mas, ao contrário, quando o faz é atacada, sendo tachada como aquela que só se preocupa com a reprodução dos conteúdos e despreza aquele que aprende, o aluno.

Assumimos que o saber produzido historicamente pelo homem no processo de transformação da vida e de suas características, provê os meios necessários para que o aprendiz se situe no mundo e estabeleça com ele um elo que o humanizará, fazendo com que seja um elemento transformador de sua vida e da comunidade onde está inserido. Sendo assim, o currículo escolar precisa prever a presença desses conhecimentos e não omiti-los, por não serem considerados conteúdos de aplicação imediata. Os conteúdos escolares podem ser apresentados aos estudantes de forma que provoquem sentimentos positivos e estimulantes, capazes de gerar necessidades nos estudantes, condição para que

esse entre em atividade, ou seja, para que exerçam seu protagonismo no processo de ensino-aprendizagem.

Atuando há 16 anos como professor de Matemática e há 3 anos como coordenador pedagógico em consequência da transição de cargos, percebo uma profunda mudança na maneira como compreendemos os alunos e a educação. As relações e vínculos que se constituem entre coordenação, professores, alunos e família, foram percebidos como mais profundos, e, ao mesmo tempo mais abrangentes, fazendo com que sua preocupação fosse acentuada para determinados aspectos, antes ignorados ou minimizados.

Assim, na posição de coordenador pedagógico, tornava-se ainda mais inconcebível que um conteúdo importante como o dos logaritmos, fosse tão desprivilegiado no cotidiano escolar, ficava evidente a necessidade de procurar soluções didático-pedagógicas que pudessem auxiliar e orientar os professores em sua prática com os logaritmos e consequentemente com outros conteúdos.

Essa importância é ressaltada por Lima (2004, p. 191) quando afirma que:

O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logarítmica continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações. Essa importância é permanente; jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da exponencial (portanto equivalente a ela), a função logarítmica está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado. (LIMA, 2004, p. 191)

Simultaneamente, sendo motivo de inquietação a rejeição dos alunos pelos logaritmos e praticamente por todos os conteúdos matemáticos. Tais inquietações moveram o pesquisador na busca por aspectos que pudessem auxiliar na superação dos desafios apresentados.

Neste trajeto, defendemos o ensino da matemática e, especificamente, o ensino dos logaritmos, objeto desta pesquisa, como conteúdo que pode favorecer a humanização no currículo escolar do ensino médio, por fazer parte da evolução histórica do homem, sendo uma ferramenta importante para desenvolvimento de tecnologias e trabalho com números muito pequenos ou muito grandes.

Como organizar, todavia, o ensino dos logaritmos nos dias atuais, despertando o interesse dos aprendizes para sua importância e aplicabilidade, sem descartar sua história, o seu desenvolvimento lógico e histórico, e a própria tecnologia pela qual ele foi

responsável pelo surgimento e difusão? Essa foi, também, uma necessidade que nos moveu para a pesquisa. Assim, neste trabalho, testamos uma possível maneira de enfrentamento da situação descrita com investimento na organização do ensino-aprendizagem dos alunos, de seus conhecimentos e habilidades de maneira mais efetiva, embasada no referencial teórico de Leonid Vladimirovich Zankov, que, por sua vez, apoia-se em Lev Semionovitch Vigotski e em Sergei Leonidovich Rubinstein, na perspectiva dialética-materialista.

Leonid Vladimirovich Zankov (1901-1977) foi um psicólogo soviético que desenvolveu um dos sistemas didáticos implantados longitudinalmente na ex-União Soviética, fundamentado nas teorias vigostskianas e na perspectiva do Ensino Desenvolvimental. No sistema zankoviano, são valorizadas as esferas da emoção e da vontade no desenvolvimento do pensamento, visando ao desenvolvimento integral da criança. Trata-se de um sistema didático que não apenas integra pessoas e expressa os conceitos relacionados ao conteúdo a ser estudado, mas que viabiliza o desenvolvimento integral do aluno. São seus princípios: o papel diretor dos conhecimentos teóricos; o ensino a um alto grau de dificuldade; avanço em grande ritmo; compreensão pelos escolares do processo de estudo; planejamento cuidadoso das aulas para promover a aprendizagem de cada aluno em particular

Com o objetivo de situar a problemática, realizamos, ainda, no período de novembro de 2016 a abril de 2017, um levantamento das produções, teses e dissertações, referentes ao ensino-aprendizagem dos logaritmos, a fim de verificar o estado do conhecimento em relação a essa questão.

Consultamos o Catálogo de Teses e Dissertações (CAPES), a biblioteca do BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) que indicou produções referentes ao tema pesquisado principalmente nos seguintes lugares: Banco de Teses da USP, Domínio Público, Biblioteca Digital da UFMG, Biblioteca Digital da UFMS, Repositório UNESP, Repositório UFC e Banco de Teses da UEPB. Realizando a busca, com os descritores “ensino dos logaritmos” e “logaritmo”, de estudos que tivessem sido produzidos no período de 2005 a 2016, encontramos um total de 243 teses e dissertações. Desses trabalhos, foram selecionados 41 que tinham como objeto o ensino dos logaritmos, sendo 40 dissertações e uma tese.

Dos 41 trabalhos selecionados, 36 são dissertações produzidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 4 em programas

de pós-graduação acadêmicos, e um não possui essa informação. Observamos que há poucas teses tratando a temática, além disso, nenhum dos trabalhos se desenvolveu como um experimento de ensino, fundamentado na perspectiva do Ensino Desenvolvimental da Atividade, apoiado no referencial de L. V. Zankov, o que traz à pesquisa, que ora apresentamos, certo ineditismo, como também relevância científica e social, pois poderá trazer uma forma de abordagem que privilegie o desenvolvimento do pensamento teórico, e, conseqüentemente, do sujeito que aprende, de forma integral.

Assim, este trabalho busca valorizar o ensino da matemática, mais precisamente no campo da álgebra, o estudo dos logaritmos, utilizando os princípios do sistema zankoviano de ensino como metodologia. Ao falar de ensino, é imprescindível pensar a sua organização, pois é ela delineada a partir de pressupostos teóricos e de concepções acerca do papel da escola e do ensino-aprendizagem, a partir das quais se definirão os objetivos a serem alcançados, as ações e as tarefas do professor e do aluno, visando a um “desenvolvimento geral ótimo”, como proposto por L. V. Zankov.

Destacamos ainda que a escolha do conteúdo “logaritmos” se deu por sua cientificidade, importância histórica, tecnológica, e por nossa experiência como professores de matemática. Tal experiência nos leva a reconhecer que o conteúdo dos logaritmos é muito importante para modelar o pensamento matemático e os eventos da natureza, porém é insistentemente rejeitado pelos alunos.

No artigo de Carvalho (2015, p.2), o autor afirma que:

Durante os últimos anos de atividade no magistério, observou-se que os alunos da 1ª série do Ensino Médio, tem enorme dificuldade de compreender os conceitos de logaritmos. Após uma análise mais detalhada, pode-se constatar que o aluno muitas vezes apenas memoriza os conceitos algébricos e definições sem conseguir estabelecer um sentido ao que está sendo estudado. Tal situação configura uma das principais causas do baixíssimo índice de aprendizagem dos logaritmos. (CARVALHO, 2015, p.2)

Temos também, Oliveira (2005), que, em sua dissertação de mestrado, confirma nosso argumento quando declara a existência de dificuldades que, direta ou indiretamente, influenciavam o processo de aprendizagem do conceito de logaritmos. Indicando como sendo as principais dificuldades o entendimento da matemática como uma ciência estática; a matemática como uma disciplina que está ao alcance apenas de pessoas com inteligência acima do normal; e com maior destaque para o entendimento de

que a forma como o conteúdo de logaritmos é transmitido não tem nenhum sentido a não ser trazer complicações em termos matemáticos. O autor destaca que:

Em nossa prática, os alunos apresentavam uma grande dificuldade em compreender as operações envolvidas na aprendizagem do conceito de logaritmos, para os mesmos era apenas um conteúdo de difícil entendimento, não conseguiam fazer relações práticas com esse conteúdo. (OLIVEIRA, 2005, p.12)

Ainda, temos Cedro (2014, p. 17) que nos aponta para as dificuldades existentes no ensino da álgebra de modo geral, quando afirma que:

Nessa perspectiva, não é de se estranhar que a álgebra, conhecimento científico teórico, um dos grandes ramos da matemática, seja um dos maiores empecilhos para que nossos jovens passem pela escola sem reprovações ou sem dificuldades na compreensão das ideias matemáticas, ou seja, constitua-se como uma das fontes principais da alienação dos estudantes perante o processo de aprendizagem da matemática, uma vez que parece estar completamente dissociada da prática social. (CEDRO, 2014, p. 17)

Assim, cabem muitas questões, num cenário em que: 1) as políticas públicas educacionais buscam os seus pressupostos nos ditames do capitalismo, no qual a obsolescência dos produtos é programada, chegando, inclusive, à obsolescência dos conteúdos escolares; 2) vislumbra-se o esvaziamento do ensino médio como etapa da educação básica; 3) a proposta de ensino de matemática tende a valorizar a sua utilidade e não as suas possibilidades para o desenvolvimento do ser humano; 4) há a necessidade de organização adequada da aprendizagem da matemática, visando ao desenvolvimento do aluno;

Porém, também, um cenário em que identificamos movimentos de contraposição, com pesquisadores brasileiros trabalhando na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, da Teoria da Atividade, da Teoria da Atividade de Estudo, enfim, no campo do Ensino Desenvolvimental, buscando compreender os seus fundamentos e aplicá-los ao ensino-aprendizagem no nosso país, principalmente no campo da educação matemática, sem deixarmos de considerar outras contribuições fundamentadas em outras bases teóricas.

Dentre as questões que podem ser postas neste contexto, levantamos a que norteou esta pesquisa: *Quais as contribuições de uma organização do ensino dos*

logaritmos com base em princípios do sistema didático zankoviano e no movimento lógico e histórico desse conceito, visando a sua apropriação pelos alunos?

Deste modo, definimos como objetivo geral desta pesquisa: *analisar as contribuições do sistema zankoviano para organização do ensino dos logaritmos, visando à apropriação desse conceito, na perspectiva do ensino desenvolvimental.*

Para a condução da investigação, definimos os seguintes objetivos específicos: 1) analisar as propostas de ensino dos logaritmos nos documentos como Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Base Nacional Comum Curricular – BNCC e nos livros didáticos; 2) descrever, de forma sintética, o movimento lógico e histórico do conceito dos logaritmos, visando ao seu ensino; 3) propor e analisar os efeitos de um experimento didático formativo, na perspectiva zankoviana, desenvolvendo o conceito dos logaritmos cujo movimento lógico e histórico foi investigado.

Deste modo, defendemos a hipótese de que a organização do ensino-aprendizagem do conteúdo “logaritmos”, com base em princípios do sistema didático zankoviano, é uma possibilidade para o desenvolvimento integral dos escolares, pois esse sistema tem como um dos pressupostos a ênfase na afetividade, nas relações aluno-professor e aluno-conteúdo, no papel reitor dos conhecimentos teóricos. Além disso, com esse ensino, esperamos que seja possível a superação do desinteresse e desânimo em relação aos conteúdos escolares, auxiliando inclusive na autoestima dos alunos.

Como método de investigação, esta pesquisa se baseia em Zankov (1984) que afirma: “[...] o objetivo da pesquisa é demonstrar a lógica pedagógica objetiva, pois, à primeira vista, parece estar em conflito com a existência de determinados objetivos e tarefas no processo didático.” Visto que a lógica objetiva expressa, em certa ordem, uma relação causal entre fenômeno e processo que definem a realidade objetiva. O experimento didático-formativo é a metodologia de pesquisa e envolve, segundo Aquino (2017), quatro etapas: a revisão de literatura, a elaboração do sistema didático experimental, o desenvolvimento do experimento e, finalmente, a análise e produção do relatório.

Na pesquisa bibliográfica, constatamos, ainda, poucas referências sobre o sistema didático zankoviano traduzidas para a língua portuguesa, o que demandou esforços no sentido de apreender as justificativas, os pressupostos filosóficos e psicológicos, os princípios didáticos e a forma de planejamento e execução das atividades pelos alunos. Também foi necessário pesquisar os aspectos lógicos e históricos do conceito dos

logaritmos, objeto matemático da investigação. Essa revisão bibliográfica, primeira etapa do experimento, está presente nos capítulos 2 e 3.

Realizamos, também, a pesquisa de aspectos ligados a questões curriculares e didáticas do ensino dos logaritmos, que incluiu a análise de sete livros didáticos adotados no Ensino Médio e de propostas oficiais de ensino da matemática – PCN e BNCC. Essa pesquisa documental culminou com a produção do capítulo 3 e visou o conhecimento e a compreensão da abordagem utilizada pelos autores para o ensino dos logaritmos no decorrer dos últimos anos e a sugerida pelos documentos.

Para garantir os aspectos éticos da pesquisa, o projeto foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa com seres humanos da Universidade de Uberaba, antes da pesquisa de campo, tendo sido aprovado, sob o CAAE nº 90460318.5.0000.5145. Para garantir a confidencialidade dos dados pessoais, assim como resultados individuais, os alunos foram identificados por códigos, conforme previsto nas Resoluções 466/12 e 510/16 da Conselho Nacional de Saúde – CONEP.

O experimento foi realizado em um Colégio privado situado na cidade de Uberaba, o qual oferece todo o segmento da Educação Básica, e cuja diretora autorizou a pesquisa. Participaram 6 alunos do 2º ano do Ensino Médio. Tal escola foi utilizada porque oferece condições adequadas e necessárias ao experimento, tais como, autorização da direção da escola, alunos e pais que autorizaram sua participação, professor que se interessou e autorizou sua participação, espaço físico e horários disponíveis para a aplicação do experimento, além de estrutura de plano curricular que contempla o assunto proposto, no caso, os logaritmos. Destacamos que outras escolas foram procuradas, dentre públicas e privadas, mas nenhuma apresentou o conjunto de condições necessárias para a aplicação do experimento.

Assim, foram elaboradas tarefas de estudo, como um sistema didático que não apenas integra pessoas e expressa os conceitos relacionados ao conteúdo a ser estudado, mas também como um arcabouço de recursos que viabiliza o desenvolvimento integral do aprendiz, como afirma próprio Zankov (1984), que acontece na qualidade da interação com o mundo.

Esperamos, ainda, que esse estudo, do ponto de vista científico, possa contribuir para uma aprendizagem que promova a apropriação do conceito de logaritmo e que possa “despertar o pensamento independente, inquieto, ligado a emoções vivas”. (ZANKOV, 1984, p. 62). A contribuição social deste trabalho está na utilização dos

princípios didáticos e metodológicos na organização de atividades, as quais poderão subsidiar a organização de currículos, o planejamento do ensino deste tema e a formação continuada de professores. Traz uma possibilidade de contribuição para o campo da educação matemática, como um trabalho que se somará aos esforços do coletivo de pesquisadores desse campo.

O relatório de pesquisa resultante está organizado em quatro capítulos. Na Introdução, situamos a problemática da organização do ensino do conceito dos logaritmos, o estado do conhecimento da questão a ser investigada, o objetivo geral, os objetivos específicos e indicativos da relevância do estudo.

No primeiro capítulo, intitulado *O sistema didático zankoviano: fundamentos teóricos e metodológicos*, tratamos do sistema zankoviano, seus fundamentos, a implantação do experimento na antiga União Soviética, destacando os pressupostos e princípios psicológicos, dando ênfase nos princípios didáticos que nortearam o sistema de L. V. Zankov, e, conseqüentemente o nosso, encerrando com a apresentação dos fundamentos para análise do desenvolvimento dos estudantes. No segundo capítulo, apresentamos os logaritmos e seus aspectos históricos, lógicos e curriculares, a partir da pesquisa bibliográfica e a consulta aos documentos oficiais bem como aos livros didáticos adotados nas três últimas décadas. No terceiro capítulo, trazemos o método, apresentando os fundamentos e explicando o planejamento do experimento, como se pensou a análise dos dados e as ações e os pontos de limitação do modelo frente à realidade do momento histórico e social de sua aplicação em 2019. E, por fim, a análise do experimento, que procura, a partir dos princípios Zankovianos, reproduzir o processo de ensino-aprendizagem e o desenvolvimento pessoal integral de cada estudante.

Podemos destacar que, diante dos resultados encontrados, a partir deste trabalho de pesquisa, vivenciamos um processo de aprendizagem que envolveu aspectos intelectuais e emocionais que foram mobilizados durante todo o percurso. Podemos acrescentar também que adquirimos novos instrumentos e processos mediadores, enriquecendo nossa atuação profissional e revelando a pesquisa como uma atividade formadora. Assim como o trabalho de organização das tarefas e do processo de mediação, ampliaram a potencialidade de abordagem com foco na formação dos conceitos, tornando nosso olhar sobre os fenômenos educativos mais afetivos e humanos.

1 O SISTEMA DIDÁTICO ZANKOVIANO: FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresentamos com base na obra de Leonid V. Zankov, *La enseñanza y el desarrollo*, publicada em 1975 na URSS, traduzida para o espanhol pela Editorial Progreso, de Cuba, em 1984, e nas produções em língua portuguesa (AQUINO, 2013; PUENTES e AQUINO, 2018; GUSEVA², 2017), os pressupostos teóricos e metodológicos do sistema didático zankoviano. Consideramos importante apresentar essa síntese teórica do sistema didático de L. V. Zankov, pois essa se constituiu em momentos/instrumento mediador para os pesquisadores no movimento desta pesquisa, por se tratar de um trabalho experimental, que pode ser pioneiro nessa perspectiva. Tais pressupostos também auxiliam os leitores, no sentido de lhes propiciar elementos para a reflexão sobre o realizado, pois o sistema zankoviano é pouco conhecido no Brasil.

1.1 Leonid V. Zankov e a implantação do experimento na antiga União Soviética

Leonid Vladimirovich Zankov (1901-1977), psicólogo soviético, frequentador do círculo de L. S. Vigotski, foi o responsável por uma relevante pesquisa científica na antiga União Soviética, onde questionou as informações teóricas dos manuais pedagógicos, afirmando que a escola não só poderia fornecer conhecimento, mas também desenvolver os alunos de maneira integral. L. V. Zankov especializou-se na psicologia da memória, na defectologia³ e na pesquisa e prática educacional. Foi o autor de uma das teorias educacionais mais proeminentes, o sistema didático desenvolvimental zankoviano (1957-1977). Formado pelo Instituto de Psicologia de Moscou, no final da década de 1920, iniciou sua carreira acadêmica como pesquisador do Instituto Experimental de Defectologia de Moscou. No período de 1944 a 1947, L. V. Zankov atuou como diretor do mesmo instituto. Já, em 1942, defendeu sua tese de doutorado sobre o tema da “psicologia da memória”, e, em 1945, foi eleito membro correspondente da Academia de Ciências Pedagógicas – da República Socialista Federativa Soviética da Rússia. Foi membro pleno da Academia de Ciências Pedagógicas da URSS no período de 1951 a

² Liudmila Grigorievna Guseva é autora de artigos que tratam do sistema zankoviano onde cita trechos de obras do autor as quais não foram traduzidas do Russo.

³ Defectologia – área da psicologia pedagógica, que estuda o desenvolvimento e a aprendizagem de crianças com algum tipo de deficiência. Vygotsky foi um de seus precursores e sua proposta estava baseada no trabalho das potencialidades das crianças.

1955, e Diretor do Instituto Científico da Teoria e História da Pedagogia sob a égide da Academia de Ciências Pedagógicas.

De acordo com Aquino (2013) e Puentes & Aquino (2018), L. V. Zankov é um dos precursores de uma nova didática, a partir de pressupostos de L. S. Vigotski, desenvolvendo pesquisas e um sistema didático experimental, aplicado longitudinalmente na antiga União Soviética. Esse não foi o único sistema que se originou das teses vigotskianas, pois paralelamente ao sistema zankoviano, desenvolveram-se outros como o de Galperin-Talízina e o de Elkonin-Davidov, que possuem a matriz teórica comum, apresentam particularidades na concepção e realização. Escolhemos o sistema zankoviano por ser pouco conhecido no Brasil e por sua preocupação declarada com a afetividade nas relações de ensino-aprendizagem, o que tem chamado a atenção deste pesquisador. As suas contribuições estendem-se ao campo da defectologia e ao estudo da memória, porém, Aquino (2013) destaca a sua grande contribuição no campo da didática desenvolvimental, ao executar experimentos didáticos de longa duração.

L. V. Zankov realizou com seus colegas da Academia de Ciências Pedagógicas da Rússia no começo da década de 1950, um estudo onde compararam as aulas expositivas com as aulas que faziam uso de recursos visuais. Foram envolvidas na pesquisa 25 escolas de ensino fundamental e o resultado inesperado desse estudo foi que o desenvolvimento dos alunos foi surpreendentemente lento, em ambas as abordagens. Na continuidade do estudo percebeu-se que contribuíam para esse resultado o escopo limitado do currículo e a prática monótona da repetição (GUSEVA, 2017).

Com esse resultado, a equipe de L. V. Zankov desenvolveu programas escolares, materiais, currículos e livros didáticos baseados nos princípios didáticos zankovianos. Como resultado, tiveram que “muitas técnicas e metodologias de ensino para áreas específicas foram alteradas e muitos novos métodos de ensino foram desenvolvidos” (ZANKOV, 1984, p. 8 apud GUSEVA, 2017, p. 238).

O sistema foi implantado por etapas. A primeira experiência foi realizada por meio de projeto piloto em uma única sala, numa escola de ensino elementar, em Moscou, onde foi criado um laboratório pedagógico, para que os pesquisadores pudessem acompanhar a sala experimental. No início dos anos de 1960, já atingia mais de 20 escolas urbanas e rurais, pois L. V. Zankov e seu grupo achava que o experimento deveria ser realizado em condições que variavam. Um ano depois, esse número chegara a 100 salas, com o apoio oficial. Em 1966-67, eram mais de 1200 salas em diferentes repúblicas e

territórios da antiga União Soviética. A implantação envolveu a preparação dos professores, a produção de manuais experimentais e livros de consulta para os mestres.

Apesar de bons resultados, o sistema zankoviano foi retirado da maioria das escolas em 1969. Uma das principais provas do sucesso do método era a superioridade dos alunos que haviam participado do método em sua formação frente aos que não o participaram. As evidências indicavam que o modelo de L. V. Zankov havia produzido resultados abrangentes e eficazes frente ao ensino tradicional.

Mas por que o sistema zankoviano não foi difundido e permaneceu como método de ensino depois de ter apresentado todos estes ganhos? Segundo Guseva (2017), são várias as possibilidades, dentre elas a de que a cultura vigente na Rússia era contrária ao individualismo, porque o comunismo prezava a cooperação e o espírito comunitário, e esperava-se que os educadores transmitissem os valores sociais predominantes de sua sociedade. Como o sistema zankoviano incentivava o desenvolvimento do potencial individual, ia contra de alguma forma à cultura social e política da época. Essa hipótese não nos parece muito plausível, pois o trabalho coletivo está presente, na medida em que o trabalho de cada aluno depende de todo o grupo. Outra força contrária ao modelo de L. V. Zankov foi que alguns autores argumentavam que o sistema era complexo ao ponto de precisar de simplificação.

L. V. Zankov destacou a importância da implantação de seu sistema em um contexto educacional compatível: “O ensino contribuirá para o processo do desenvolvimento geral dos alunos não por meio da aplicação de princípios didáticos desconexos, mas somente por meio da implementação do sistema didático completo” (ZANKOV apud GUSEVA 2017, p.240).

Essa afirmação de L. V. Zankov é pertinente e coerente com os referenciais nos quais ele se baseia, no sentido de pensar um “sistema” didático e, não, “ações” e “princípios” didáticos esporádicos, pontuais, sem relações uns com os outros. É coerente com o princípio de uma relação orgânica entre parte e todo, próprio da postura dialética. Pensar um sistema didático é pensar nos sujeitos que ele envolve, nos métodos e processos de ensino-aprendizagem, nas condições, assim como nos conteúdos, de forma orgânica, fundamentada e coerente.

Destacamos que na organização de nosso experimento para esta tese, assumimos conceitos e princípios do autor na elaboração e aplicação de um experimento que pode ser definido como um sistema didático pelas bases zankovianas, porém com uma extensão

limitada, decorrente de condições objetivas e subjetivas relacionadas a uma pesquisa de doutorado, sendo o tempo uma delas.

No sistema zankoviano, é revelada a importância do papel desempenhado pelos métodos que acionam a esfera da emoção e da vontade, indo ao encontro das necessidades classificadas pelo autor como espirituais⁴. Diferentemente de outros sistemas, ele enfatiza a relação entre a formação do pensamento humano e as emoções na compreensão do ser que aprende como um ser completo e integral.

Nenhum outro sistema didático manifestou preocupação em estudar a relação entre os aspectos cognitivos e emocionais no processo de desenvolvimento integral das crianças. O foco sempre esteve no desenvolvimento das funções cognitivas. (PUENTES; AQUINO, 2018, p. 464)

O sistema zankoviano, enfim, considera explicitamente os aspectos da personalidade daquele que aprende, entendendo que as emoções têm uma força motivadora, que pode elevar ou reduzir a atividade vital. Dentre as pesquisas que procuraram aplicar a tese de L. S. Vigotski sobre a teoria da aprendizagem baseada na atividade, no período de 1924 a 1934, estão a de Rubinstein, Leontiev, Galperin e Elkonin. Surgindo assim, o termo “Ensino Desenvolvidor da Atividade”, que integra os trabalhos destes autores, todos inspirados nas obras de L. S. Vigotski, S. L. Rubinstein e A. N. Leontiev, dentre outros.

Esse é o motivo pelo qual é possível afirmar que o Ensino Desenvolvidor da Atividade ainda representa o movimento pedagógico mais genuíno engendrado no interior do enfoque histórico-cultural da psicologia e da didática marxista, sem que, por isso, se omitam as limitações teóricas e metodológicas a ela associadas próprias de um determinado momento histórico e de um determinado nível de desenvolvimento da ciência. (PUENTES; AQUINO, 2018, p. 451).

Apesar dessa genuinidade e de seus aspectos relevantes para a ciência didática, os sistemas oriundos desta teoria ainda demandam de estudos que venham promover sua divulgação, compreensão e aplicação nas salas de aula, tornando-os capazes de interferir no processo de ensino-aprendizagem escolar. Ao analisar a evolução do sistema didático desenvolvimental de L. V. Zankov frente aos sistemas de Galperin-Talizina e Elkonin-Davidov, tendo como base os pressupostos de L. S. Vigotski e S. L. Rubinstein,

⁴³ Entendido como aquilo que é mais profundo na formação do caráter humano.

percebemos sua atenção voltada para o afetivo como elemento importante na aprendizagem, junto ao conteúdo escolar, fazendo com que a teoria zankoviana seja considerada por nós como mais próspera para a aplicação imediata na sala de aula.

O Ensino Desenvolvimental organizou-se em diferentes sistemas, dentre eles o zankoviano. Podem ser classificados como sistemas desenvolvimentais, os que possuem a matriz teórica em L. S. Vigotski, Rubinstein e A. N. Leontiev, mas cada um deles tem sua interpretação particular de alguns dos principais postulados por esses autores, prioritariamente os postulados de L. S. Vigotski, produzindo posicionamentos diversos e divergências teóricas, nos quais não aprofundaremos aqui, pois nosso objetivo é a apresentação do sistema de L. V. Zankov e não a comparação deles. Tal comparação já é realizada por outros autores.

Os sistemas de Elkonin-Davidov e de Galperin-Talizina tiveram suas principais referências teóricas no campo da psicologia, em L. S. Vigotski, sendo eles os representantes da escola de Moscou, centrados no estudo da atividade. Já o sistema de L. V. Zankov orientou-se nos trabalhos de Vigotski, Leontiev, Ushinski e Rubinstein, cujos estudos enfatizavam a organização psicológica da consciência e da personalidade. Com isso, L. V. Zankov e seus colaboradores foram pioneiros na realização de experimentos pedagógicos longitudinais para provar a tese de L. S. Vigotski de que o período de escolaridade como um todo é o período ideal para o ensino das operações que exigem consciência e controle deliberado, impulsionando as funções psicológicas superiores para o nível ideal de sua maturação. O autor parte do pressuposto de que a relação entre o ensino e o desenvolvimento é determinada pelos métodos específicos utilizados para o tratamento dos conteúdos em sala de aula, enquanto o sistema de Elkonin-Davidov considera essa relação dependente do conteúdo que integra o currículo escolar, dos quais os métodos são apenas derivação.

Davidov (1988, p. 76), considerando os pressupostos vigotskianos e os da teoria da atividade, dedicou seus trabalhos à investigação da atividade de estudo dos escolares em diferentes níveis de ensino. O autor considera que "...o ingresso na escola marca o começo de uma nova etapa de vida da criança, nela muito se modifica tanto no aspecto da organização externa quanto interna". Assim, de acordo com os pressupostos de Davidov a atividade de estudo é a atividade dominante da criança em idade escolar.

Davidov (1988) ressalta em seus estudos a importância de se conhecer as características das atividades de aprendizagem, de saber como os alunos realizam suas

ações no processo de aquisição do conhecimento. Com base nesse entendimento, os alunos devem ter consciência das suas ações. Pois, conforme Davidov (1988):

[...] a necessidade da atividade de estudo estimula os escolares a assimilarem os conhecimentos teóricos, ou seja, os motivos, que lhes permitem assimilar os procedimentos de reprodução destes conhecimentos por meio das ações de estudo, dirigidas a resolver as tarefas de estudos (recordamos que a tarefa é a unidade do objetivo da ação e as condições para alcançá-lo). (DAVIDOV, 1988, p.178 tradução nossa)⁵

Assim, o autor apresenta em sua proposta um modelo de trabalho que tem como foco a atividade de estudo que visa a assimilação dos conhecimentos teóricos. O sistema Elkonin-Davidov enfatiza a formação do pensamento teórico, inclusive considerando que essa é a finalidade da escola, enquanto L. V. Zankov defende a formação geral “ótima” do estudante, considerando, assim, as emoções do sujeito que aprende neste processo. Como formação geral “ótima”, entendemos que se trata da correspondência entre ensino e desenvolvimento, onde a organização adequada do processo de ensino conduz o estudante a um alto grau de aprendizagem, que por sua vez promove o desenvolvimento integral de si. Como desenvolvimento integral entendemos que é aquele que transforma o indivíduo interna e externamente, alterando seu modo de ver e interagir com o mundo.

Neste sentido, o autor destaca que:

O importante é não limitar a instrução aos conhecimentos empíricos ou teóricos. A correlação e as inter-relações que deve haver entre uns e outros dependem da atitude didática, e também da peculiaridade de cada matéria de estudo (ZANKOV, 1984, p. 36, tradução nossa).⁶

O autor destaca que não limitar os conhecimentos empíricos ou teóricos é o caminho para que as inter-relações necessárias ocorram mediante a atitude didática e peculiaridades de cada matéria; assim, o processo de ensino que leva ao desenvolvimento

⁵ “[...] la necesidad de una actividad de estudio alienta a los estudiantes a asimilar el conocimiento teórico, es decir, las razones que les permiten asimilar los procedimientos para la reproducción de este conocimiento a través de acciones de estudio, destinadas a resolver las tareas de estudio. (recuerde que la tarea es la unidad del objetivo de la acción y las condiciones para lograrlo)” (DAVIDOV, 1988, p.178)

⁶ Lo importante es no limitar la instrucción a los conocimientos empíricos o teóricos. La correlación y las inter-relaciones que debe haber entre los unos y los otros dependen de la actitud didáctica, y también de la peculiaridad de cada materia de estudio.

torna-se mais amplo e aberto às necessidades e desejos de cada aluno, produzindo o ambiente necessário para a apropriação de uma formação geral ótima.

1.2 Os pressupostos e os princípios psicológicos do sistema didático de L. V. Zankov

Interpretando à sua maneira os principais postulados dos autores que estabeleceram as bases do ensino desenvolvimental da atividade, prioritariamente os postulados de L. S. Vigotski, L. V. Zankov entende que o ensino que proporciona novas formações psicológicas é desenvolvimental.

Questionando os métodos de ensino de seu tempo, L. V. Zankov adverte que eles não exploravam ao máximo as capacidades mentais, tais como observação, o pensamento, juntamente com uma atitude positiva. Assim, sugere outras maneiras de abordagem didática, que podem levar o aluno a um desenvolvimento pleno.

O sistema zankoviano acredita que a relação entre o ensino e o desenvolvimento é determinada pelos métodos específicos utilizados para o tratamento dos conteúdos em sala de aula. Seus estudos comprovaram que a escola não utilizava métodos suficientemente eficazes e, por tanto, não explorava ao máximo as reservas psíquicas dos alunos para seu desenvolvimento, em especial, as mentais, tais como, a atividade de observação, pensamento, e uma atitude positiva para o processo de *obutchénie*⁷. (PUENTES; AQUINO, 2018, p. 458)

L. V. Zankov, ao apresentar o seu objeto de estudo, o método e a organização da investigação em sua obra *La enseñanza y el desarrollo*, indica pressupostos filosóficos e psicológicos. Em relação ao objeto do estudo, afirma que “consiste em evidenciar a lógica pedagógica objetiva na correspondência entre ensino e desenvolvimento” (ZANKOV, 1984, p. 15). Ele estava preocupado em investigar as vias de ensino que poderiam conduzir a um “desenvolvimento geral ótimo”, mantendo-se fiel às exigências da metodologia marxista-leninista e às teses vigotskianas em relação ao ensino e desenvolvimento, no sentido de que o ensino deve se antecipar ao desenvolvimento. Na busca de evidenciar a lógica pedagógica objetiva do processo de ensino-aprendizagem, é preciso ter em mente que a ação, ou a tarefa realizada, não evidencia esta lógica, porém, orienta o trabalho didático definido. Alcançar um resultado, atingir um objetivo, somente isto, não evidenciam a lógica da ação desenvolvida. A lógica objetiva

⁷ Termo russo para instrução e desenvolvimento.

se diferencia por expressar certa ordem nas relações entre fenômenos e processos que interferem na realidade objetiva. Assim, ao construir nossos processos e materiais didáticos para o experimento, esta ordem e intencionalidade precisam estar explícitos, para assim procurar promover o “desenvolvimento ótimo” esperado. Nesta perspectiva, o uso dos fundamentos filosóficos zankovianos podem auxiliar na apropriação deste movimento transformador do processo de ensino-aprendizagem.

Aquino (2013) faz um cotejamento desses elementos e apresenta como fundamentos filosóficos do sistema didático zankoviano, na perspectiva da dialética materialista: o princípio da “multilateralidade” no estudo do objeto; o princípio de que toda ciência deve partir dos fatos dados; a unidade das contraposições (realidade-fantasia; objeto-representação); o princípio de que a “lei” expressa certa ordem da relação necessária e estável entre os fenômenos, portanto é estreita, incompleta e aproximada; o princípio de que a atividade consequente do homem é uma forma de processo objetivo.

No que respeita ao princípio da multilateralidade, L. V. Zankov apoia-se em Lenin para considerar que “para conhecer de verdade o objeto há que abarcar e estudar todos seus aspectos, todos os seus vínculos e ‘mediações’ todas as facetas do sistema” (LENIN apud ZANKOV, 1984, p. 20). Afirma que o desenvolvimento dos alunos não deve ser pensado de forma isolada, mas nas vinculações do homem com o mundo exterior, num movimento de relações internas e externas. Nesse sentido, defende o experimento, por se tratar de um método científico geral que permite alterar as condições da observação do fenômeno e as suas relações com outros fenômenos, buscando achar as causas e evidenciar as leis da realidade objetiva.

Ao defender que, no estudo do pensamento, há a unidade das contraposições realidade-fantasia e objeto-representação, com base em Lenin e Vigotski, indica que, em qualquer generalização⁸, por mais simples que seja, está presente a “fantasia”. Esse pressuposto nos remete à “ascensão do abstrato ao concreto”, embora não esteja explícita, pois a representação é um momento abstrato, porém é contraditória, e pode não traduzir a concretude do fenômeno/objeto, daí a necessidade da busca da essência, traduzida no concreto pensado.

⁸ Generalização e significado da palavra são sinônimos. Toda generalização, toda formação de conceitos é o ato mais específico, mais autêntico e mais indiscutível do pensamento. Consequentemente, estamos autorizados a considerar o significado da palavra como um fenômeno de pensamento. (VIGOTSKI, 1993, p.398)

L. V. Zankov acredita que “a lógica objetiva, descoberta mediante a investigação científica, expressa certa ordem, uma relação causal, necessária e estável entre os fenômenos e os processos da realidade objetiva” (ZANKOV, 1984, p. 15). Desse modo, ao se referir à investigação da relação objetiva entre a estrutura do ensino e o desenvolvimento dos alunos, afirma: “em nossa investigação [significa] que a estrutura do ensino é causa de certo processo do desenvolvimento geral dos escolares” (ZANKOV, 1984, p. 17). Essa relação necessária e estável é expressa por meio de uma lei, porém, conforme Hegel, citado por L. V. Zankov (1984, p. 21) a lei é sempre “estreita, incompleta e aproximada”, porque traduz os elementos fixos.

Em relação aos aspectos psicológicos, segundo Aquino (2013), L. V. Zankov apoiou-se em representantes da psicologia histórico-cultural, L. S. Vigotski, S. L. Rubinstein e A. N. Leontiev, além de contribuições de outros psicólogos russos como I. Pávlov. Destaca os seguintes pressupostos presentes na investigação zankoviana: “o desenvolvimento da psique da criança é de natureza social, e que a fonte do desenvolvimento é a cooperação e o ensino” (AQUINO, 2013 p. 241); “a unidade entre a consciência e a atividade” (p. 242); “o princípio de etapas concernentes à idade” (p. 241); “a Zona de Desenvolvimento Próximo (ZDP⁹)” (p. 243), construto elaborado por L. S. Vigotski.

Ao tratar a ZDP, L. V. Zankov lembra que o ensino deve atuar não em funções já maduras (zona de desenvolvimento atual), mas sobre aquelas ainda em processo de maturação (zona de desenvolvimento potencial), criando-se, assim, uma zona de desenvolvimento resultado da distância entre a atual e a potencial (zona de desenvolvimento proximal). Na ZDP, ocorrem processos internos e externos, ambos relevantes para o desenvolvimento infantil, assim descritos por Vigotski:

A importância do ensino advém do fato de que ele cria a zona de desenvolvimento proximal, isto é, estimula o interesse da criança pelo ambiente, o que por sua vez, desperta os processos de desenvolvimento interno. Uma vez desperto, o desenvolvimento avançará somente por meio da interação com o ambiente e através das relações interpessoais. E, apesar da necessidade do estímulo externo, a maturação ou crescimento intelectual será uma realização interna e individual de cada criança. (VYGOTSKY, 1991, p. 388 apud GUSEVA, 2017, p. 228)

⁹ ZDP é “distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes”. (VIGOTSKI, 1978, p.86 apud GUSEVA, 2017, p. 226)

Essa citação nos ajuda a compreender que entre ensino e desenvolvimento não há uma relação causal direta, isto é, os processos de ensino e os processos de desenvolvimento não coincidem em suas trajetórias, fato já constatado por L. S. Vigotski, com o qual concordou L. V. Zankov. O desenvolvimento supõe as relações interpessoais e necessita do estímulo externo, mas ele depende de processos internos individuais de cada aluno. Por esse motivo, não se pode garantir que uma organização ótima do ensino irá causar um “desenvolvimento ótimo” de todos os alunos.

Com relação ao ensino e ao desenvolvimento infantil, L. V. Zankov, fundamentado em L. S. Vigotski, considera que o ensino não deve visar somente o desenvolvimento cognitivo, mas também o desenvolvimento emocional. Segundo Guseva (2017, p. 227), “o sistema zankoviano defende que a educação infantil deve estimular o desenvolvimento cognitivo (mente), volitivo (motivação) e afetivo (emoções) do aluno”, envolvendo assim, elementos capazes de estimular o “desenvolvimento ótimo” do indivíduo.

Um dos principais objetivos do ensino, para o autor, é buscar o pensamento independente e inquieto do aluno, ligando-o a emoções vivas, pois, para L. V. Zankov, não existe ensino e aprendizagem se não houver transformação do ser humano. Para essa transformação ocorrer, é necessário que o aluno sinta, que perceba suas emoções associadas ao conhecimento, fato este que pode auxiliar positivamente, quando as emoções associadas são boas, ou, negativamente, quando essas emoções não são boas, gerando uma possível aversão ao conteúdo e um aumento da dificuldade de seu aprendizado.

Em seu experimento, desde a primeira etapa e ao longo de todo o experimento buscou encontrar no processo de mediação do professor os diversos aspectos da personalidade e dos sentimentos do aluno, assim, o movimento do sistema experimental pode revelar a passagem de uma etapa a outra com muita transparência, o papel ativo que a metodologia tem quanto à esfera emocional, além da vontade dos alunos e suas necessidades espirituais. Vale levar em consideração que nas características gerais e emocionais que se fazem presentes na ciência psicológica, a emoção se caracteriza como uma atitude do homem diante do mundo, daquilo que ele experimenta, vivencia e realiza em forma de sentimento.

Segundo (L. V. Zankov apud Guseva, 1975, p. 233), “as emoções expressam o estado do sujeito e suas atitudes diante de um determinado objeto”. As emoções, de um

modo geral, se caracterizam por um sentido positivo e outro negativo, como satisfação e insatisfação, alegria e tristeza. Com as emoções positivas vem a elevação espiritual, a simpatia, a admiração, e, dentro das emoções negativas, a raiva, a repulsa, a frustração. As emoções citadas, assim como outras, operam de diferentes maneiras e se distinguem por qualidades e matizes diversas. De modo geral, destacam-se os tipos de emoções em virtude das esferas e das atividades psíquicas do homem e das diversas faces das atividades do homem diante do mundo, intelectuais, morais e éticas. Estas seriam, então, para L. V. Zankov, as diversas facetas da atitude do homem.

As emoções têm uma força motivacional, podem elevar ou reduzir a atividade vital. Citando Lenin, escreve: “Sem as emoções humanas, não houve, não há, nem haverá uma busca humana pela verdade” (ZANKOV, 1984, p. 63). Para um trabalho ativo e criador do pensamento, é de suma importância que o homem, ao se deparar com algo incompreensível, levante questões que o surpreendam, que estimulem suas emoções. O incompreensível gera assombro, pois, a dúvida gerada diante da falta de provas obriga o homem a executar o trabalho até o fim para alcançar o pensamento pleno, mesmo com todas as dificuldades que possam surgir no caminho. A paixão e a alegria influenciam na realização do trabalho e dos estudos, levando o aluno a ter mais força e energia para a prática. Em contrapartida o tédio e a frustração o freiam.

1.3 Princípios didáticos de L. V. Zankov

L. V. Zankov apontava que as práticas de ensino tradicionais enfatizavam o desenvolvimento dos conhecimentos, das habilidades e das práticas, o que o levou a ampliar esses objetivos para abranger o desenvolvimento cognitivo integral, a partir do ajustamento do papel do professor, que deixaria de assumir a posição de instrutor passando à de guia do processo de aprendizagem.

Nessa nova função, o professor permanece com as funções anteriormente atribuídas a ele, tais como a de realizar a organização do conteúdo e a de mediação didática, mas absorve a característica daquele que aponta caminhos através da organização do processo de aprendizagem, guiado por princípios claros, e que promovem a evolução do aluno em função do conteúdo.

Para direcionar em seu sistema a ação do professor e todo o processo de ensino-aprendizagem, L. V. Zankov baseou-se em cinco princípios didáticos, com o intuito de

promover o desenvolvimento geral do aluno e uma maior eficácia do ensino. Esses princípios foram se estruturando durante as etapas de realização do experimento. São eles:

- I. O papel reitor ¹⁰ dos conhecimentos teóricos;
- II. Ensino a um alto grau de dificuldade;
- III. Avanço em grande ritmo;
- IV. Compreensão pelos escolares do processo de estudo;
- V. Planejamento cuidadoso das aulas para promover a aprendizagem de cada aluno particular.

O último princípio, segundo L. V. Zankov (1984), define o campo de ação dos demais, pois a organização do ensino é condição para que os outros possam ser atingidos. Destaca, ainda, que esses princípios se vinculam entre si, mas atuam em planos diferentes e distinguem-se por suas funções.

1.3.1 Primeiro princípio: O papel reitor dos conhecimentos teóricos

A formação de conceitos teóricos ou do pensamento teórico é uma preocupação de L. S. Vigotski e também de seus seguidores. Eles enfatizam que o papel do ensino é promover a formação do pensamento teórico e não do pensamento empírico. Resende (2019, p. 307) faz um paralelo entre eles, com base em Davidov, o que nos ajudou nas análises do experimento realizado.

Quadro 1 – Paralelo entre o pensamento empírico e o pensamento teórico sob a perspectiva de Davidov

	PENSAMENTO EMPÍRICO	PENSAMENTO TEÓRICO
PONTO DE PARTIDA	Elaborado no processo de comparação entre os objetos e as representações sobre ele, o que permite separar as propriedades iguais, comuns. A coisa isolada aparece como uma realidade autônoma.	Surge no processo de análise do papel e da função de certa relação peculiar dentro do sistema integral que, ao mesmo tempo, serve de base genérica inicial de todas as suas manifestações. A coisa aparece como meio de manifestação de outra coisa dentro de um todo, evidenciando sua conexão interna a partir da transformação mental dos objetos.

¹⁰ Mantivemos papel reitor em nossa tradução devido ser o termo que mais se aproxima do objetivo do autor, trazendo papel reitor como o papel de quem rege, orienta, determina.

	É derivado da atividade objetivo-sensorial dos homens, que se traduz no conhecimento direto na realidade e não apenas da realidade.	
FINALIDADE	O pensamento empírico cataloga, classifica os objetos e fenômenos.	O pensamento teórico busca a essência.
CONTEÚDO	Os movimentos visíveis e aparentes da coisa observada, ou seja, as propriedades comuns dos objetos. O conhecimento empírico é o movimento na esfera da exterioridade, a assimilação do aspecto da realidade descrito pela categoria da existência. Os conhecimentos empíricos apoiando-se nas observações, refletem em representações as propriedades externas dos objetos. A cognição empírica é o movimento na esfera da aparência, que se expressa pela categoria de ser, de quantidade, de qualidade, de atributo, de medida.	Movimentos reais e interiores. Área dos fenômenos objetivamente inter-relacionados. Refere-se a um sistema de interação de fenômenos articulados, constituindo um todo organizado. O conteúdo específico do pensamento teórico expressa a relação objetiva do universal e do particular (o integral e o diferente), isto é, descobrem-se as inter-relações de objetos isolados dentro do todo. Os conhecimentos teóricos, que surgem sobre a base da transformação mental dos objetos, refletem suas relações e conexões internas, “saindo” assim dos limites das representações. A cognição teórica tem como conteúdo o ser mediatizado, refletido e essencial.

Fonte: RESENDE, 2019, p. 307. Elaborado com base em DAVIDOV (1988, p. 154-155) e DAVÝDOV (1982).

Fica claro que o pensamento empírico se baseia em aspectos externos, aparentes do objeto, fica na esfera da aparência e tem a finalidade de catalogar, de classificar, enquanto o pensamento teórico visa as conexões internas, surge a partir da transformação mental dos objetos, em busca da essência, dentro de um todo, de um sistema integral.

Embora L. V. Zankov tenha se mostrado preocupado com a formação de conceitos científicos, dando-lhes o papel de “reitor” no sistema didático proposto, ele destacou, também, a importância de se considerar a esfera da emoção e da vontade dos alunos, com o intuito de obter o desenvolvimento integral do aluno.

L. V. Zankov (1984) associa esse princípio ao próximo, afirmando que o alto grau de dificuldade supõe chegar ao conhecimento da interdependência dos fenômenos,

à sua relação interna substancial, o que nos permite dizer à essência, ultrapassando o nível empírico do pensamento.

No sistema zankoviano, os alunos são incentivados a verbalizar suas observações sobre o tema estudado, enquanto o professor direciona a atenção para os padrões e conexões evidenciados por eles, conduzindo-os à dedução e explicação da natureza das relações. A ênfase deve estar nos conceitos e não nas habilidades de manipulação dos signos matemáticos ou linguísticos, embora L. V. Zankov valorize a formação de hábitos e destrezas que se tornam mais desenvolvidos quando se ligam à compreensão mais profunda dos conceitos.

No exemplo apresentado por Guseva (2017), numa aula de geometria, o que se observa é que o professor apresenta um elemento geométrico em uma figura, a diagonal, e vai instigando e questionando até que o aluno chegue a um conceito mais completo, contendo todos os elementos necessários, que vão além do observável de imediato.

Este tipo de abordagem do conhecimento, orienta o ensino-aprendizagem que tem o aluno como protagonista da apropriação de seu conhecimento, mas não sozinho, há uma construção coletiva, orientada pelo professor que levará os alunos ao conceito, mas em momentos distintos do processo, respeitando assim cada indivíduo, suas limitações e habilidades.

1.3.2 Segundo Princípio: Ensino a um alto grau de dificuldade

L. V. Zankov (1984) afirma que um dos aspectos deste princípio é a superação de dificuldades. Em didática, o conceito de dificuldade se aplica em diferentes contextos e significados. Ao referir-se ao trabalho em um amplo sentido psicológico-social, cita K. Ushinski “Gostamos do trabalho, mas não gostamos das dificuldades do trabalho, sem perceber que o trabalho sem dificuldades não é possível”.

Trabalhar com alto grau de dificuldade não significa exigir em demasia dos alunos, mas incentivá-los a sempre superar obstáculos e impor a seu cérebro um trabalho “não preguiçoso”, fugindo assim da mera repetição e reprodução, próprias do ensino tradicional.

O princípio do ensino a um alto grau de dificuldade não é caracterizado por levantar uma espécie de “padrão de dificuldade” abstrato, mas, acima de tudo, evidencia as forças espirituais da criança, fornecendo espaço e direção. “Se o material escolar e os métodos de estudo são tais que não apresentam dificuldades para os alunos que terão que

superá-las, o desenvolvimento das crianças é operado de maneira fraca e sem graça”. (ZANKOV, 1984, p. 30). Também não se trata de gerar uma tensão que impeça o aluno de caminhar, por esse motivo é necessário ter uma medida da mesma, ou seja, o material aplicado aos alunos pode ser compreendido por eles. Ele deve supor um esforço dos estudantes.

A medida da dificuldade, em nosso modo de entender, não visa diminuir a dificuldade de alguém, mas atua como um integrante indispensável na consequente aplicação do princípio. Em parte, isso é condicionado pelo fato de que, quando aplicado, é oferecido um material de estudo que pode ser entendido pelos alunos. Se essa medida de dificuldade não for observada, a criança, ao não se achar em condições de assimilar o material que lhe é fornecido, percorrerá imperceptivelmente o caminho da memória mecânica. Então, o nível alto de dificuldade, do fator positivo fica negativo. (ZANKOV, 1984, p. 30, tradução nossa)¹¹

É indispensável a compreensão por parte do aluno do material oferecido a ele, mas o autor destaca a necessidade de esse entendimento não se tornar entediante ou ao contrário, intransponível. A compreensão é essencial, mas os desafios graduais é que levarão o aluno a uma próxima fase, um novo degrau na apropriação do saber.

O autor ainda destaca a necessidade da seleção cuidadosa de atividades previamente pensadas, objetivando a gradação consciente do nível de dificuldade por elas exigidas. Essa seleção, adequadamente aplicada, desafia o aluno a não simplesmente repetir aquilo que já foi visto, mas a desenvolver mecanismos e estruturas tais que o levem a um novo e mais alto patamar de compreensão e raciocínio que o torne proprietário das ideias e não apenas reprodutor delas.

Com base nas ideias de L. S. Vigotski (1998), segundo as quais as atividades escolares diárias deveriam expor regularmente os alunos a situações novas ou inusitadas, nas quais as soluções desafiam e ampliam as habilidades de resolução de problema, cada aula deve ser provocativa, induzindo de maneira sistêmica operações mentais complexas que promovam o desenvolvimento rápido e completo. De acordo com este princípio, é necessário assegurar que os alunos trabalhem por si só as estratégias, pois para L. V.

¹¹ “La medida de la dificultad, a nuestro modo de entender, no está encaminada a disminuir la propia dificultad, sino que actua como um integrante indispensable en la aplicación consecuente del principio. Em parte, ello es condicionado por el hecho de que, al aplicarse, se ofrece un material de estudio que puede ser comprendido por los escolares. Si no se observa la medida de la dificultad, el niño, al no hallarse en condiciones de asimilar el material que se le proporciona, insensiblemente marchará por la vía del recuerdo mecánico. Entonces, el alto nivel de dificultad, de factor positivo se convierte em negativo.” (ZANKOV, 1984, p. 30)

Zankov, o desenvolvimento integral é inibido toda vez que se nega ao aluno a oportunidade de encarar ou resolver desafios (GUSEVA, 2017, p. 230).

Como o princípio do ensino para um alto grau de dificuldade também determina a estrutura do conteúdo do ensino, o material de estudo não é apenas mais amplo e profundo, mas também carrega uma particularidade qualitativa e está relacionado ao protagonismo do conhecimento teórico, outro princípio. “Portanto, não é levada em consideração qualquer dificuldade, mas aquela que consiste no conhecimento da interdependência dos fenômenos, sua substancial ligação interna” (ZANKOV, 1984, p. 31).

Este princípio interfere na organização do ensino, como também diretamente no conteúdo de livros, apostilas e manuais didáticos de todo o tipo, pois exige uma organização e profundidade que leve o aluno à apropriação de uma teia de conceitos elementares e auxiliares, que o guiarão a um conceito maior e mais abrangente. A aplicação do conceito demanda pensar toda complexidade de sua teia, para tornar o conteúdo estudado vivo e parte integrante de estruturas que farão com que se transformem em mecanismos prontos para serem acionados na resolução de problemas na vida do aluno.

1.3.3 Terceiro princípio: Avanço em grande ritmo

Esse princípio parte da constatação de que os alunos são mais bem estimulados pela variedade do que pela repetição. L. V. Zankov observou que: “Priorizar exercícios intermináveis e o excesso monótono de avaliações produz preguiça mental, apatia espiritual e serve para impedir o desenvolvimento ao invés de facilitá-lo” (ZANKOV apud Guseva, 2017, p. 232).

Por isso, o ritmo não deve ser visto como fim, mas como meio de promover o desenvolvimento (ZANKOV, 1966 apud GUSEVA, 2017, p. 232). Assim, no modelo zankoviano, avaliações e repetições de conteúdo se dão na utilização de novos conteúdos, pois estes acionam os conhecimentos anteriores e para prosseguir é preciso aplicá-los adequadamente, mostrando domínio. Quanto mais desafiador o novo conteúdo, mais aplicados serão os conceitos anteriores, desse modo não há interrupção de conteúdo ou ritmo no processo de aprendizagem.

Podemos afirmar que há aqui a valorização dos conhecimentos prévios, no sentido de que eles se incorporam aos novos e se transformam em prévios para uma

próxima etapa. É a metáfora da espiral, na assimilação dos conhecimentos, à medida que um conceito é retomado, ele cresce em complexidade e profundidade. A afirmação de L. V. Zankov (1984, p. 32) de que “O enriquecimento incessante do intelecto do aluno com um conteúdo cria condições favoráveis para uma compreensão mais ampla e profunda dos dados obtidos, uma vez que fazem parte de um sistema desenvolvido”, comprova essa compreensão. Esse princípio se associa ao anterior, pois também depende do tipo de exercícios que são propostos aos alunos, repetitivos-empobrecedores ou desafiadores-instigantes.

O uso de pequenos desafios que associam a história dos logaritmos, da Matemática e do próprio homem nas atividades que propusemos, promoveram a possibilidade da apropriação do conhecimento, a partir da ideia de espiral apresentada aqui, com a característica da impressão de um ritmo acelerado e com um bom nível de dificuldade a cada tarefa.

Sabemos que o sistema zankoviano não tem a intenção de apressar as atividades realizadas na sala de aula, nem quer que o desenvolvimento se dê forçadamente, ele quer na verdade, criar condições favoráveis para que o desenvolvimento seja despertado, desenvolvendo assim o potencial do aluno, evitando repetições desnecessárias.

1.3.4 Quarto princípio: Compreensão pelos escolares do processo de estudo -

O autoconhecimento ou autorregulação da aprendizagem do aluno envolve diversos aspectos dentro da experiência de aprendizagem. L. V. Zankov explicou que, neste princípio, há a intervenção de diversas atividades psíquicas, no envolvimento do aluno com a apropriação dos fundamentos da disposição do material, com a necessidade de aprender os elementos concretos, no sentido de concreto pensado.

Ao explicar esse princípio, L. V. Zankov (1984) explora um exemplo do ensino da Matemática presente nos anos iniciais da escolarização, o ensino da tabuada (fatos fundamentais das operações). Mostra que, se o aluno se apropriar da propriedade comutativa da multiplicação, o estudo da tabuada se reduz à metade do que seria o seu estudo convencional, porque se, ao estudar a “tabuada do 2”, o aluno aprende que $2 \times 3 = 6$, então, ao estudar a “tabuada do 3”, o fato 3×2 já foi apropriado. Se o aluno compreender essa importante relação entre os fatores, que é a propriedade comutativa, um elemento do pensamento teórico a respeito da operação de multiplicação, ele estará compreendendo o processo de estudo e estará, também, avançando em grande ritmo, além

disso, tendo condições de exercer a autoconsciência sobre o seu processo de apropriação desse conteúdo.

1.3.5 Quinto princípio: Planejamento cuidadoso das aulas para promover a aprendizagem de cada aluno em particular

Contrário à organização que normalmente é feita nas escolas e classes, onde os alunos são classificados e organizados segundo seu desempenho, L. V. Zankov considera qualquer tipo de segregação ou junção de alunos, contrário à natureza da aprendizagem e ao desenvolvimento. Para ele, todo estudante está apto a progredir em seu desenvolvimento, exceto os casos com comprometimentos patológicos. O ritmo de aprendizagem pode variar conforme as dificuldades pessoais de cada aluno, mas é necessário que alunos considerados fracos ou fortes sigam juntos pela jornada do aprendizado. (GUSEVA, 2017)

O inesperado, o surpreendente, o inédito, são fatores que podem despertar a curiosidade das pessoas, em se tratando de educação, essa curiosidade pode melhorar o interesse, o envolvimento, o raciocínio e a aprendizagem. L. S. Vigotski diz que “um fato emocionalmente significativo é absorvido mais facilmente e melhor fixado que um fato ao qual a criança é indiferente” (VIGOTSKI, 1993, p.141).

Partindo desse princípio, L. G. Guseva (2017) apresenta algumas condições para o desenvolvimento e a aprendizagem. Primeiramente, que o conteúdo curricular deve procurar colocar o aluno em estado de alerta constante, para isso, as aulas devem iniciar com um elemento surpresa e os alunos estimulados a participarem com ideias, sugestões, opiniões, assim, se envolvendo com o processo de resolução dos problemas, pois, em um ambiente receptivo para a aprendizagem, mesmo o aluno mais inseguro contribuirá naturalmente com esforços criativos para o êxito do grupo.

Para gerar um ambiente deste tipo, é preciso investir no clima de conforto e segurança, e isso parte do afeto dispensado aos alunos. Assim, a afetividade é pré-requisito para um bom ambiente e, conseqüentemente, uma boa aula.

Outro ponto importante nesse processo é a criação de oportunidades, para que os alunos façam escolhas. Isso será percebido pelos alunos como responsabilidade compartilhada, desenvolvendo o sentimento individual de responsabilidade pelo aprendizado e desenvolvimento. No sistema zankoviano, os alunos são encorajados a:

- Escutar e ouvir;

- Olhar e ver;
- Pensar e refletir;
- Não repetir;
- Ser feliz e experimentar.

Os princípios didáticos zankovianos, para serem alcançados, demandam uma combinação entre conteúdos, métodos, exploração de conceitos e harmonia do ambiente com as pessoas e processos.

L. G. Guseva (2017) apresenta as características da aula ideal, segundo L. V. Zankov:

- Interdisciplinaridade;
- Apresentação gradativa aumentada dos temas;
- Elemento de promoção da curiosidade;
- Inclusão de todos os envolvidos no processo.

No que diz respeito ao aspecto interdisciplinar, ainda, acrescenta:

A aquisição de uma ampla base de conhecimentos e habilidades dá ao aluno a oportunidade de conhecer a relevância de conceitos específicos em uma grande variedade de contextos. O ensino interdisciplinar também marca o processo de aprendizagem com uma variedade de atividades práticas, as quais, ao mesmo tempo, estimulam e expandem as capacidades afetivas, cognitivas e sociais da criança. (GUSEVA, 2017, p. 236)

É interessante observar que a visão de interdisciplinaridade do ensino que marcou e continua marcando as diretrizes curriculares e os discursos pedagógicos a partir dos anos de 1990, inclusive estando presente nos pressupostos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, já estavam presentes no sistema zankoviano, nos anos de 1950-60.

O modelo zankoviano tem como prerrogativa a apresentação dos conteúdos que formam a teia de conhecimentos essenciais para a formação do conceito de forma exponencial, os conceitos tidos como simples são previamente introduzidos e gradativamente revistos através de questões invariavelmente mais abstratas, sendo observadas dentro de um novo contexto. Essa característica da aula concretiza o princípio do *Avanço rápido no estudo do material do programa*, assim como a formação dos conceitos teóricos.

Para que esse processo aconteça, é preciso que as aulas sejam cuidadosamente planejadas, visando incorporar e relacionar o que foi aprendido com o que está prestes a

ser introduzido. Assim, cada atividade amplia a compreensão sobre o conteúdo anterior para um nível superior de generalização.

O destaque fica para a inserção de elementos de incongruência ou dissonância, que é uma característica necessária para a boa experiência de aprendizagem, pois estas anomalias tendem a suscitar a atenção dos alunos para o assunto estudado, promovendo comparações e análises dos fatores dissonantes e levando-os a questionamentos, enfim, à pesquisa e ao pensamento crítico.

Neste sentido existem características do sistema zankoviano que são inovadoras, frente à didática convencional. São elas, segundo Guseva (2017):

1) Não há ênfase na avaliação formal dos conteúdos apresentados; a atenção é voltada para o desenvolvimento do aluno e não no desempenho do professor; privilegia o trabalho de campo com o aluno colocando a mão na massa; são propostas atividades instigantes no lugar de memorização e repetição; há o encorajamento da interdisciplinaridade; o professor atua com discrição, sempre incentivando a exploração de novos conceitos; acontece o incentivo à investigação, discussão, observação, análise e resolução criativa.

2) Partindo do conhecimento de que a criança não fixa a atenção por muito tempo, propõe tempos mais curtos de aulas e maior diversidade.

3) Propõe, também, o planejamento cuidadoso da aula, conforme já tratamos.

Assim, o modelo zankoviano coloca nas relações existentes no processo de ensino e aprendizagem, a afetividade e a cumplicidade, buscando o desenvolvimento integral do aluno, valorizando aspectos que não são externos a esse desenvolvimento, como o são as notas.

1.4 O processo de desenvolvimento dos estudantes no sistema zankoviano

L. V. Zankov (1984) considera que o desenvolvimento dos alunos ocorre de acordo com três unidades, no mesmo sentido apresentado por L. S. Vigotski. Não se tratam de elementos, que somados formam o todo, mas de uma divisão em unidades as quais permitem conhecer as leis concretas do todo, a partir das relações entre elas. Assim, são unidades do desenvolvimento dos alunos: a atividade de observação, a atividade mental ou do pensamento e as atividades práticas. Fazendo estudos comparativos entre as classes experimentais e as correntes, L. V. Zankov buscou responder à questão de

pesquisa “Que traços típicos deverá possuir o sistema didático que conduzirá a resultados ótimos no desenvolvimento geral dos alunos?” (ZANKOV, 1984, p. 89).

1.4.1 Atividades de observação, segundo L. V. Zankov

É essencial e necessário estudar o desenvolvimento das atividades de observação no processo da metodologia experimental, pois se trata de um elemento fundamental para o processo de percepção de organização do trabalho docente. Nesse sentido, Rubinstéin escreveu:

Todo o processo do conhecimento da realidade objetiva decorre, a princípio, na criança, em sensações e percepções. Dado que os próprios órgãos receptivos se desenvolvem muito depressa, o desenvolvimento da percepção consiste, essencialmente, num desenvolvimento do sentido dos dados sensíveis de percepção e de tomada de consciência do seu conteúdo objetivo (RUBINSTÉIN, 1973, p. 197).

Esse desenvolvimento dos sentidos e da percepção está, segundo o autor, diretamente associado à percepção do conteúdo objetivo e da consciência de mundo. Sendo assim, o autor continua dizendo que: “Este desenvolvimento conduz a uma penetração cognoscitiva cada vez mais profunda do conteúdo objetivo da realidade objetiva e manifesta-se numa execução cada vez mais consciente do processo receptivo”. (RUBINSTÉIN, 1973, p. 197).

Assim, percebe-se a importância da etapa da observação, pois, nela, encontramos elementos palpáveis para mensurar a qualidade da atividade de estudo do aluno e a complexidade dos resultados alcançados no desenvolvimento individual. Nesse sentido, L. V. Zankov afirma:

Porém, não há motivos para apagar as relações existentes entre o raciocínio e a observação. O objetivo da observação é o objeto diretamente percebido, cujo conhecimento consiste em destacar e contrastar, em unir suas partes, aspectos e qualidades, dados sensorialmente. (ZANKOV, 1984, p. 90, tradução nossa)¹²

Sabe-se ainda que há diferentes processos de percepção, que variam conforme as particularidades de cada objeto e das tarefas planejadas. Assim a atividade de

¹² “Pero no hay motivos para borrar la diferencia existente entre la observación y el razonamiento. El objetivo de la observación es el objeto directamente percibido, cuyo conocimiento consiste en destacar y contrastar, en unir sus partes, aspectos y cualidades, dados sensorialmente.” (ZANKOV, 1984, p. 90)

observação transcorre de diversos modos, sendo diferentes para cada aluno. L. V. Zankov ainda salienta que nos tratados de psicologia, aponta-se que há diferentes tipos de processos de percepção e observação descobertos nas crianças.

Para a investigação experimental, é preciso focar na diferença entre os tipos de observação e percepção. É preciso atenção para com as mudanças gerais que aparecem em determinados processos de ensino, pois a observação é uma atividade complexa, da qual a percepção é integrante. Porém, à medida que a percepção se torna um ato consciente, uma operação dirigida, transforma-se em observação.

Segundo S. L. Rubinstein (1973, p.34), “A percepção da criança forma-se dentro do processo evolutivo da sua atividade concreta. Desenvolve-se dentro do processo de atividade orientada, da ação objetiva prática”. Assim, a proposta vem como uma tarefa que proporciona aos alunos a possibilidade da observação, sem, porém, impor-lhes um padrão estreito de observação ou limitações. A observação acontece mediante sucessivas possibilidades, sem lhes fazer perguntas de caráter minucioso que os leve a uma constatação de apenas uma parte ou uma particularidade específica do objeto.

Ainda, segundo S. L. Rubinstéin, a sensação e a percepção estão intimamente ligadas entre si, pois são reflexos da realidade objetiva que se exprime através dos sentidos, cuja realidade existe independente da consciência, daí a importância da afetividade para acessar os órgãos sensoriais que ativarão estes elementos.

L. V. Zankov (1984) destaca que os experimentos mostraram que, nas classes experimentais, há um impulso interior dos alunos em relação à atividade cognoscitiva, enquanto nas classes correntes foi possível constatar que o impulso dos alunos se esgotava rapidamente e havia ausência de reações emotivas. Tal ausência, compromete a atitude do homem no mundo, pois segundo Zankov (1984, p.63):

A emoção é caracterizada como a atitude do homem em relação ao mundo, em relação ao que ele experimenta e executa na forma de sentimento direto. As emoções expressam o estado do sujeito e sua atitude em relação ao objeto. (tradução nossa)¹³

¹³ “La emoción se caracteriza como la actitud del hombre ante el mundo, hacia aquello que experimenta y realiza en forma de sentimiento directo. Las emociones, expresan el estado del sujeto y su actitud ante el objeto.” (ZANKOV, 1984, p. 63)

Assim, se não há a presença de reações emotivas por parte dos alunos, ou se essa se esgota rapidamente, não há no aluno impulsos que o leve a avançar com a devida qualidade em seus estudos, prejudicando seu desempenho e qualidade de aprendizagem.

1.4.2 Atividade mental

A atividade mental é fundamental para o desenvolvimento geral dos alunos, por isso, é uma das linhas da investigação do seu processo. L. V. Zankov começa sua reflexão quanto à atividade mental, lembrando que o pensamento é estudado por diversas ciências, tais como a genealogia, a lógica, a psicologia e a fisiologia do sistema superior. Por isso, o autor afirma que:

O progresso do pensamento em sua ontogênese aparece antes de tudo e sobre tudo, no fato que suas mudanças qualitativas são operadas e têm um caráter orientador, do inferior ao superior. A base do estudo do desenvolvimento da atividade mental dos alunos, é o postulado acerca da diversidade das formas do pensamento, de suas relações mútuas substanciais, e de seu movimento intercondicionado. (ZANKOV, 1984, p. 102, tradução nossa) ¹⁴

Neste sentido, pode-se deduzir que as mudanças qualitativas do pensamento ocorrem num processo orientado, que inclui a análise e a síntese a generalização. Nesse processo, segundo S. Rubinstéin, citado por L. V. Zankov (1984), o objeto de conhecimento entra em novas relações, que conduzem a novas qualidades, gerando um novo conteúdo para o objeto, um novo conceito. Para nós, isso significa que o conceito se desenvolve, amplia-se, aprofunda-se nas sucessivas aproximações do sujeito ao objeto.

Quanto ao desenvolvimento do pensamento teórico, S. L. Rubinstéin (1973, p. 17) explica que, quando ele se desenvolve:

Nem o pensamento sensório-motor (evidente e real), nem o evidente-imaginativo, sem dúvida, desaparecem, senão que se transformam, se aperfeiçoam, elevando-se por si mesmos a um degrau superior. Entre eles se estabelecem inter-relações infinitamente complexas, que variam individualmente de um a outro caso.

¹⁴ “El progreso del pensamiento em ontogenia aparece, ante todo y sobre todo, em el hecho de que se operan sus cambios cualitativos que tienen un carácter orientador: de lo inferior a lo superior. La base del estudio del desarrollo de la actividad mental del escolar es el postulado acerca de la diversidad de las formas de pensamiento, de sus relaciones mutuas sustanciales, de su movimiento intercondicionado.” (ZANKOV, 1984, p. 102)

Essa explicação de Rubinstéin corrobora com o exposto anteriormente – o progresso do pensamento ocorre desde planos inferiores a planos superiores de complexidade, num processo de inter-relações entre as diversas formas de pensamento, evidenciando as transformações que ocorrem. Por este motivo, L. V. Zankov (1984) entende que a finalidade da investigação psicológica do pensamento e do seu desenvolvimento se fundamenta em evidenciar as atividades mentais como um processo, e na medida do possível, estabelecer as leis que o regulam.

O movimento, citado anteriormente, fez com que o foco da investigação de L. V. Zankov em relação às atividades mentais fosse a qualidade dos objetos de conhecimento que são a base da observação, e não a palavra como o fez L. S. Vigotski. Vejamos como este processo de observação auxilia na formação da compreensão das ideias apresentadas.

A análise e a síntese, a abstração e a generalização podiam atuar ora em um plano evidentemente metafórico, ora em um plano verbal-lógico, em suas diversas correlações. Graças a isto, se criou a possibilidade de investigar a dinâmica da atividade mental por níveis reais, que levam das formas embrionárias de percepção do carácter comum dos objetos ao nível mais elevado possível. (ZANKOV, 1984, p. 103, tradução nossa)¹⁵

Nesse movimento de análise, síntese, abstração e generalização percebe-se a transformação do objeto estudado em “novo” a cada vez que o movimento se repete, a cada vez que este processo é executado encontram-se novas características.

Enquanto L. S. Vigotski procurou evidenciar o papel funcional da palavra na formação do conceito, L. V. Zankov, em seu sistema didático, usou a observação do objeto para promover a análise e a síntese, a abstração e generalização, que atuaram ora como um plano evidente metafórico, ora em um plano verbal lógico em suas diversas correlações. Exemplificando este processo, L. V. Zankov (1984) nos apresentou um exemplo relacionado à identificação de figuras geométricas espaciais e estabelece níveis na agrupação das figuras pelas crianças dos anos iniciais, indo de níveis mais simples a níveis mais complexos, que dependiam da forma de ensino e das características individuais dos alunos.

¹⁵ “El análisis y la síntesis, la abstracción y la generalización podían actuar ora em un plano evidente metafórico, ora em un plano verbal-lógico, em sus diversas correlaciones. Gracias a ello, se creo la posibilidad de investigar la dinámica de las formas embrionárias de percepción del carácter común de los objetos al nivel más elevado posible.” (ZANKOV, 1984, p.103)

Assim, observou que os alunos das classes experimentais sempre tentavam fundamentar as suas ações e explicá-las verbalmente, enquanto a maioria dos alunos das classes correntes baseava-se em induções, em indicações externas e não se importava se a resposta estava correta ou não. Os alunos das classes experimentais demonstravam o desejo de executar a tarefa até o final, empenhando-se na busca de argumentos para fundamentar suas ações, enquanto os das classes regulares mostravam-se indiferentes em relação à resposta dada.

A outra unidade no processo de desenvolvimento dos estudantes, ao lado da atividade de observação e da atividade mental, é a atividade prática.

1.4.3 Atividades práticas

As atividades práticas são essenciais para o desenvolvimento geral dos alunos. A realidade prática concreta se caracteriza não somente pela destreza e hábitos motores, mas também pelo desenvolvimento da esfera sensorial, dos conceitos espaciais e da atividade mental, evidenciando aspectos emotivo-volitivos da atividade psíquica. “O caráter específico das atividades práticas consiste em que nelas há uma relação particular entre o pensamento e a ação” (ZANKOV, 1984, p. 119).

Na atividade prática, segundo o autor, interessa-lhe analisar os meios e o procedimento de ação na tarefa, assim como os aspectos qualitativos dessa ação, rapidez, precisão, a existência de autocontrole no processo da atividade, e o caráter dos erros cometidos.

No exemplo apresentado, o de confecção de uma caixa de papelão, L. V. Zankov (1984) destaca três etapas importantes na execução da tarefa: o planejamento que consistia na escolha dos procedimentos e meios de executar a tarefa; a execução e a explicação verbal, durante a qual o aluno deveria enumerar as diferentes operações em sua ordem adequada, associando-as ao pensado na fase de planejamento.

Na apresentação das fases das atividades de desenvolvimento dos alunos: a observação, a atividade mental e a atividade prática, podemos perceber que elas foram tratadas, de fato, como unidades, pois uma está presente na outra. Além disso, essas atividades deixam clara a ascensão do abstrato ao concreto, categoria importante na perspectiva do materialismo dialético.

1.5 Síntese de pontos importantes do sistema didático zankoviano e a sua relação com a organização didática de ensino proposto

Ao finalizar a pesquisa bibliográfica acerca do sistema didático zankoviano, num movimento de síntese, de busca de ascensão do abstrato ao concreto, relacionamos alguns aspectos importantes desse sistema, visando pensar a organização do ensino em nossa pesquisa, que toma como objeto a organização do ensino dos logaritmos. Esse movimento da teoria à prática está sintetizado no Quadro 2.

Quadro 2 – Premissas do sistema didático zankoviano e a organização do sistema para o ensino dos logaritmos

SISTEMA ZANKOVIANO	ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA PARA O ENSINO DOS LOGARITMOS
1) Empregar o experimento, na qualidade de método científico geral, que permite estudar as relações de determinadas facetas do processo de ensino-aprendizagem e encontrar as causas que condicionam a necessidade de que surja o fenômeno dado;	1) Analisar as causas que condicionam a necessidade de investimentos no ensino-aprendizagem dos logaritmos, a partir dos resultados das avaliações sistêmicas, resultados gerais dos alunos em Matemática nas avaliações escolares regulares e nossa experiência como professores de Matemática nos diversos níveis de ensino.
2) Estudar o objeto no seu movimento, no processo de sua constituição e ao longo de seu desenvolvimento;	2) Apresentar através de uma análise dos manuais (livros e apostilas) didáticos utilizados nas escolas públicas e privadas, o movimento do ensino dos logaritmos que possui um movimento característico nos últimos 20 anos.
3) Fazer um estudo comparado de sistemas de ensino que se diferenciem por sua estrutura e eficácia e, portanto, a criação de grupos experimentais e grupos de controle;	3) Foge ao escopo desta pesquisa.
4) Estudar a lógica objetiva do processo de ensino através da revelação das vias que permitem que sejam alcançados os resultados desejados no desenvolvimento dos estudantes;	4) Através da preparação, aplicação, desenvolvimento e observação das tarefas de estudo, procurar a lógica objetiva do processo de ensino-aprendizagem que promova o desenvolvimento geral dos alunos.
5) Analisar o estado da prática geral do ensino primário e das características próprias do ensino tradicional;	5) Analisar o ensino geral da matemática, bem como suas características a partir dos manuais (livros e apostilas) didáticos observados e descritos nesta pesquisa e de outras fontes, como a LDB, os PCN, a BNCC;
6) Aplicar o método estrutural funcional de estudo dos objetos, que leva ao tratamento das funções que são próprias à estrutura de um sistema de ensino desconhecido;	6) Adotar perspectivas do método experimental zankoviano como meio de validar nossa pesquisa;

7) Estudar a atividade psíquica dos estudantes em lugar do procedimento contemplativo;	7) Procurar estudar a atividade psíquica dos alunos mais que seus processos contemplativos;
8) Estudar o desenvolvimento integral ou geral dos alunos com base na ideia da correlação entre o todo e as partes, dando preponderância ao todo;	8) Buscar evidências do desenvolvimento integral dos alunos, buscando a relação parte e todo;
9) Estudar o desenvolvimento integral dos alunos a partir de um sistema integrado de ações pedagógicas, sobre a base de que o sistema de processos internos é condicionado por certo sistema de ações externas;	9) As três tarefas propostas propõem ações pedagógicas internas condicionadas por ações externas que formalizam processos de constituição do todo e parte referentes à rede de conhecimentos necessários à formação do conceito dos logaritmos, bem como buscam evidenciar os motivos e desenvolvimento psíquico do aluno;
10) Estudar o desenvolvimento integral do aluno a partir do papel que desempenha a assimilação dos conceitos científicos em um sistema de conceitos;	10) Ajustar gradativamente um conjunto de ideias que formem uma rede de conceitos que guie os alunos até o conceito científico dos logaritmos;
11) Estudar o papel da educação no desenvolvimento, tendo por base o papel determinante e regulador dos princípios didáticos no concernente à metodologia de ensino;	11) Observar princípios didáticos zankovianos na confecção das tarefas, bem como em sua análise final.
12) Levar em consideração a importância determinante que o princípio da pesquisa multifacetária desempenha no estudo do problema do ensino, na educação e no desenvolvimento, a ideia de estudar todos os aspectos do objeto.	12) Buscar observar todos os aspectos do ensino-aprendizagem dos logaritmos a fim de identificar seus aspectos.

Desse modo, procuramos observar os pressupostos e princípios didáticos da pesquisa em L. V. Zankov, e assim, proporcionar um resultado mais próximo da realidade possível.

2 LOGARITMOS: ASPECTOS HISTÓRICOS, LÓGICOS E CURRICULARES (PCN, BNCC, LDB)

Neste capítulo, tratamos o objeto matemático deste estudo, o conceito dos logaritmos em seus aspectos históricos e lógicos, buscando elementos para a organização de um sistema didático para o seu ensino, que conduza à aproximação de sua essência. Também, trazemos neste capítulo a proposta de ensino dos logaritmos no Ensino Médio, nos documentos que, ainda, direcionam o seu estudo no país, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, as propostas da Base Nacional Comum Curricular, aprovada em 2018, ainda não implementada. Também, o ensino dos logaritmos em alguns livros didáticos, três deles recomendados pelo Plano Nacional do Livro Didático – PNLD.

2.1 Aspectos lógicos e históricos do conceito dos logaritmos

Na organização do ensino numa perspectiva dialética, considerando as leis do movimento do pensamento, torna-se fundamental ao nos aproximarmos de um objeto, conhecermos os aspectos histórico-lógicos desse objeto. Esses aspectos, segundo Sousa (2018), estão relacionados a conceitos que estão na base da dialética materialista do conhecimento, como o de totalidade, de movimento, de fluência, de interdependência.

Para Kopnin (1978, p. 183),

Por histórico subte-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico como seu conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações.

Assim, podemos falar no par histórico-lógico, constituindo uma unidade, em que o histórico é o objeto do pensamento e o lógico, os modos de operar com ele, na sua complexidade e contradições, na busca de sua essência. No processo de formação de conceitos estão presentes a indução e a dedução – a análise, que parte do concreto real ao abstrato, e a síntese, que parte do abstrato ao concreto pensado, num movimento de ascensão do abstrato ao concreto. “O conceito é a confluência, a síntese das mais diversas ideias, o resultado de um longo processo de conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 191).

Assim, neste capítulo, vamos apresentar aspectos do movimento histórico-lógico dos logaritmos.

Para situarmos historicamente os logaritmos, consultamos livros de matemática e de história da matemática (HOWARD, 2004; LIMA, WAGNER, 2001), artigo (PRECIOSO; PEDROSO, 2013) e dissertações (SOARES, 2011; PEREIRA, 2010) que tratam do assunto. Foi possível constatar que se trata de uma longa história, com contribuições de muitos matemáticos, envolvendo conhecimentos que extrapolam o nível do Ensino Médio e os objetivos desta pesquisa. Esse é o caso do número e , que, segundo Precioso e Pedroso (2013, p.31), ao tratar da sua história, afirmam que as suas origens são um pouco incertas, mas sua presença é inevitável em vários ramos da ciência. Abordaremos, portanto, alguns aspectos históricos que embasaram esta pesquisa.

Perto do início do século XVII, John Napier revelou sua criação dos logaritmos, associando-os à necessidade de executar cálculos numéricos de forma mais rápida e precisa, tendo em conta demandas sociais daquele tempo, em especial, da Astronomia e da Navegação

Muitos campos nos quais os cálculos numéricos são importantes, como a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra fizeram com que as demandas para que esses cálculos se tornassem cada vez mais rápidos e precisos crescessem sempre e continuamente. Quatro notáveis invenções vieram atender sucessivamente essas demandas crescentes: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. (HOWARD, 2004, p. 341)

O poder dos logaritmos como instrumento de cálculo numérico repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração. A fórmula trigonométrica $2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)$ era bem conhecida na época de Napier, e visivelmente uma predecessora da ideia dos logaritmos. Neste caso, o produto de dois números, $2 \cos A \cos B$, é substituído pela soma dos dois números, $\cos(A + B)$ e $\cos(A - B)$. Podemos estender essa fórmula como uma ferramenta para converter o produto de dois números quaisquer na soma de dois outros números.

Não podemos nos esquecer das identidades trigonométricas, também conhecidas como fórmulas de Werner, pois ao que parece o alemão Johannes Werner (1468-1528) as usou para simplificar cálculos, envolvendo demandas que aparecem em astronomia. O uso dessas fórmulas e o método de transformação do produto em soma ficaram conhecidos como prostaférese, palavra que tem origem grega e significa “adição e

subtração”. A divisão pode ser tratada da mesma maneira, utilizando as fórmulas de Werner¹⁶. Essas fórmulas contribuíram para que Napier representasse os logaritmos em termos trigonométricos.

É sabido que Napier estava a par do método da prostaférese, e é possível que tenha sofrido influência dele, pois, segundo os livros de história da matemática, teria sido muito difícil explicar o motivo de Napier ter restringido seus logaritmos inicialmente aos senos de ângulos.

Mas a abordagem de Napier para eliminar o fantasma das longas multiplicações e divisões difere consideravelmente da prostaférese, e se baseia no fato de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^m, \dots, b^n, \dots$ os da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots$ então o produto $b^m b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma $m + n$ dos termos dos termos correspondentes da segunda progressão. (HOWARD, 2004, p. 344)

Por meio das sequências geométrica e aritmética e da propriedade indicada na citação, podemos transformar multiplicações em soma. Por exemplo: seja $b = 10$, então;

Progressão geométrica - PG:	10,	10^2 ,	10^3 ,	10^4 ,	10^5 ,	10^6
	10,	100,	1000,	10 000,	100 000,	1 000 000
Progressão aritmética - PA:	1,	2,	3,	4,	5,	6..... (expoentes)

Se desejarmos calcular: $100 \times 10\,000$. Como $100 = 10^2$ e $10\,000 = 10^4$, podemos escrever $100 \times 10\,000 = 10^2 \times 10^4 = 10^{2+4} = 10^6 = 1\,000\,000$.

E se desejássemos calcular 25×30 ? Esses números não estão nas sequências. Os matemáticos da época utilizavam um processo chamado de interpolação, que não será tratado aqui, pois foge ao escopo deste trabalho.

Nas progressões geométricas crescentes, os termos crescem rapidamente. Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos, de modo que se pudesse usar um número menor de interpolações para preencher as lacunas entre os termos nas correspondências precedentes, dever-se-ia escolher o número b bem próximo

¹⁶ As principais fórmulas de Werner são:
 $2\cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$;
 $2\sin A \cdot \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$;
 $2\cos A \cdot \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$;
 $2\sin A \cdot \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$;

de 1. Com essa finalidade, Napier tomou $1 - 1/10^7 = 0,9999999$ ¹⁷ para b . Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7 . Então, se $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$ ele chamava L de “logaritmo” do número N . Portanto o logaritmo já aparece como um **expoente**. Assim, o logaritmo de Napier de 10^7 é 0, e o de $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$ é 1.

Vejamos, conforme explica Soares (2011, p. 42), o que ocorre:

$$\text{Se } N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L, \text{ então, } N = 10^7 \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) 10^7\right]^{\frac{L}{10^7}}.$$

Observando a expressão que está dentro do colchete, é possível perceber que quanto mais a potência inteira de dez cresce, mais essa expressão se aproxima de um número, cujo valor é, aproximadamente, 0,3679. Por exemplo:

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} = 0,3486$$

$$\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)^{100} = 0,3660$$

$$\left(1 - \frac{1}{10^3}\right)^{1000} = 0,3677$$

$$\left(1 - \frac{1}{10^4}\right)^{10000} = 0,3678$$

Esse número, para o qual essa sequência tende, é o inverso do número e chamado “número de Euler”, também conhecido como número neperiano. Deste modo de pensar e agir de Napier, é possível encontrar o logaritmo na base $1/e$, pois:

$$\left(1 - 1/10^7\right)^{10^7} = (1 - 1/n)^n = 1/e.$$

Isto é, o limite da sequência, que mostramos anteriormente, é igual a $1/e$.

Napier trabalhou 20 anos nessa teoria antes de explanar os princípios de seu trabalho em termos geométricos. Ele publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 em um texto intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa Lei dos Logaritmos). O trabalho contém uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco.

Embora Napier, tivesse “construído” o inverso do número e , ele foi explorado e formalizado por outros cientistas e matemáticos ao final do século XVII e no decorrer do século XVIII.

[...] o número e , ao contrário do número π , deve sua existência, praticamente, aos bons resultados conseguidos com os novos métodos e novas técnicas do Cálculo, introduzidas por Isaac Newton (1642-

¹⁷ Essa escolha está relacionada com a interpretação geométrica trabalhada por Napier, que não abordaremos aqui, pois foge ao escopo deste trabalho.

1727) e Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716). Muitos problemas de diversas áreas, de mecânica principalmente, foram solucionados no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. Isso foi possível, pois as soluções desses problemas dependiam estritamente da resolução de equações diferenciais que, frequentemente, contam com a presença do e como base das exponenciais que constituem as chamadas funções hiperbólicas. (PRECIOSO; PEDROSO, 2013, p. 39-40)

Leonhard Euler (1707-1783), matemático com extensa e variada produção científica, foi quem “pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número e da função e^x ao dizer: ‘Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos e que é 2, 718281...’”. (PRECIOSO; PEDROSO, 2013, p. 42). Desta forma, o número e é a base dos logaritmos naturais, o que não foi estabelecido por Napier, uma vez que ele não trabalhou com a ideia de base e o número escolhido por ele é o inverso de e . O número e foi tratado como um número irracional, tendo sido, posteriormente, considerado um número transcendente. Assim:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

No ano seguinte à publicação de Napier, Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria de *Gresham College* de Londres e, posteriormente, professor de Oxford, viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns.

Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos, ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal. Para outro sistema de numeração de base b e para propósitos computacionais, é claro que seriam mais convencionais tábuas dos logaritmos também na base b .

Briggs dedicou-se a construir a tábua dos logaritmos na base 10 e publicou em 1624 sua *Arithmetica logarithmica*, que contemplava uma tábua dos logaritmos comuns, com quatorze casas decimais, dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. O espaço entre 20.000 e 90.000 foi preenchido posteriormente com a ajuda de amigos e colaboradores. Junto com Vlacq, Briggs publicou quatro tábuas dos logaritmos fundamentais, superadas recentemente, pois, entre 1924 e 1949, foram publicadas tábuas

dos logaritmos com vinte casas decimais como parte da comemoração dos trezentos anos de descoberta dos logaritmos.

Tem-se que a palavra *logaritmo* significa “número de razão” e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão número artificial. Briggs introduziu a palavra *mantissa*, um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente “adição” ou “contrapeso”, e que, no século XVI, passou a significar “apêndice”. O termo “característica” também foi sugerido por Briggs. A característica e a *mantissa* são componentes dos logaritmos na base 10, a característica é a parte inteira do log e a mantissa é a parte decimal.

A invenção de Napier foi recebida com entusiasmo por toda a Europa. Na astronomia, Laplace afirmou que a descoberta dos logaritmos “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”.

Outro matemático que tem seu nome ligado ao surgimento dos logaritmos é Jobst Bürgi (1552-1632), suíço, que publicou seus resultados e sua tábua dos logaritmos em 1620, seis anos depois de Napier. Acredita-se que Napier tenha tido a ideia, primeiro. A principal diferença entre as propostas de Bürgi e de Napier está no valor numérico que ele considerou para ter um número próximo de 1, como base da PG. Enquanto Napier considerou o número $1 - 1/10^7 = 0,9999999$, Bürgi considerou $1 + 1/10^4 = 1,0001$. O primeiro da PG para Napier era 10^7 , para Bürgi era 10^8 .

Um logaritmo é universalmente considerado como um **expoente**.

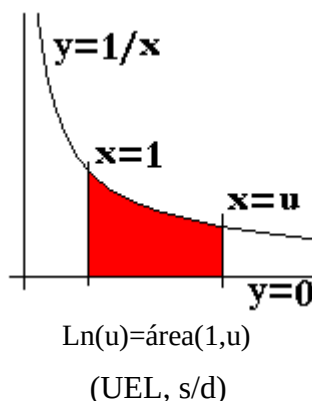
Se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b com algumas restrições que serão tratadas mais adiante.

Dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Fato este muito pitoresco, visto que, na história da matemática, os logaritmos foram descobertos antes dos expoentes.

O logaritmo como função está ligado ao estudo da quadratura (cálculo de áreas) da hipérbole, que tem em Pierre Fermat (1601-1665) um dos estudiosos que se dedicou a esses estudos. Porém foi um jesuíta belga, Saint-Vincent quem, em 1665, conseguiu resolver o problema, usando a integral de Riemann. (PRECIOSO; PEDROSA, 2013).

O logaritmo natural de um número u , muitas vezes, denotado por $\ln(u)$, pode ser definido do ponto de vista geométrico, como área da região

plana localizada sob o gráfico da curva $y = 1/x$, acima do eixo $y = 0$, entre as retas $x=1$ e $x=u$, que pode ser vista no desenho abaixo:



Desse modo, de acordo com Soares (2011), podemos falar em três concepções básicas: a concepção geométrica, elaborada por Napier, porque partiu das razões entre medidas de segmentos de retas; a aritmética, também desenvolvida por Napier e Bürgi; a algébrico-funcional, estabelecendo a relação entre função exponencial e logarítmica.

Os logaritmos são ensinados na educação básica e no início dos cursos superiores há muito tempo, variando a profundidade com que se adentra o assunto em cada período histórico do ensino. O uso da tábua dos logaritmos era comum nesses cursos, mas, hoje, com o advento das calculadoras, não há mais a necessidade da utilização deste instrumento para executar cálculos. Também um instrumento antecessor da máquina de calcular, denominado “régua de cálculo”, cuja base de construção, era o conceito dos logaritmos, desapareceu de nosso cotidiano, com o advento das tecnologias digitais no século XX, tornando-se uma peça de museu, embora tenha sido bastante utilizada, principalmente, pelos engenheiros.

Hoje, no ensino de matemática, dá-se ênfase ao conceito de “função”, considerado um conceito fundamental da matemática. Assim, o estudo dos logaritmos aparece associado ao de “função logarítmica”, que é parte vital na análise e modelagem matemática de muitos eventos naturais. O estudo da função logarítmica e da sua “inversa”, a função exponencial, permanecem como parte importante do ensino da matemática. De modo especial, o seu conceito e, conseqüentemente, as suas aplicações, embora como instrumento de cálculo aritmético, já não tenha mais utilidade.

Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial definida como $f(x) = a^x$, onde $(a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } a \neq 1)$, no conjunto dos números reais. Lima e Wagner (2001, p. 53), assim caracterizam a função exponencial:

Se a é um número positivo, diferente de 1, então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente, permanece crescente no domínio, se não, permanece decrescente) $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para quaisquer $x, y \in R$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x .

Desse modo, a função exponencial é uma ferramenta importante para numerosas aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática. Com ela, podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas.

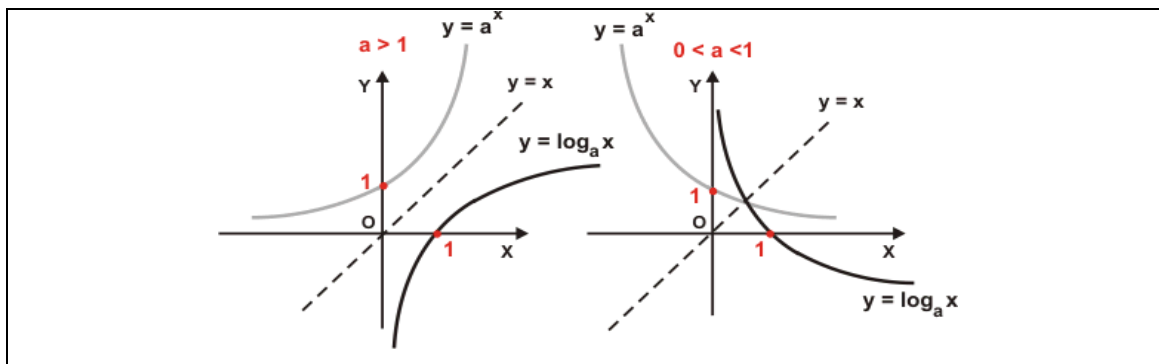
Atualmente, em 2020, em tempos de pandemia causada pelo coronavírus, denominado SARS-CoV-2, a COVID – 19¹⁸, o crescimento do número de infectados, em alguns momentos, apresentou crescimento exponencial e muito se falou sobre essa função. O jornal Folha de São Paulo trouxe uma matéria sobre esse assunto no dia 17 de março de 2020, na qual se lê: “Na Itália, que já superou a marca dos 24 mil infectados, o gráfico de como a epidemia se desenrolou tem a seguinte função ajustada: $y = 3,28^{0,2x}$, em que x é o número de dias e y é o número de infectados”. (ALVES, 2020, p. B4)

Na definição da função logarítmica, sua inversa, devemos levar em consideração algumas condições que são decorrentes das características da função exponencial. Assim, a função logarítmica é uma função definida para números reais maiores do que zero, portanto, o seu domínio é R^+ e o seu contradomínio é R , isto é, o logaritmo pode ser qualquer número real.

$$f(x) = \log_a x \text{ para } (a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1) . \text{ Se } \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

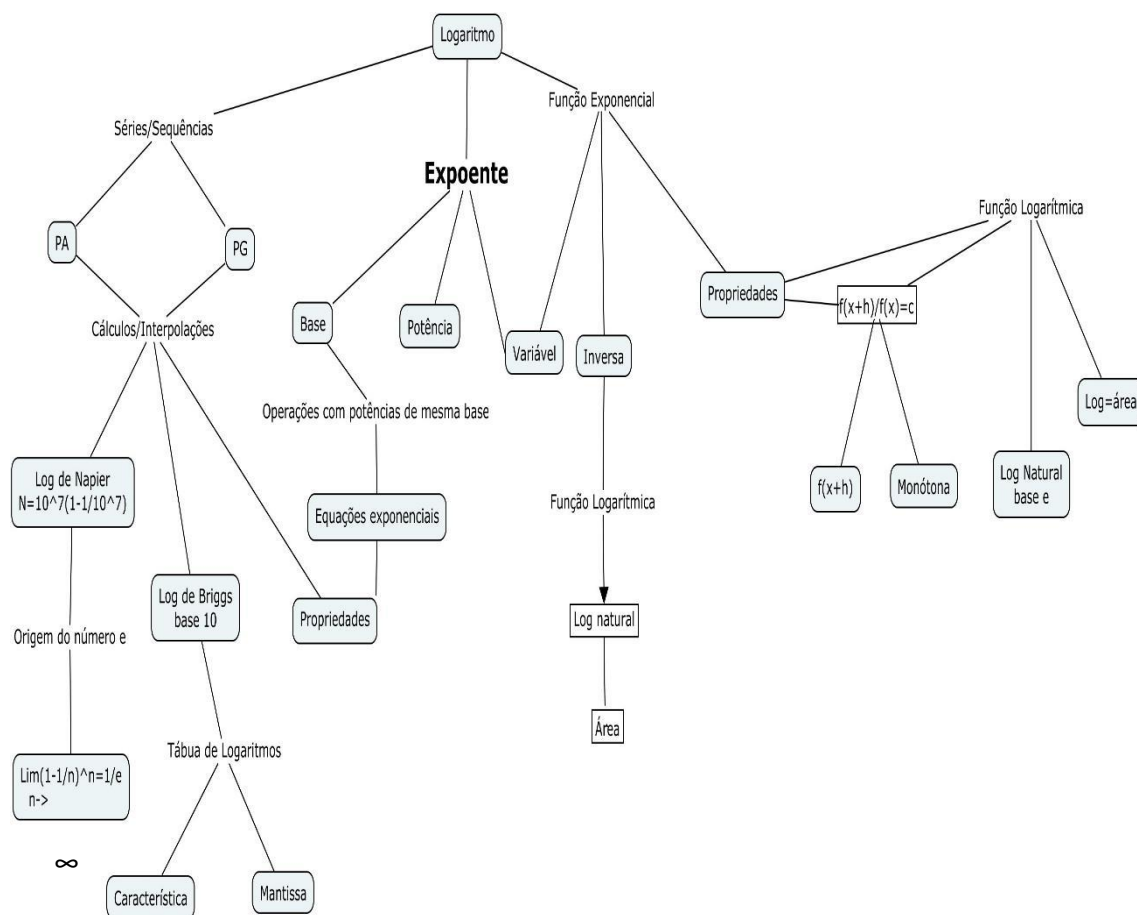
Representando, graficamente, as funções exponenciais e logarítmicas, temos:

¹⁸ A COVID-19 é uma doença causada pelo coronavírus, denominado SARS-CoV-2, que apresenta um espectro clínico variando de infecções assintomáticas a quadros graves. Em dezembro de 2019, houve a transmissão de um novo coronavírus (SARS-CoV-2), o qual foi identificado em Wuhan na China e causou a COVID-19, sendo em seguida disseminada e transmitida pessoa a pessoa.



Esse estudo do histórico-lógico dos logaritmos nos permitiu perceber que se trata de uma rede de conceitos que se conectam para dar sentido ao conceito dos logaritmos. Entendemos como rede conceitual dos logaritmos, aqueles conceitos elementares que auxiliam na compreensão, apresentação e operação com os logaritmos. Para sintetizar o nosso entendimento, apresentamos o esquema a seguir (Figura 1).

Figura 1 – Rede conceitual dos logaritmos.



Fonte: Elaborada pelo Autor, 2019.

Essa rede conceitual orientou a elaboração das tarefas de estudo que foram elaboradas e propostas no experimento de ensino realizado nesta pesquisa. Cabe considerar que se trata de um esquema conceitual voltado para o ensino dos logaritmos, portanto representa um esforço do pesquisador de transformar o conteúdo científico em um conteúdo ensinável, buscando focar a apreensão de sua essência.

2.2 O ensino dos logaritmos em pesquisas na pós-graduação

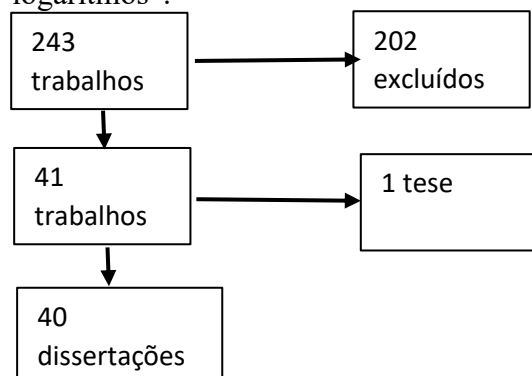
Em nossa pesquisa bibliográfica, realizamos, também, no período de novembro de 2016 a abril de 2017, um levantamento das produções sobre o ensino dos logaritmos, conforme já destacamos na Introdução.

Utilizando como descritores “ensino dos logaritmos” e “logaritmo”, e tendo como corte temporal os últimos 20 anos, encontramos um total de 243 teses e dissertações, das quais selecionamos 41 por terem como objeto o ensino dos logaritmos. Destes, 40 eram dissertações e um apenas tese. Das dissertações, 36 foram produzidas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), quatro delas produzidas em programas de pós-graduação acadêmicos, e uma não foi possível identificar. Os trabalhos selecionados são produções do período de 2005 a 2016. No PROFMAT, o trabalho final é um produto, que pode ser apresentado em diferentes formatos, conforme previsto no Regimento do Programa¹⁹.

Dessas produções, 31 dissertações tratam do estudo dos logaritmos no Ensino Médio; três referem-se à formação continuada de professores, seis tratam dos logaritmos no Ensino Médio juntamente com a necessidade de formação continuada do professor, e uma delas não foi possível identificar. Constatamos que 35 trabalhos foram realizados em Instituições de Ensino Superior (IES) públicas, e, apenas um, em IES privada.

¹⁹ Art. 21 O trabalho de conclusão final do PROFMAT poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, relatórios finais de pesquisa, softwares, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, sem prejuízo de outros formatos, de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e impacto na prática didática em sala de aula. (BRASIL, 2017, s/p)

Figura 2 – Trabalhos selecionados a partir dos descritores “ensino dos logaritmos” e “logaritmos”.



Bancos de dados consultados. Elaborada pelo autor, 2019

Os trabalhos selecionados abordam de diferentes formas o tema “logaritmo”, ora considerando o conceito, ora a abordagem metodológica para o seu ensino e ora a abordagem do ensino, no âmbito da pesquisa. Na Tabela 1, apresentamos essa categorização e os números correspondentes.

Tabela 1 - Tipos de abordagens dos logaritmos nos trabalhos selecionados

Especificação	Número	Especificação	Número
ABORDAGEM MATEMÁTICA DO			
LOG		Abordagem histórica	8
Trabalham o conceito dos logaritmos	2	Uso de softwares	9
Abordagem geométrica	8	Uso da calculadora	5
Abordagem pela potência	1	Uso da régua de cálculo	1
Abordagem pela PA e PG	5	ABORDAGEM DE ENSINO/PESQUISA	
Abordagem pelos fractais	2	Engenharia didática	2
Log. como inversa da exponencial	8	Sequência de ensino	1
ABORDAGEM METODOLÓGICA DE LOG		Sequência didática	4
Abordagem pela resolução de problemas	12	Atividade didática	1
Abordagem pela análise do livro didático	5	Trajetória hipotética de aprendizagem (THA)	1

Abordagem pela matemática da música	1			
Abordagem pela modelagem matemática	2			
Abordagem pela matemática financeira	3			
Abordagem pelos objetos de aprendizagem (OA)	1			

Legenda: PA: progressão aritmética, PG: progressão geométrica, Log. Logaritmo.

Fonte: Elaborada pelo Autor, 2019.

Observando Tabela 1, é possível constatar, quanto às abordagens do conceito dos logaritmos nas produções selecionadas, que predominam a geométrica, a dos logaritmos como inversa da exponencial e, em menor número, pela progressão aritmética e geométrica. Quanto à abordagem metodológica para o ensino, destacam-se a resolução de problemas, a abordagem histórica e o uso de software. Quanto à metodologia de ensino/pesquisa, aparece a sequência didática.

Os diversos trabalhos analisados assumem, em sua maioria, propostas direcionadas ao ensino-aprendizagem dos logaritmos para o Ensino Médio, sendo discurso comum que o ensino dos logaritmos é historicamente difícil. São vários os motivos associados a isto elencados pelos autores, sendo os mais comuns: a falta de contexto, discurso teórico não atraente, a falta de uso da interdisciplinaridade, dentre outros associados à falta de efetividade para despertar o interesse e atenção dos alunos.

Pelo fato de o ensino-aprendizagem dos logaritmos ser apresentado como preocupante, os trabalhos procuram propor soluções para os problemas de tais abordagens no ensino médio como no ensino superior, porém assumem em suas propostas abordagens aparentemente inconsistentes com o nível escolar definido.

Nas propostas de aplicações, encontramos a apresentação de situações problemas tais como, a dos juros compostos, intensidade sonora, escala Richter, cálculo de PH, método carbono 14, lei de resfriamento de um corpo, magnitude aparente de uma estrela, escala musical, pressão atmosférica, crescimento populacional, dentre outros.

Apesar dos esforços dos pesquisadores na proposição de exemplos, em sua maioria, eles acabam por se tornarem meros exemplos ilustrativos, não alcançando seu papel de instrumentos para a apropriação de uma rede conceitual de conhecimentos.

Apesar disso, os trabalhos pesquisados enriquecem os leitores com propostas interessantes de sequências didáticas, experimentos, uso de tecnologias e propostas de situações problema.

De qualquer forma, estes trabalhos justificam a necessidade da continuação de estudos relacionados ao ensino-aprendizagem dos logaritmos e de recursos didático-pedagógicos para tal fim, justificando assim a pesquisa realizada neste trabalho.

2.3 O ensino dos logaritmos nos PCN e na BNCC do Ensino Médio

Embora tenha sido homologada em dezembro de 2018, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), quando iniciamos essa pesquisa ainda estavam vigentes os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio (BRASIL, 1999). Estamos, portanto, em um momento de transição de uma proposta para a outra. Por este motivo ainda trazemos os PCN neste capítulo.

Segundo os PCN do Ensino Médio, dentre as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio, estão à capacidade de “[...] aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.” (BRASIL, 1999, p. 46). Esses objetivos são importantes no ensino de matemática na educação básica, porém consideramos que “competências” e “habilidades” não se constroem sem os conhecimentos científicos, que cabe à escola criar condições para a sua apropriação.

Um dos princípios, que orientaram os PCN do Ensino Médio, é o da “interdisciplinaridade” do aprendizado científico e matemático, respeitando a necessidade da disciplinaridade para a apropriação dos conhecimentos teóricos de cada área. A interdisciplinaridade é, como vimos, no capítulo 2, uma das diretrizes do sistema didático zankoviano. Entretanto na BNCC essa abordagem não se constitui em um princípio.

De acordo com os PCN, são objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento:

[...] envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 1999, p. 6)

Esse objetivo propõe os conhecimentos teóricos e os conhecimentos práticos, que Zankov (1984) apresenta como elementos do desenvolvimento dos estudantes, tratado no capítulo 2 desta tese.

Em relação à Matemática, os PCN a consideram uma disciplina singular, não, apenas por seu caráter utilitário, presente em grande parte das atividades da vida contemporânea, em diferentes campos, quando se trata de ordenar, de quantificar, de analisar variações, de codificar.

A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (BRASIL, 1999, p. 9).

Desse modo, os PCN apontam para o valor formativo do ensino de Matemática, o que defendemos nesta tese – seu ensino pode contribuir para o desenvolvimento das capacidades psíquicas do homem e para o seu desenvolvimento geral, no seu processo de humanização. Cabe lembrar a sua importância como linguagem para a ciência.

Ao tratar do ensino da Matemática, os PCN alertam para se evitar a memorização indiscriminada de algoritmos, o que, também, foi criticado por L. V. Zankov (1984), ao trazer os problemas do ensino tradicional – um ensino em ritmo lento, pois enfatizando exercícios repetitivos.

Com relação ao ensino, os PCN propõem que: os conhecimentos prévios dos alunos sejam considerados; a importância de organização do ensino que promova a aprendizagem de todos os alunos; a adoção de métodos de aprendizagem ativos e interativos; oportunizar a criação de modelos explicativos, criando situações em que o aluno é instigado e desafiado, questionado; a valorização de atividades coletivas; a resolução de problemas (BRASIL, 1999). Nesse sentido, também, há coerência entre essas propostas e o sistema zankoviano, que estamos propondo.

Em se tratando do ensino dos logaritmos, os PCN + Ensino Médio (BRASIL, 2002) destacam que a aprendizagem desse conteúdo perde contexto, quando os professores não explicitam sua importância histórica e social “... em questões tecnológicas e em outras ciências, para expressar grandezas cujo intervalo de variação é exponencial.” (BRASIL, 2002, p. 26).

Percebe-se que as poucas aplicações dos logaritmos trazidas nos materiais escolares tratam de assuntos como a escala logarítmica de decibéis, a definição do Ph de substâncias, a variação da população de microorganismos, a escala Richter dos abalos sísmicos, a matemática financeira com cálculo de juros e a meia vida de elementos radiativos. Apesar da variedade das possibilidades de aplicações, os materiais trazem comumente apenas um ou dois casos destas aplicações, desprivilegiando as indicações apresentadas pelos PCN.

Os logaritmos fazem parte dos conteúdos que devem ser ensinados no 1º ano do Ensino Médio e, na maioria das vezes, o ensino deste tema se baseia em longas e tediosas resoluções de equações e inequações exponenciais, indo no sentido contrário das orientações dos PCN, tornando o tema frustrante para os estudantes e para o professor.

No que se refere à BNCC, conforme já abordamos, é um documento centrado no desenvolvimento de competências e habilidades. No capítulo do Ensino Médio, o ensino da Matemática é considerado de forma estreita, restringindo-se à perspectiva de aplicação à realidade tratada. Uma das competências específicas enunciada no documento é “Interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas de modo a construir a argumentação consistente” (BRASIL, 2018, p. 535).

Dentre as habilidades relacionadas a essa competência, destacamos:

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, PH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 536)

A descrição desta habilidade chama a atenção para um aspecto importante que se refere ao tipo de situação cuja análise e modelação se faz por uma função logarítmica. Essa é uma discussão necessária que procuramos explorar nas tarefas propostas, pois se constitui em fonte de dificuldade. Entretanto, voltamos a destacar que as aplicações práticas e o desenvolvimento de competências não são possíveis sem a apropriação adequada dos conceitos envolvidos.

Outra competência é “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas”

(BRASIL, 2018, p. 538). Relacionada a essa competência, separamos a habilidade que trata de funções exponencial e logarítmica:

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BRASIL, 2018, p. 539)

Em nosso modo de conceber, o essencial dos logaritmos é compreender seu conceito fundamental, para assim entender que as funções exponenciais, consequentemente as logarítmicas, como inversas que são, modelam fenômenos nos quais a variável dependente cresce ou decresce muito rapidamente, sendo as variações proporcionais a uma constante. Esta característica tem diversas aplicações em outras áreas além da Matemática, como Economia, Biologia, Física, Geografia, Agronomia, Química dentre outras.

Com o intuito de verificarmos as afirmações acima, consultamos livros didáticos de Matemática pertencentes a momentos históricos diferentes, o que trataremos no próximo capítulo.

2.4 O ensino dos logaritmos nos livros didáticos

Partindo do pressuposto de que a escola é o lugar para a aprendizagem dos conhecimentos historicamente construídos pela humanidade e que devem ser apropriados pelas novas gerações, todo o material que contribui para que essa finalidade possa se concretizar com a maior eficiência tem importância. Dentre esses materiais, está o livro didático.

No sistema zankoviano, a partir do qual esse trabalho se realizou, o livro didático é um dos pilares e a sua produção mereceu um cuidado especial dos envolvidos. A elaboração de manuais experimentais e livros de consulta para os mestres foi uma das etapas do experimento.

Neste sentido, coloca-se a necessidade de as propostas de ensino incluírem a análise desse material e, quando possível, ter a produção como uma meta. Além disso, o livro didático no Brasil, na educação básica, é um dos recursos mais utilizados, ao lado das apostilas distribuída pelos grandes sistemas de ensino. Num contexto, de muitas situações adversas, o livro assume o papel de único instrumento auxiliar (SILVA, 2012).

Sabemos que, ao tratarmos da análise de livros didáticos existem muitas variáveis que podem ser consideradas, tais como a abordagem dos conteúdos, a questão mercadológica, a formação docente, a política educacional, dentre outros que compõem a cultura do livro didático no Brasil.

Neste experimento, optamos por executar nossa análise embasada nos critérios destacados por LIMA (2001), em sua obra sobre os logaritmos em que faz uma análise dos livros didáticos. São eles: conceituação dos logaritmos; formulação, definições e proposições que estabelecem conexões com outros conceitos essenciais ao conceito dos logaritmos; conhecimentos prévios relacionados com o assunto; tipos e quantidade de atividades para os alunos; propostas de aplicações dos logaritmos. Verificamos, ainda, como se deu a introdução do conceito, apresentação de problemas e inclusão de fatos históricos. Antes de começarmos, faremos uma apresentação de cada um deles.

Conceituação dos logaritmos – se o conceito apresentado no livro compreende a formulação de definições, enunciados de proposições, estabelecendo conexões entre os diversos conceitos que formam a teia essencial do conceito central, bem como transposição didática dos mesmos sob diferentes pontos de vista.

Formulação, definições e proposições que estabelecem conexões com outros conceitos essenciais ao conceito dos logaritmos – se há o investimento na apropriação de habilidades tanto de manuseio de equações, quanto de fórmulas, associadas à leitura e construções geométricas elementares, com fim ao desenvolvimento de estratégias que incentivem os alunos a prosseguirem em seus estudos sem perder tempo e/ou consumir mais energia que o necessário.

Conhecimentos prévios relacionados com o assunto – se os vários temas tratados no livro estão relacionados uns com os outros, sempre que possível. Como exemplo, para o ensino dos logaritmos, podemos citar a PA e a PG, a equação e a função exponencial, dentre outros.

Tipos e quantidade de atividades para os alunos – se não há abuso de manipulações complicadas, além de excesso de repetições de exercícios de mesmo teor.

Propostas de aplicações dos logaritmos – se há exercícios sobre logaritmos onde a própria palavra “logaritmo” não apareça no enunciado, além do uso de problemas de aplicações dos logaritmos no cotidiano ou em exemplos relacionados a ciência da natureza, para que se conduza o aluno para além da mera repetição de algoritmos.

Um outro fator considerado importante em nossa análise é a posição do tema “logaritmos” no livro, pois percebemos através de nossa experiência como professor, que os conteúdos localizados ao final dos livros didáticos acabam por serem apresentados de maneira rápida e superficial, devido ao pouco tempo restante e cansaço de professores e alunos, além dos casos em que pelo atraso dos conteúdos no decorrer do ano, o conteúdo dos capítulos finais acaba por não ser abordado.

Foram analisados sete livros, mais a apostila do 1º ano utilizada pelo colégio onde se deu a pesquisa, publicados de 1996 a 2012. Destacamos que neste período é quando houve mudanças importantes nas diferentes abordagens do conteúdo, devido ao Ensino Médio passar a fazer parte da Educação Básica, seguindo as definições da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB 9394/96, na qual os objetivos do Ensino Médio deixam de enfatizar o caráter preparatório para o ensino superior ou somente profissionalizante, para assumir a função de complementar a educação básica. Agora, a articulação e o sentido dos conhecimentos devem ser garantidos já no ensino médio. (PCN+, 2002, p. 8).

A inserção dos logaritmos, segundo Zuin (2007), nos tópicos de álgebra dos livros didáticos ocorreu a partir da Reforma da Educação Brasileira, que foi estabelecida no período colonial pelo governo vigente, para melhorar a Educação e o Ensino no Brasil. Destaca que foi uma proposta de Benjamin Constant, no Decreto nº 891 de 8 de novembro de 1980 e a partir da reforma de 1890, na qual aparecesse explicitamente a teoria algébrica dos logaritmos nos livros didáticos.

De modo geral, todos os livros analisados nesta pesquisa apresentaram várias semelhanças, sendo que os livros de 2010 a 2012 trouxeram atividades contextualizadas com propostas mais claras e preocupação com as aplicações. Os livros entre 1988 e 1996, os mais antigos, introduzem os logaritmos a partir da definição, apresentando poucas atividades que envolvem a contextualização ou a interdisciplinaridade, que são premissas defendidas nos documentos oficiais, como vimos a partir dos PCN.

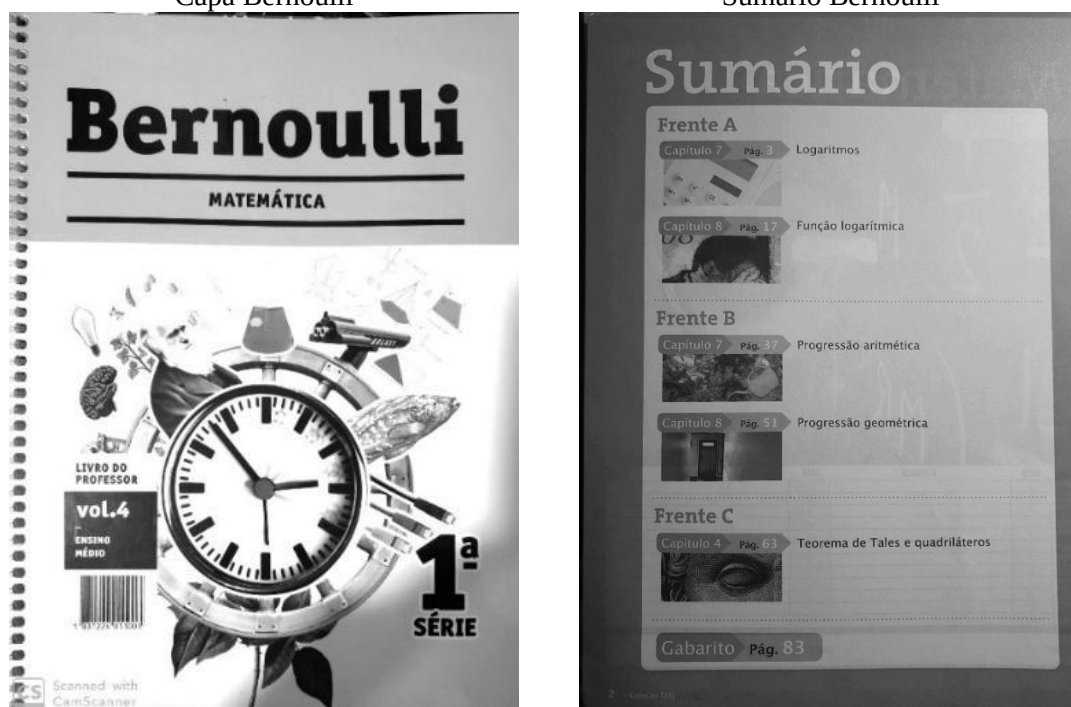
Nota-se que, embora algumas mudanças significativas tenham ocorrido na abordagem do conteúdo, ainda, persiste a valorização da repetição como mecanismo para a aprendizagem, bem como o incentivo ao uso de técnicas para resolução de exercícios, ao invés do incentivo ao desenvolvimento das capacidades psíquicas superiores, como nos alertam os teóricos da perspectiva do ensino desenvolvimental.

Os livros anteriores a 2010 podem ser classificados como de abordagem tradicional tecnicista, pois já introduz o conteúdo a partir da definição formal, não proporcionando meios para a apropriação do conceito. Não que os livros posteriores sejam diferentes nessa perspectiva, mas há evidências de preocupação com uma abordagem voltada para as aplicações, para atender às exigências de interdisciplinaridade e de contextualização.

2.4.1 O material didático adotado pela escola, local do experimento

O material didático utilizado pela escola é apostilado. Fornecido pelo grupo Bernoulli de Belo Horizonte - MG, é elaborado por diversos autores, não identificados no material, os quais tratam os conteúdos e selecionam os exercícios. A equipe se considera especializada na produção e distribuição de apostilas para todos os níveis de ensino, visando a aprovação nos vestibulares e no ENEM.

Figura 3 – Capa e sumário do vol. 4 de matemática
Capa Bernoulli Sumário Bernoulli



O assunto “logaritmos” é abordado no volume 4 do material da 1ª série, que é destinado ao 4º bimestre do ano letivo. Seguido pela função logarítmica, em nenhum momento há a relação entre a função logarítmica e a exponencial.

No volume 3, encontramos o assunto “função exponencial”, entretanto, o assunto estudado não é utilizado para elucidar os logaritmos no volume seguinte. Destacamos que cada volume é utilizado para compor os assuntos a serem trabalhados em um bimestre inteiro. Assim, o assunto “logaritmos” aparece ao final do ano letivo, no volume 4, que corresponde ao 4º bimestre. Neste momento escolar, mais que nos demais, os conteúdos acabam sendo ajustados ao tempo disponível e, não, ao tempo necessário para o seu ensino-aprendizagem.

Quanto à abordagem, após um breve histórico sobre a vida e obra de Napier, é apresentada a definição formal acompanhada por vários exemplos operatórios.

Figura 4 – Apresentação do capítulo dos Logaritmos no Bernoulli

Napier e definição de log

Os logaritmos surgiram a partir dos estudos do matemático escocês John Napier (1550-1617), com a publicação da obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, ou *Magnífica Descrição da Teoria dos Logaritmos*, em português.

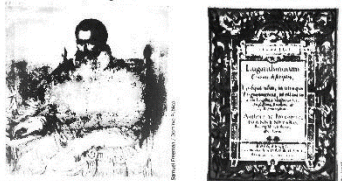


Figura 1. John Napier e sua obra mais importante.

A partir do século XV, ocorreram grandes avanços em áreas ligadas à Astronomia, à navegação, ao comércio e à Engenharia. Tais avanços, impulsionados pelos ideais renascentistas, demandavam cálculos cada vez mais rápidos e precisos. Os logaritmos vieram suprir essa necessidade, provocando uma verdadeira revolução na matemática da época e tornando-se uma ferramenta indispensável para os estudiosos de várias áreas. Para que se tenha uma ideia, o matemático Laplace afirmou que a invenção dos logaritmos “ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”.

Além de Napier, outros matemáticos como Henry Briggs (1561-1630) e Jobst Bürgi (1552-1632) ajudaram a difundir as técnicas do cálculo e o sistema notacional dos logaritmos. Coube a Briggs o aperfeiçoamento do método de Napier, por meio da elaboração da chamada *Tábua de Logaritmos Decimais*, que permitia escrever qualquer número positivo como uma potência de dez.

Com o surgimento das calculadoras científicas, as tábuas logarítmicas praticamente perderam a sua utilidade. Porém, o conceito de logaritmo continua sendo um dos mais importantes da matemática e o seu uso é fundamental na abordagem de diversos problemas nas mais variadas áreas da ciência.

1. Definição

Imaginemos o seguinte problema:

A qual expoente devemos elevar o número 2 de modo a obtermos 128?

É fácil perceber que esse problema pode ser descrito pela equação exponencial $2^x = 128$. Como $128 = 2^7$, temos $2^x = 2^7$, ou seja, $x = 7$.

Iremos, agora, introduzir uma nova notação à situação apresentada no exemplo anterior. Podemos dizer que 7 é o logaritmo de 128 na base 2. Escrevemos da seguinte forma:

$$\log_2 128 = 7$$

Na verdade, estamos simplesmente escrevendo a igualdade $2^7 = 128$ de outro modo. Portanto, temos a seguinte relação de equivalência:

$$\log_2 128 = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$$

Podemos generalizar essa ideia do seguinte modo:

Seja a o número real e positivo, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente real x que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b .

Propriedades, exemplos e exercícios

$\log_b b = x \Leftrightarrow b = b^x$

- a é a base do logaritmo;
- b é chamado de logaritmando ou antilogaritmo de x na base a ;
- x é o valor do logaritmo.

As condições de existência do logaritmo $\log_a b$ são:

$$b > 0 \text{ e } a > 1$$

Justificativa

Conforme já aprendemos, a condição $a > 0$ é necessária para garantir a existência do termo a^x para qualquer valor real de x . Observe, ainda, que a deve ser diferente de 1, pois, caso contrário, teríamos $1^x = b$. Essa equação impõe a condição de que b deve sempre ser igual a 1 e que teríamos infinitos valores de x como solução. Se tivermos $b \leq 0$, a equação não possui soluções reais, ou seja, a definição de logaritmo não faz sentido.

Além disso, se $a > 0$, então $a^x > 0$ para qualquer valor real de x . Como $b = a^x$, concluímos que $b > 0$.

Exemplo:

Calcular o valor de cada logaritmo a seguir:

1) $\log_2 32$

Seja $\log_2 32 = x$. Pela definição de logaritmo, temos $2^x = 32$.

Sabe-se, porém, que $32 = 2^5$. Logo:

$$2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$$

2) $\log_{729} \left(\frac{1}{81} \right)$

Seja $\log_{729} \left(\frac{1}{81} \right) = x$. Pela definição de logaritmo, temos $729^x = \frac{1}{81}$.

Sabe-se, porém, que $729 = 3^6$ e que $81 = 3^4$. Substituindo esses valores, obtemos:

$$(3^6)^x = \frac{1}{3^4} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-4} \Rightarrow 6x = -4 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

3) $\log_{\sqrt{0,001}} 0,001$

Seja $\log_{\sqrt{0,001}} 0,001 = x$. Pela definição de logaritmo, temos $(\sqrt{0,001})^x = 0,001$.

Mas $1\,000 = 10^3$ e $0,001 = 10^{-3}$. Substituindo esses valores, obtemos:

$$\left(\sqrt{10^{-3}} \right)^x = 10^{-3} \Rightarrow (10^{-\frac{3}{2}})^x = 10^{-3} \Rightarrow 10^{-\frac{3x}{2}} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 3 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

Exercício resolvido

01. Sabendo que $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, calcular o valor de $\log_a b$ em função de x e de y .

Resolução:

Pela definição de logaritmo, temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \quad (I)$$

$$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c \quad (II)$$

Seja $\log_a b = w \Rightarrow c^w = b$ (III)

Observe que devemos calcular o valor de w em função de x e de y . Substituindo as relações (I) e (II) em (III), obtemos o seguinte:

$$(a^y)^w = a^x \Rightarrow a^{yw} = a^x \Rightarrow yw = x \Rightarrow w = \frac{x}{y}$$

Portanto, $\log_a b = \frac{x}{y}$.

OBSERVAÇÕES

Quando a base de um logaritmo é igual a 10 (logaritmo decimal), ela pode ser omitida.

Exemplo: $\log_{10} 5$ pode ser escrito como $\log 5$.

Quando a base do logaritmo é o número e ($e = 2,71828\dots$), esse logaritmo é chamado **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural** e é representado com a notação $\ln$.

Exemplo: $\log_e 18$ pode ser escrito como $\ln 18$.

Exercícios de aprendizagem

01. **CALCULE**, pela definição, os seguintes logaritmos:

A) $\log_2 8$ F) $\log_2 32$
 B) $\log_2 128$ G) $\log_2 \frac{1}{27}$
 C) $\log_2 625$ H) $\log_{10} 0,008$
 D) $\log 1\,000$ I) $\log_{10} \sqrt{5}$
 E) $\log_2 16$ J) $\log_{10} 49$

02. Qual é o valor de $y = \log_2 \sqrt{2} + \log_{0,001} \sqrt[3]{0,1} - \log 100$?

03. **COLOQUE**, em ordem crescente, os seguintes números reais:

$$\log_2 \sqrt{32}; \log_{0,001} 0,001; \log_{10} 0,64 \text{ e } \log_{10} 0,001$$

04. Qual é o valor de $y = \log_2 (\log_2 9) + \log_2 (\log_2 1\,000)$?

05. Qual é o valor do logaritmo de $\sqrt[3]{81}$ na base $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$?

06. Supondo que $m > 0$ e $m \neq 1$, **CALCULE** os seguintes logaritmos.

A) $\log_m \sqrt{m}$ B) $\log_m \frac{1}{m}$

Não há no material a apresentação do conceito dos logaritmos ou mesmo da apresentação de sua funcionalidade. O assunto é introduzido com um breve posicionamento histórico, ilustrativo, seguido de ações que aparentemente pretendem induzir a reprodução de algoritmos de resolução sem o investimento de sentido que valorize o estudo.

No que diz respeito à conceituação, traz a definição formal, porém não há o uso de elementos que possam enriquecer a teia de conceitos necessárias ao assunto, tais como expoentes, progressões ou nada similar. É preciso destacar que nenhum dos assuntos estudados anteriormente no capítulo de exponencial é trazido neste momento, nem mesmo para ilustrar a definição.

Depois de muitos exercícios que contemplam a mera manipulação algébrica, são apresentadas brevemente as propriedades operatórias e a mudança de base de um logaritmo. Há a apresentação de um único exemplo do uso dos logaritmos na Astronomia que é citado a título de curiosidade.

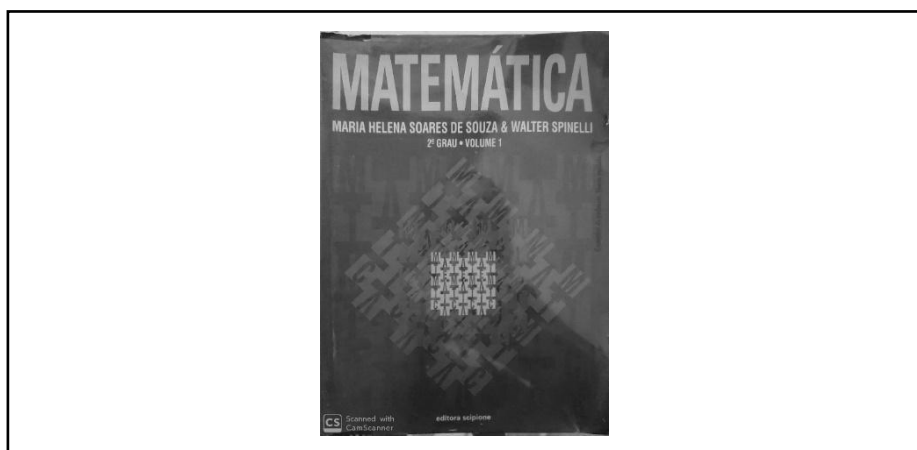
Após a apresentação das equações logarítmicas, encontramos muitas páginas de exercícios parecidos e repetitivos. Os únicos exercícios contextualizados surgem na chamada Seção Enem, que faz uso de exercícios que fizeram parte das provas anteriores do Exame Nacional do Ensino Médio.

2.4.2 Análise de livros didáticos indicados para o ensino médio

Os livros selecionados para esta análise foram escolhidos por representarem categorias de livros distribuídos nas redes públicas e privadas das escolas mineiras nas últimas duas décadas e escrito pelos principais autores da área. Estes são os últimos antecessores das apostilas, que ocuparam há quase 15 anos o lugar dos livros nas editoras e consequentemente nas escolas. Os critérios de exclusão dos demais, foi a similaridade da abordagem utilizada e/ou repetição de autores em edições diferentes.

- a) *Matemática 2º grau – volume 1, Souza, Maria Helena Soares de Souza e Walter Spinelli, Matemática 2º grau – volume 1, SP: Scipione, 1996*

Figura 5 – Capa do livro



No capítulo 6, intitulado “Logaritmos”, temos os logaritmos apresentados como a quinta operação fundamental, seguido de uma breve explanação da importância que exerce para facilitar os cálculos aritméticos complicados desde o século XVII. A definição dos logaritmos é aritmética e aparece na sequência apoiada por uma série de exercícios resolvidos como exemplo, tais exercícios se limitam a reafirmar a própria definição apresentada. Depois de uma longa série de exercícios propostos as propriedades surgem uma a uma, seguidas de mais exercícios para fixá-las. O primeiro e único exercício que envolve a aplicação dos logaritmos em uma situação real aparece na última página antes do início da explicação da função logarítmica.

Figura 6 – Página de exercícios de aplicação dos Logaritmos

43 Define-se pH de uma solução como: $-\log_{10} [H^+]$
 ou seja, pH é igual ao negativo do logaritmo da concentração de íons H^+ nesta solução. Será estudado em química que pH é uma medida da acidez de uma solução.
 Calcule o pH de uma solução cuja concentração de H^+ é $4,5 \cdot 10^{-3}$ (dados $\log_{10} 3 = 0,47$ e $\log_{10} 5 = 0,69$).

44 Se $\log_2 3 = m$, calcule a expressão, em função de m :

$$E = \log_4 18 \cdot \log_2 \sqrt{5} \cdot \log_3 8 \cdot \log_5 4$$

No estudo da função logarítmica é dado ênfase à interpretação do gráfico que a representa, sem nenhum tipo de associação à sua aplicação. Depois, na sequência é apresentada a equação e a inequação logarítmica, os logaritmos decimais, seguidos de diversos exercícios que fazem uso da matemática financeira para ilustrar o assunto.

Apesar de, em nenhuma parte, o livro apresentar a tabela dos logaritmos, o capítulo segue com a proposta de construção de uma tabela dos logaritmos e é encerrado com várias páginas de testes de vestibulares. O próximo e último capítulo apresenta aos alunos as progressões aritméticas e geométricas.

Sendo assim, podemos afirmar que o conceito dos logaritmos não é apresentado ou construído para o estudante, apenas a definição é apresentada. Os enunciados são em sua maioria do tipo “calcule o logaritmo... Qual é a base do logaritmo...Determine o

logaritmo... Dado o logaritmo...”, acabando por não estabelecer conexões com a teia de conceitos essenciais que formam o conceito central.

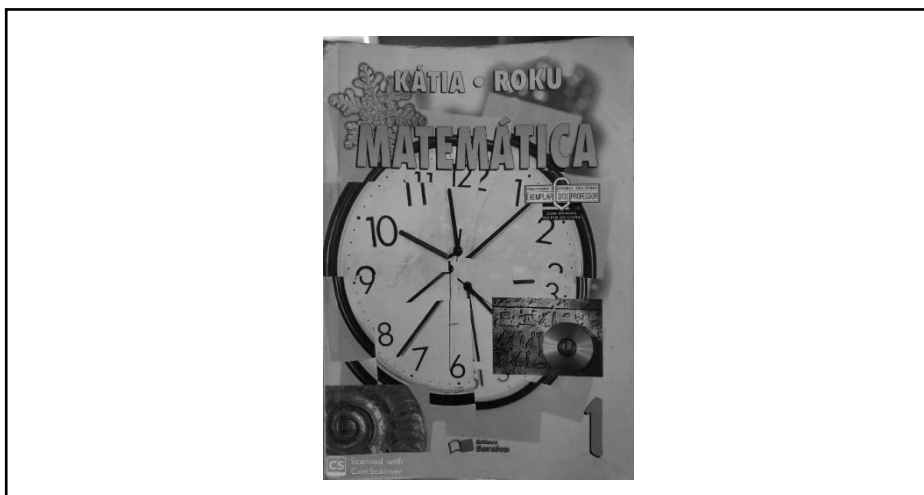
Porém percebemos que há o investimento na formação de habilidades de manuseio de equações, fórmulas e leitura de gráficos, sem, no entanto, procurar desenvolver estratégias de interpretação de problemas para a aplicação do assunto no mundo real, isto só acontece com a matemática financeira em uma pequena parte do capítulo.

Apesar de o capítulo anterior tratar de exponencial, que é a inverso dos logaritmos, e o capítulo seguinte tratar das progressões, não há a associação destes ou de outros temas tratados no livro.

Quanto à posição do assunto no livro, ele é o sexto de sete capítulos, colocando-o na situação de tema de encerramento do ano letivo.

b) *Matemática – volume 1, Kátia Cristina Stocco Smole e Kiyukawa. SP: Saraiva, 1988*

Figura 7 – Capa do livro



No capítulo 7, intitulado “Logaritmo, Função logarítmica”, os logaritmos são introduzidos com a apresentação de uma situação-problema, na qual o crescimento de uma planta é observado e associado a uma tabela e a um gráfico exponencial. Neste contexto, pergunta-se a que altura estará a planta depois de um determinado tempo. Os autores, então, fazem uso da equação exponencial para indicar que o valor de x procurado é determinado pelo logaritmo. Apesar da abordagem inicial se aproximar da algébrica-funcional, ao invés de explorarem o conceito a partir do exemplo dado, seguem

diretamente para a definição aritmética dos logaritmos e suas propriedades imediatas, deixando de explorar a riqueza da teia de conceitos inicialmente proposta pelo exemplo.

Figura 8 – Página das propriedades imediatas

Logaritmo de um número positivo b numa base a , $a > 0$ e $a \neq 1$, é o expoente da potência à qual deve-se elevar a para se obter b .

Se $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\log_a b = x \iff a^x = b$.

Na igualdade $\log_a b = x$:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo de b na base a .

Exemplos:

a) $\log_5 625 = 4$, pois $5^4 = 625$

b) $\log_{10} 0,01 = -2$, pois $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$

c) $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$

d) $\log_7 7 = 1$; $\log_7 7^2 = 2$; $\log_7 7^n = n$, para todo $n \in \mathbb{R}$

As restrições impostas à base do logaritmo ($a > 0$ e $a \neq 1$) garantem que o logaritmo exista e seja único.

Veja, por exemplo, o que ocorreria no cálculo de $\log_1 2$. Chamando $\log_1 2$ de c , teríamos $1^c = 2$, mas $1^c = 1 \neq 2$, qualquer que seja c , o que torna o cálculo impossível.

Façamos agora o cálculo de $\log_{-2} 8 = x$, no qual a base é menor que zero.

Pela definição, $(-2)^x = 8$. Então, $x = 3$? Impossível, porque $(-2)^3 = -8 \neq 8$. $\log_{0,0} 0$ logaritmo não existe.

165

Unidade 7 — Logaritmo, Função logarítmica

2. Propriedades imediatas

Os cálculos com alguns logaritmos são muito simples e podem ser feitos mentalmente.

Exemplos:

a) $\log_2 x = 3 \implies 2^3 = x$ ou $x = 8$

b) $\log_5 25 = x \implies 5^x = 25 \implies 5^x = 5^2$ ou $x = 2$

No entanto, há outros cálculos que são menos imediatos. Para realizá-los, podemos utilizar algumas propriedades decorrentes da definição de logaritmo.

Sejam a , b e c números positivos, com $a \neq 1$, e m um número real:

1) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$

2) $\log_a a^m = m$, pois $a^m = a^m$

3) $a^{\log_a b} = b$, pois fazendo $\log_a b = x$, temos $a^x = b$

4) $\log_a b = \log_a c \iff b = c$

Aplicando a definição em $\log_a b = \log_a c$, temos $b = a^{\log_a b} = a^{\log_a c} = c$, então, $b = c$.

Exemplos:

a) $\log_3 1 = 0$; $\log_2 1 = 0$; $\log_6 1 = 0$; $\log_e 1 = 0$

b) $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{27}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -3$

c) $5^{\log_5 2} = 2$; $2^{\log_2 \pi} = \pi$

d) $\log_3 (2x + 1) = \log_3 7$

Condição de existência: $2x + 1 > 0$, $x > -\frac{1}{2}$

Como $x = 3$ satisfaz a condição de existência, pois $3 > -\frac{1}{2}$, então $S = \{3\}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Depois da apresentação da definição dos logaritmos e de suas propriedades operatórias, apresenta-se a função logarítmica, prioritariamente, pela via do comportamento de seus gráficos, já estendendo para as inequações e equações, sistemas dos logaritmos e logaritmos decimais, trazendo, superficialmente, a ideia de característica e mantissa. O capítulo se encerra com uma coleção bem longa de exercícios, intitulados de “Problemas e Exercícios”, que é, na verdade, uma coleção de exercícios de vestibulares, sendo que muitos deles exigem a interpretação e aplicação do conteúdo para sua resolução, mesmo que em nenhum momento anterior do capítulo algo parecido tenha sido realizado. Na última página, enfim, o autor apresenta como é possível calcular logaritmos, utilizando a calculadora científica.

Podemos afirmar então que o conceito dos logaritmos é apenas tangenciado na introdução do capítulo, e que a definição é dada como resposta para o problema inicialmente proposto pela necessidade de encontrar o valor de um expoente desconhecido.

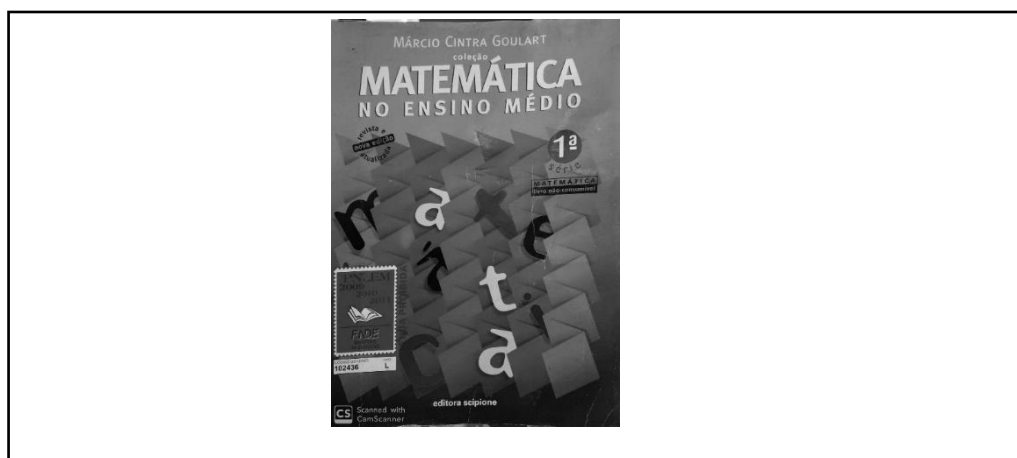
Quanto aos enunciados dos exercícios, todos, sem exceção, baseiam-se nos comandos “resolva e calcule”, privilegiando a automatização e reprodução de algoritmos e aplicação de fórmulas, sem estimular o raciocínio, tomada de decisão ou a criatividade.

O livro traz, no capítulo anterior, a apresentação da Função, da Equação e da Inequação exponencial, bem como no capítulo seguinte ao dos logaritmos. A apresentação do Módulo e Função modular, porém, em nenhum momento os temas destes capítulos são abordados para compor a teia de conhecimentos necessária para a apropriação de conceitos.

Quanto à posição do assunto no livro, ele é o sétimo de nove capítulos, confirmando a posição do assunto como um dos últimos a serem apresentados pelos livros.

c) *Matemática no Ensino Médio – 1ª série / Márcio Cintra Goulart 3.ed São Paulo: Scipione, 2005*

Figura 9 – Capa do livro



No capítulo 4, intitulado “Logaritmos. Função logarítmica”, o autor relembra situações do capítulo anterior, “Função exponencial”, para destacar a necessidade de encontrar um número x que satisfaça uma determinada equação exponencial. Associa a isto os logaritmos como ferramenta matemática capaz de satisfazer tal necessidade, e indica a calculadora como um modo fácil de determinar o logaritmo. Aproveita o livro também para destacar brevemente a importância dos logaritmos para as ciências.

A definição aritmética dos logaritmos é apresentada e na sequência uma série de exercícios resolvidos com a aplicação da definição. As propriedades operatórias

aparecem na sequência e o uso da calculadora é utilizado para estimular a compreensão de quão grande pode ser o valor alcançado por um número elevado a um expoente. Depois de mais exercícios de fixação, a calculadora aparece novamente para auxiliar na compreensão do processo de mudança de base dos logaritmos e a função logarítmica aparece prioritariamente através da construção e interpretação do comportamento de seu gráfico.

O capítulo segue com a seção intitulada “Aplicações. Cologaritmo”, nela uma série de problemas envolvendo PH e crescimento populacional aparecem como exemplos e exercícios propostos. O encerramento do capítulo se dá com várias páginas de exercícios testes de exames e concursos. O capítulo seguinte tratará de sequências e progressões.

O conceito dos logaritmos é tangenciado na abordagem inicial do capítulo que não explora a ideia central do mesmo, saltando diretamente para a definição e propriedades.

Figura 10 – Página dos Logaritmos. Função Logarítmica

LOGARITMOS. FUNÇÃO LOGARÍTMICA



Logaritmos.

Função logarítmica

Conversando francamente

Você, nosso aluno da 1ª série do ensino médio, ao resolver equações exponenciais no capítulo anterior, deve ter notado que no final elas geralmente recaíram em equações como esta:

$$2^x = 16, 2^x = \frac{1}{2}, 3^x = 243, (2,7)^x = 1, 10^x = 0,001$$

Com inequações exponenciais ocorria fato semelhante.

Como você resolveria a equação $2^x = 10$? Há solução? Se houver, como obtê-la? Valor de x que satisfaça a essa equação deve ser maior que 3, pois $2^3 = 8$ (é pouco), e deve ser menor que 4, pois $2^4 = 16$. (Então, $x = 3,...$)

Com alguns conhecimentos de *logaritmos* e utilizando uma calculadora científica, você terá a solução 3,322 (aproximação até milésimos).

Antes da difusão do uso das calculadoras, os logaritmos foram muito importantes para os cálculos numéricos, mas o conhecimento da *função logarítmica* – a inversa da função exponencial – continua sendo muito importante, em Matemática e em outras ciências.

1. Definição de logaritmo

Dado um número **a**, positivo e diferente de 1, e um número **b** positivo, se $a^x = b$, dizemos que o expoente x é o logaritmo de **b** na base **a**. Indicamos por $\log_a b$ e lemos logaritmo de b na base a .

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Exemplos:

a) $\log_3 9 = 2$ (pois $3^2 = 9$)

b) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ (pois $5^{-1} = \frac{1}{5}$)

Os enunciados, em sua maioria, baseiam-se nos comandos “calcule, obtenha e resolva”, sem a preocupação com o estabelecimento de conexões conceituais e essenciais para a percepção da essência do conceito.

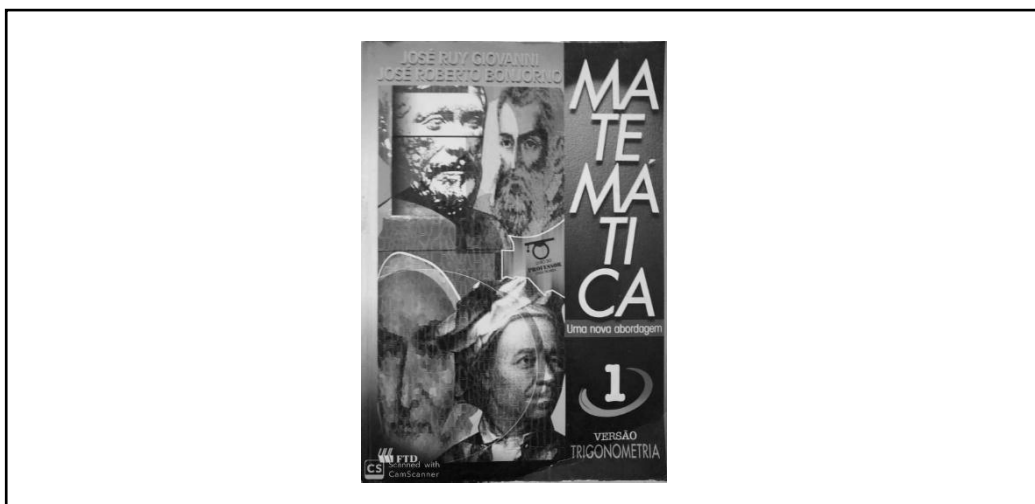
Porém o uso da calculadora é estimulado em vários momentos, proporcionando uma aproximação do cálculo dos logaritmos para a vida real. A formação de habilidades operatórias para o manuseio de fórmulas e equações é constante, já o estímulo à resolução de problemas aplicados aparece somente na seção do cologaritmo.

O assunto do capítulo anterior, “Função exponencial”, é utilizado somente na introdução dos logaritmos e o capítulo seguinte “Sequências” não é aproveitado, apesar de fazer parte da teia de conhecimentos que compõe o conceito dos logaritmos.

Quanto à posição do assunto no livro, neste caso ele vem mais no começo do livro, minimizando a possibilidade de aceleração ou mesmo de ser ignorado no decorrer do ano letivo.

d) *Matemática, uma nova abordagem – volume 1 (versão com trigonometria)*, José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno. SP: FTD, 2000.

Figura 11 – Capa do livro



No capítulo 9, intitulado “Função logarítmica”, o autor faz uma breve retrospectiva histórica do surgimento dos logaritmos, passando para a explicação do que vem a ser logaritmos baseando-se inicialmente na tabelas de potências de base 10, já determinando seus expoentes como logaritmos.

Figura 12 – Página o que é logaritmo



O que é logaritmo

Como vimos, todo número positivo pode ser escrito como potência de 10.

Nos séculos XVI e XVII, vários matemáticos desenvolveram estudos visando à simplificação do cálculo. Nesse sentido, construíram tabelas relacionando números naturais e os expoentes de 10 correspondentes a cada um. A esses expoentes deram o nome de logaritmos.

A palavra logaritmo vem do grego: *logos* (razão) + *arithmos* (número)

NÚMERO	LOGARITMO	
1	0,000	$1 = 10^0$
2	0,301	$2 = 10^{0,301}$
3	0,477	$3 = 10^{0,477}$
4	0,602	$4 = 10^{0,602}$
5	0,699	$5 = 10^{0,699}$
6	0,778	$6 = 10^{0,778}$
...	...	...
10	1,000	$10 = 10^1$
...	...	...
100	2,000	$100 = 10^2$
...	...	...
145	2,161	$145 = 10^{2,161}$

Assim, o número 0,301 é chamado logaritmo de 2 na base 10.

Indica-se: $\log_{10} 2 = 0,301$, ou seja, $2 = 10^{0,301}$.

O número 0,778 é chamado logaritmo de 6 na base 10.

Indica-se: $\log_{10} 6 = 0,778$, ou seja, $6 = 10^{0,778}$.

Essas tabelas foram chamadas de *tábuas de logaritmos decimais* porque os números são representados como potências de base 10.

Entretanto, os logaritmos podem ser escritos em qualquer base positiva diferente de 1.

Observe:

- $\log_7 2 = 0,356$, porque $2 = 7^{0,356}$
- $\log_5 125 = 3$, porque $125 = 5^3$
- $\log_8 47 = 1,852$, porque $47 = 8^{1,852}$

Dizemos que o logaritmo de um número positivo b , na base a , positiva e diferente de 1, é o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter b .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, \text{ com } b > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Se a base do logaritmo for 10, costuma-se omiti-la na sua representação.

$$\log_{10} b = \log b \quad (\log \rightarrow \text{logaritmo decimal})$$

O conjunto dos logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de *sistema de logaritmos decimais* ou de *Briggs*.

Os autores apressam-se em apresentar a definição aritmética dos logaritmos e em seguida de maneira superficial o número e . Exemplos de fixação são demonstrados e a condição de existência dos logaritmos é trazida para introduzir as equações logarítmicas e suas propriedades. O cologaritmo e a mudança de base vêm em seguida.

A função logarítmica aparece como instrumento para a construção e interpretação do comportamento de seus gráficos, seguida da explicação dos logaritmos decimais, em que a característica e a mantissa são apresentadas e uma grande tabela dos logaritmos.

O uso da calculadora é estimulado e com ela a proposta da construção de uma tábua dos logaritmos. Depois disso, um grande número de exercícios é proposto, juntando a proposta de fixação operatória e a resolução de situações-problema, fechando assim o capítulo.

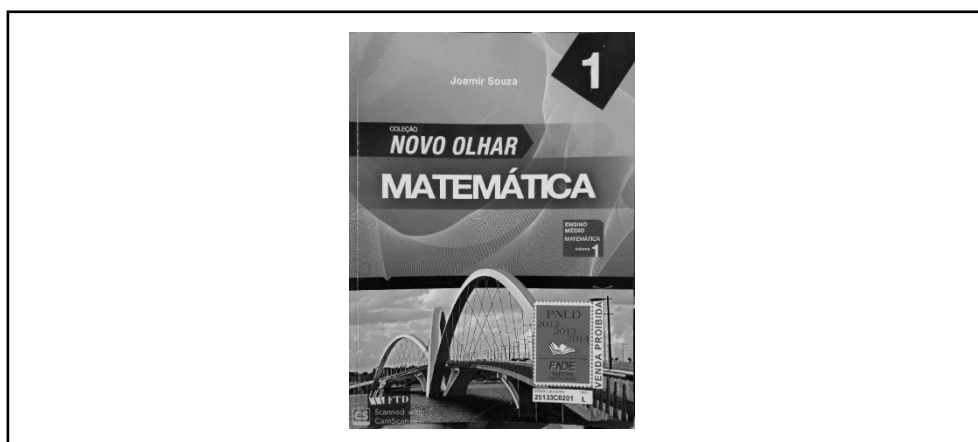
No capítulo anterior, intitulado “Função exponencial”, as potências de base 10 são destacadas em diversos momentos, e são elas que, no capítulo seguinte, dos logaritmos, embasam a abordagem de sua introdução; porém, não há o cuidado de construir o conceito dos logaritmos, ou associar conhecimentos. A definição é dada mais uma vez como elemento central do assunto.

Percebe-se a tentativa de oferecer exercícios de fixação e de aplicações, porém de maneira ainda desproporcionada em suas quantidades. É perceptível também que não existem recursos para estimular o desenvolvimento de estratégias de interpretação e de aplicação dos logaritmos.

Apesar de o capítulo seguinte, “Noções de matemática financeira”, conter diversas situações nas quais os logaritmos poderiam ser utilizados, não há no capítulo dos logaritmos exercícios que envolvam a matemática financeira, bem como, no capítulo da matemática financeira, não existem exercícios que exijam do aluno o uso dos logaritmos para sua resolução, perdendo a oportunidade de associar esses conhecimentos. Quanto à posição do assunto no livro, ele é o nono de dez capítulos, ou seja, mais uma vez fica por último na distribuição do ano letivo.

e) *Novo olhar Matemática - volume 1 (PNLD)*, Joamir Roberto de. Souza SP:FTD,2010

Figura 13 – Capa do livro



No capítulo 6, intitulado “Logaritmo e função logarítmica”, o autor relembra uma situação relacionada à equação exponencial, assunto estudado no capítulo anterior, utilizando para tal, uma situação problema referente à taxa de crescimento de uma colônia de bactérias. Na situação, é indagado o tempo para que a colônia alcance o crescimento dado. O tempo procurado é encontrado a partir da resolução de uma equação exponencial utilizada como exemplo, a qual o autor se refere como um processo ineficaz de solução, propondo como método eficaz o uso dos logaritmos, porém, antes de apresentá-lo. Isso pode ter a função de desafio, o que é positivo. Faz uma breve referência à sua história e a seu criador, para em seguida apresentar sua definição.

As consequências da definição aritmética já aparecem na sequência, seguidas pelo estudo da condição de existência dos logaritmos. A calculadora é inserida em alguns exercícios cujo enunciado já orienta como utilizá-la. As propriedades operatórias dos logaritmos aparecem no decorrer do capítulo com muitos exercícios resolvidos como exemplos e outros para fixação.

Alguns elementos históricos e curiosidades aparecem intercalando o conteúdo e os exercícios, tais como as barras de Napier, a história da descoberta do PH e a relação dos logaritmos com as notas musicais. O estímulo ao uso da calculadora é uma constante no capítulo.

A função logarítmica e o comportamento de seus gráficos são apresentados, contextualizado com um bom exemplo de utilização da mesma para o cálculo do índice da escala Richter.

A equação e a inequação logarítmica são apresentadas em meio a muitos exercícios aplicados, enquanto o capítulo é encerrado com uma grande lista de exercícios chamados de complementares que priorizam situações-problema diversas para sua resolução.

Apesar da definição dos logaritmos mais uma vez ser o principal elemento da introdução, o trabalho com situações problema é bem distribuído e ajustado às intervenções históricas e das curiosidades espalhadas pelo capítulo. Não se chega a aprofundar o tema com a inserção dos cologaritmos ou a tabela dos logaritmos, mas aquilo que se apresenta é bem fundamentado e praticado, bem como o uso da calculadora é estimulado e equilibrado em meio aos exercícios propostos.

A função logarítmica aparece não somente como instrumento para a construção e interpretação do comportamento de seus gráficos, mas como fator de estudo de situações-problema bem construídas.

Os exercícios que fecham o capítulo estimulam a fixação dos recursos operatórios, a resolução de situações-problema, a interpretação e análise de casos específicos para o uso dos conhecimentos adquiridos sobre os logaritmos. O capítulo anterior, intitulado “Função exponencial”, é lembrado para a introdução do tema dos logaritmos.

Percebe-se a tentativa de oferecer exercícios interessantes e estimulantes intercalados entre a proposta de fixação de processos e aplicações de conhecimentos, relacionando o uso da calculadora com instrumento amigável. A inserção de curiosidades e elementos históricos no decorrer do capítulo estimulam o pensamento do aluno e a criatividade.

Quanto à posição do assunto no livro, ele é o sexto de sete capítulos, estando mais uma vez isolado no final do livro.

f) *Matemática contextos e aplicações – volume 1 (PNLD)*, Luiz Roberto Dante. SP: Ática, 2012

Figura 14 – Capa do livro



No capítulo 8, intitulado “Logaritmo e função logarítmica”, em sua introdução o autor descreve brevemente situações históricas que justificaram a necessidade da criação dos logaritmos, desenvolvendo a ideia de que se trata de uma ferramenta matemática que contribui para a facilitação de cálculos, ao transformar as operações de multiplicação em adição, e as operações de divisão em subtração. Na sequência apresenta

a escala Richter, exemplificando o papel dos logaritmos e da função logarítmica na análise de pontos do plano que satisfazem a situação-problema estudada.

Ainda utilizando-se de exemplos de aplicação dos logaritmos como a taxa de crescimento populacional, o autor apresenta a definição aritmética dos logaritmos, destacando que o logaritmo é um expoente, portanto é um número.

Figura 15 – Página de exemplos de exercícios e aplicações

Observe as resoluções:

a) $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$
Esse valor 3 denomina-se *logaritmo* do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$.
Assim:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

b) $3^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$
O valor -4 chama-se *logaritmo* do número $\frac{1}{81}$ na base 3 e é representado por $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente **c** chama-se *logaritmo de b na base a*, ou seja:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, com **a** e **b** positivos e $a \neq 1$

Nessa equivalência temos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c$ { c : logaritmo a : base do logaritmo b : logaritmando	$a^c = b$ { b : potência a : base da potência c : expoente

Vejam os exemplos:

- $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$
- $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$
- $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$
- $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Observações:

1ª) Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3 (-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$. Experimente aplicar a definição nesses casos.

2ª) Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, $\log 2$ é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de *logaritmos decimais* ou de *Briggs*.

Exemplos:

1ª) Vamos determinar:

a) $\log_2 128$
Representando por **x** o valor procurado, temos: $\log_2 128 = x \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 2^x = 128 = 2^7 \Rightarrow x = 7$
Portanto, $\log_2 128 = 7$.

b) $\log_{\sqrt{3}} 9$
 $\log_{\sqrt{3}} 9 = x \Rightarrow (\sqrt{3})^x = 9 \Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2$
 $\frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$
Logo, $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$
 $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = \log_{3^{-2}} \left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}}$
 $\log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}} = x \Leftrightarrow (3^{-2})^x = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -2x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$
Portanto, $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = -\frac{3}{4}$.

Perceba que o logaritmo é um expoente.

Quando falamos *logaritmo*, estamos nos referindo a um número.

O capítulo segue com a apresentação das condições de existência dos logaritmos, propriedade, cologaritmo, função, equação e inequação logarítmica, sempre cheia de exemplos e exercícios envolvendo situações-problema, aplicações e leituras

complementares que auxiliam na interpretação dos exercícios. O uso da calculadora é citado, porém seu uso não é estimulado.

O capítulo anterior intitulado “Função exponencial” é a base da abordagem realizada no começo do capítulo dos logaritmos, porém o capítulo seguinte, “Progressões”, é completamente isolado do anterior e não faz uso da possibilidade de apropriações de associações conceituais.

Quanto à posição do assunto no livro, ele é o oitavo de doze capítulos, sendo exceção dentre os demais livros analisados. É pertinente destacar que este livro apresenta em sua estrutura maior quantidade de assuntos que os demais, além de conteúdos não abordados nos demais livros. Enquanto apresentam, depois dos logaritmos, o conteúdo de progressões e sequências, e, algumas vezes, a matemática financeira, este livro segue depois destes itens para a trigonometria no triângulo retângulo e geometria plana.

No geral, os livros trazem concepções tradicionais de ensino, com ênfase nas manipulações operatórias dos algoritmos, sobretudo os mais antigos. Os conceitos apresentados em geral, não são precedidos de motivação histórica ou de situações-problema que demonstrem sua aplicabilidade. Os livros quase não fazem uso dos assuntos e temas estudados nos capítulos anteriores para enriquecer e construir relações conceituais, não havendo, assim, aproveitamento dos conceitos introduzidos neles.

Percebe-se que não há conexões entre os assuntos tratados no mesmo capítulo, pois cada um é abordado independente do anterior, em sua maioria. Não há evidências de uso de estruturas lógico-dedutivas no processo de apresentação dos assuntos, se faz apenas o uso de pré-requisitos. Sentimos falta de leituras e propostas de ações que estimulem a criatividade e a imaginação dos alunos, e são poucos os que o fazem. Não fica clara a diferença entre definição e conceito, pois todos eles tratam a definição como elemento central do conteúdo. Há um número excessivo de exercícios de reprodução de algoritmos de resolução. Poucos se referem ao uso de calculadoras ou tecnologias. Insistimos quanto à posição do assunto nos livros, pois acreditamos que sua proximidade do fim do livro é um fator que interfere diretamente na aceleração de seu ensino, podendo chegar à simples omissão de sua aplicação.

Destacamos que os elementos resultantes da pesquisa documental, da análise dos livros didáticos e dos documentos oficiais, contribuíram para pensar as tarefas propostas no experimento. No próximo capítulo, apresentaremos o método e a metodologia aplicada no experimento, também contaremos um pouco de nossa trajetória neste processo.

3 O EXPERIMENTO DIDÁTICO – A METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos o experimento didático como a metodologia de pesquisa, retomando alguns aspectos do sistema didático zankoviano, importantes para planejar o experimento e a trajetória percorrida, descrevemos o planejamento das tarefas, os seus objetivos e as ações propostas.

3.1 Retomando alguns pressupostos do experimento didático: a condução do experimento, o papel da fala e das emoções

Na Educação, estamos sempre à procura de processos conscientes que levem nossos alunos à aquisição cognitiva de elementos que atuem em sua formação intelectual e, conseqüentemente, em sua personalidade. Considerando o nosso objeto de estudo, o ensino-aprendizagem do conceito dos logaritmos, necessária se faz uma metodologia que corresponda a sua natureza, assim, optamos pelo experimento didático-formativo.

L. V. Zankov justifica o método experimental com a seguinte afirmação:

É própria do experimento, em sua qualidade de método científico geral, a troca sistemática das condições da observação do fenômeno e de suas relações com outros fenômenos, com a qual se expressa a ação ativa sobre o objeto de estudo. A aplicação do experimento na investigação científica permite estudar as relações de determinadas facetas do processo e achar as causas que condicionam a necessidade de que apareça o fenômeno dado. Desse modo, o experimento permite evidenciar as leis da esfera da realidade do objeto de estudo. (ZANKOV, 1984, p. 21, tradução nossa)²⁰

Assim, é necessário o empenho no planejamento das tarefas para que atendam as especificidades do processo de desenvolvimento dos alunos, integrando plano de ensino do conteúdo, a transposição didática do professor e suas orientações.

Por isso, analisamos aqui os principais elementos do experimento zankoviano para a produção de tarefas baseadas nos pressupostos de seu sistema experimental didático. Atentos ao movimento das ações e operações conscientes, como também aos

²⁰ “Es propio del experimento, en su cualidad de método científico general, el cambio sistemático de las condiciones de la observación del fenómeno y sus relaciones con otros fenómenos, con lo que se expresa la acción activa sobre el objeto del estudio. La aplicación del experimento en la investigación científica permite estudiar las relaciones de determinadas facetas del proceso y hallar las causas que condicionan la necesidad de que aparezca el fenómeno dado. De ese modo, el experimento permite evidenciar las leyes de la esfera de la realidad objeto del estudio.” (ZANKOV, 1984, p. 21)

elementos do pensamento teórico que nos permitem identificar as operações mentais aparentes durante o processo de apropriação dos conceitos por parte dos alunos. Também destacamos as ações de organização do ensino que foram relevantes para que as tarefas ganhassem corpo. Essa pesquisa se orienta metodologicamente pelos princípios do sistema zankoviano do qual já tratamos no capítulo 2. Sendo assim, fundamenta-se no materialismo histórico e dialético.

As questões levantadas nos capítulos anteriores levaram-nos a executar uma análise exploratória de uma coleção de tarefas organizadas como um sistema didático para o ensino do conceito dos logaritmos, baseada no experimento de L. V. Zankov, fazendo desta, também, uma pesquisa empírica.

Buscamos reconhecer por meio das tarefas propostas, indícios de desenvolvimento psíquico dos sujeitos, através de operações mentais realizadas durante a aprendizagem de conceitos científicos. Nosso olhar direcionou-se para a qualidade do pensamento apresentado no processo de apropriação conceitual, procurando identificar em suas falas e registros escritos, ações que a oportunizaram. Procuramos recolher informações detalhadas da organização do pensamento dos sujeitos, presentes durante o processo de apropriação conceitual, para realizarmos então, uma análise qualitativa que permitisse identificar ações mobilizadoras de seu desenvolvimento psíquico.

No que diz respeito ao ensino, segundo L. V. Zankov (1984), é preciso deixar de lado procedimentos tradicionais que se encontram enraizados na sua estrutura, aqueles que demandam processos de perguntas e respostas óbvias, com a intenção de que os alunos devolvam afirmações previsíveis, após a apresentação de um conteúdo igualmente previsível.

É preciso deixar que os alunos se posicionem, apresentem suas ideias, permitindo que a imaginação seja estimulada, que possam remontar o caminho percorrido pelo conceito de maneira verbal ou mesmo por escrito. O retorno do aluno, ainda que incoerente para a questão, já é um avanço, pois o professor poderá compreender o pensamento do aluno e assim guiar o processo de apropriação do conceito, corrigindo e adequando falas e ações a partir de perguntas que guiam o aluno por um caminho de raciocínio e descobertas. Para isso, todavia, é preciso evitar os extremos, o aluno não deve atuar sozinho, e nem o professor deve ser o único a manifestar suas verdades, o caminho é construído com a participação de ambos.

A metodologia de L. V. Zankov dedica-se, em particular, a permitir que os alunos compreendam o conteúdo apresentado acompanhado de sentimentos próprios do processo de ensino-aprendizagem, tais como a alegria de conhecer algo novo ou a rejeição por antipatia pelo assunto. Para isso, é necessário aplicar uma série de procedimentos metodológicos que permitam a elevação gradual dos alunos por escalas que possibilitem não apenas compreender o conteúdo, mas penetrá-lo, tornando-se ao compreendê-lo, parte de si e de sua prática social.

L. V. Zankov (1984), o trabalho referente à aritmética, por exemplo, como era realizado na época em que realizou seu experimento, aparentemente não proporcionava a base para o aparecimento de emoções positivas no aluno. Esse fato pode ser constatado ainda hoje, em nossas escolas, sobretudo no Ensino Médio, mas é nesse aspecto que o ensino experimental zankoviano se diferencia do tradicional. Seu investimento na fala coloca questões fundamentais, tais como dúvidas, incertezas e contradições, fazendo com que essas emoções, positivas ou negativas, sejam percebidas pelo professor, permitindo que interfira imediatamente na tentativa de tirar proveito para a aprendizagem ou alterá-las positivamente com o mesmo fim. Deve-se a essa possibilidade de intervenção a partir da observação da fala, aos estudos de Vigotski (1998), que, de acordo com o autor, carregam consigo expressões, necessidades e impulsos afetivos que alimentam a ação, no caso, a ação de aprender.

Isto nos leva a outro fato inquestionável e de grande importância: o desenvolvimento do pensamento é determinado pela linguagem, isto é, pelos instrumentos linguísticos do pensamento e pela experiência sociocultural da criança. (VIGOTSKI 1998 p. 44)

Outro aspecto enfatizado pelo autor, é que, ao estabelecer a diferença entre o ensino experimental e o tradicional, é a fala que cria a todo o momento uma motivação para a conversa, o diálogo, permitindo uma abertura maior nas relações entre professor e aluno.

A naturalidade da fala no processo de ensino, condicionada à manifestação de impulsos interiores, contribui para um melhor desenvolvimento da própria fala e de seu objetivo vital, que é a comunicação, permitindo que neste processo natural, sejam expressas dúvidas, incertezas, convicções, dentre outros sinais que podem e devem ser utilizados pelos professores para orientar a prática pedagógica em sala de aula, visando a apropriação de significados.

Neste sentido, nesse método procura-se estimular o registro da aprendizagem por meio da fala a fim de diferenciar-se das metodologias tradicionais que enfatizam a proposta de exercícios escritos pré-determinados cujas resoluções consolidam o assunto estudado apenas superficialmente. A proposta da fala e de atividades escritas abertas a soluções diversas, podem proporcionar ao aluno a apropriação de um conceito.

O principal é que no processo da articulação da fala, o aluno busque em sua mente, um quadro de expressões de suas ideias e sentimentos, pois, nesse movimento a expressão correta do conceito construído poderá ser alcançada. A garantia de que este momento acontecerá, está, sem dúvida, no princípio da atividade orientadora do professor, que guia o aluno com perguntas cada vez mais complexas, fazendo com que o próprio aluno alcance as possíveis respostas. Verificamos então que ele precisa se posicionar de maneira verbal e escrita, apresentando ideias detalhadas oriundas de fontes confiáveis e diversificadas, o que resulta na apreensão de um conceito.

Esse percurso leva o aluno a compreender o procedimento que precisa executar para a solução de um determinado problema do mundo real ou mesmo imaginário através de simulações. Podemos inferir que os exercícios repetitivos característicos de uma metodologia tradicional, limitam as atividades de pensamento do aluno a uma sequência de algoritmos sem sentido, dificultando que leve o conhecimento adquirido para ser aplicado fora da sala de aula.

De acordo com o sistema experimental de ensino de L. V. Zankov, uma série de questionamentos deve ser feita no material de ensino elaborado, organizando reflexões no processo de resolução dos exercícios. Procura-se ir mais a fundo para que seja percebida a dependência entre os questionamentos dos alunos e as perguntas feitas nos exercícios. Assim, o sistema experimental proposto pelo autor ocupa um lugar particular na ação criadora dos alunos. Esse modo de atuar junto aos alunos, pode auxiliar a superação de dificuldades, promovendo a vivência e a apropriação do saber, levando-o a alcançar resultados positivos que geram satisfação por ter solucionado o proposto, e, muitas vezes, descoberto algo no processo. Neste formato, os alunos não só trabalham seus interesses escolares e pessoais de aprendizagem, mas experimentam nele emoções positivas que se convertem em elementos essenciais para o aprendizado, fortalecendo a assimilação dos conteúdos ofertados.

O papel do sistema experimental no desenvolvimento das emoções do aluno é indispensável na formação de qualidades que são desenvolvidas voluntariamente e que

só podem ser alcançadas pela vontade do aluno. Este desenvolvimento não somente ajuda que alcancem os objetos educacionais propostos com maior facilidade, como pode levá-los a superar o desânimo e o desinteresse que acabam por ocasionar o fracasso escolar.

A abordagem, a partir do sistema experimental zankoviano, proporciona ao aluno que se aproxime de forças que comunicam alegria e desejo, e ao professor, um papel dinâmico que ativa forças essenciais ao processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido L. V. Zankov afirma:

A paixão, a alegria proporcionada pelo processo de trabalho, o estudo e seu resultado, instilam novas forças, comunicam alta energia à atividade, enquanto o tédio e o achatamento diminuem sua velocidade. (ZANKOV, 1984, p.63)²¹

Deste modo, a mediação exercida pela ação do professor, bem como a do material através das tarefas propostas, contribuem para o desenvolvimento integral e constante do aluno. A vida escolar torna-se mais rica e intensa, cheia de conteúdos que se conectam dentro e fora da escola, através de relações recíprocas e experiências múltiplas que criam a base para a formação do individual e consequentemente do coletivo.

De acordo com nossa metodologia, graças a uma série de perguntas feitas às crianças no próprio manual, a reflexão sobre o processo de solução é organizada, aprofundando as dependências existentes entre a abordagem e a questão do exercício, entre dados e incógnitas. (ZANKOV, 1984, p.74)

A metodologia zankoviana permite que professor e manual interfiram diretamente na mediação através de perguntas e tarefas que organizam e aprofundam a reflexão dos alunos, contribuindo para seu desenvolvimento integral.

No sistema experimental proposto pelo autor, o material e o professor precisam atentar para a clareza em sua comunicação, pois quanto mais detalhada e precisa for a orientação para o aluno, mais suas dúvidas e ações o farão empreender visando atingir os objetivos propostos.

Com a execução das práticas indicadas pelo sistema experimental zankoviano, espera-se que, com o tempo, o aluno desenvolva e exerça autocontrole, não só

²¹ “El apasionamiento, la alegría que proporciona el proceso de la labor, del estudio y su resultado, infunden nuevas fuerzas, comunican a la actividad una alta energía, en tanto que el tedio y el aplanamiento la frenan.”(ZANKOV, 1984, p.63)

empreendendo uma ação sobre algo que está sendo proposto, mas, também, exercendo-o em sua vida cotidiana.

No sistema proposto pelo autor, o professor não corrige os erros, ele procura propor para os alunos o uso de procedimentos que possam comprovar a assertividade ou não do que foi desenvolvido, como uma prova real. O professor ajuda o aluno a organizar de maneira racional as tarefas de modo que possibilite a ele verificar a validade da resposta.

A experiência de L. V. Zankov mostrou que esse planejamento do trabalho influencia de maneira favorável o aperfeiçoamento dos hábitos motores (hábitos relacionados a resoluções através de algoritmos), mas também contribui para a formação do autocontrole e autoaprendizado. A partir disso, pode-se investir em tarefas de maior destreza e domínio cognitivo, confirmando os cinco princípios zankovianos, descritos no capítulo 1 desta tese.

O sistema experimental zankoviano se organiza a princípio com os alunos se orientando pelas perguntas do professor ou as constantes no material. Essas perguntas seguem uma proposta lógica que nos encaminha ao seguinte estilo de indução:

“Se inicialmente fizemos isso, poderíamos posteriormente fazer aquilo outro?”

“Será conveniente?”

“Se não é conveniente, por quê?”

Tais perguntas são necessárias para estimular os alunos a desenvolverem formas próprias de ação, para que interiorizem interdependências e relações nos assuntos estudados, tornando significativo, dando sentido e permitindo a apropriação do conceito pelo próprio indivíduo que aprende.

São utilizadas, também, tarefas peculiares em que se demanda a busca do específico. Para isso, o professor chama a atenção dos alunos para os diferentes procedimentos propostos por eles, anotando-os no quadro para a visualização de todos, isso acontece nas diferentes tarefas realizadas, ficando evidente os diferentes processos de cada aluno. Isso os ajuda a compreender as operações que foram efetuadas, compará-las e assim poder dar sentido e criticar cada uma delas, escolhendo seu próprio processo.

Segundo estudos efetuados por L. V. Zankov, para os alunos terem condições de resolver operações de nível superior às de sua série escolar, precisam raciocinar de maneira ordenada, tal como organizamos o raciocínio para a fabricação de um objeto, por exemplo. Deste modo, a realização de tarefas, implica em um número considerado de

operações previamente definidas, divididas em várias partes, nas quais em cada uma delas se recapacita num processo de trabalho que levará à realização das outras.

Isso os levará a alcançar a capacidade de planejar um objeto bastante complexo, com a atenção voltada para a busca de decisões racionais planejadas. Quando o aluno atinge este ponto, o professor comunica ao aluno orientações de trabalho que o leve a reflexão de sua ação, com a intenção de aprimorar suas decisões. São elas:

- 1) Simplicidade nas descrições, mínimo de operações, procedimentos mais aperfeiçoados, mais racionalizados e material mais acessível;
- 2) Economia de materiais;
- 3) Qualidade estética dos objetos.

A busca por tomadas de decisões mais racionais e eficientes é para os alunos um novo escalão, uma nova dificuldade. Desse modo, o professor precisa anotar as variáveis das decisões tomadas por eles no quadro com o objetivo de juntos aperfeiçoá-las. O processo de discussão dos alunos promove diferentes pontuações que são valorizadas de acordo com o procedimento apresentado, depois destaca-se o procedimento mais racional alcançado. Ao chegar neste ponto as anotações iniciais devem ser apagadas do quadro, deixando a mais elaborada e racional.

Os alunos, durante a realização das tarefas, manifestam novas ideias que desejam comunicar à turma. Neste momento, o professor deve apoiar e estimular a turma na execução do trabalho, permitindo a livre troca de opiniões, pois desse modo contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, o desenvolvimento coletivo e a formação integral individual.

Trabalhar em grupo, como uma equipe, é importante para que os alunos possam conhecer elementos da organização do trabalho fora do ambiente escolar e desenvolver habilidades de liderança. Os questionamentos, ao final do processo de aprendizagem, e o uso racional de todas as ideias propostas pela turma, promove o trabalho coletivo, ou seja, o trabalho de cada aluno depende de todo o grupo e envolve várias tarefas, fazendo com que os mais lentos sejam respeitados e estimulados, não deixando nenhum deles para trás.

As tarefas propostas devem possuir caráter que permita a criação de condições favoráveis para impulsionar a iniciativa dos alunos, bem como sua capacidade técnica, pois juntas ampliarão seu conhecimento e destreza.

Para a organização das aulas, não se pode deixar de levar em consideração o tempo do trabalho em conjunto e o tempo de intervenção das ações por etapas, pois os

alunos conhecem a partir desse processo, um novo conceito de ritmo e frequência de trabalho. Para que os conceitos sejam corretamente assimilados é necessário que cada uma das tarefas seja previamente orientada e que seja estimulada a troca de informações sobre os conteúdos envolvidos.

No processo de ensino-aprendizagem na sala de aula, L. V. Zankov orienta que, por meio de perguntas, o professor apresente tarefas concretas, promova a apreciação de partes dos modelos necessários para a tarefa através da interação entre elas. A partir disso, os alunos conseguem perceber como funciona a realização das tarefas; assim, os processos utilizados podem se tornar cada vez mais complexos, representando sua parte oculta que demanda certas análises para a aproximação. Para tal, é conveniente, no ensino da geometria por exemplo, preparar vários modelos para que os alunos possam conhecer com mais detalhes, dar voltas, girar, tocar, observar, caso seja possível.

O professor orienta a análise do modelo por meio de perguntas mais gerais do que as que foram feitas no primeiro momento. Depois, ele propõe que sejam indicadas as partes que constituem aquilo que se está sendo estudado. Os alunos enumeram as partes que o compõem, e, quando necessário, corrigem aquilo que se percebeu equivocado. O professor só aprofunda as análises nos casos em que as possibilidades dos alunos se esgotam sem alcançar a profundidade necessária para a compreensão do conceito. Na etapa seguinte, os alunos já conseguem por si só analisar os modelos mais complexos e determinar procedimentos de ação. O professor então, induz as análises utilizando perguntas gerais, como por exemplo, “como fazer isso?”.

A execução deste processo promove tarefas que são valiosas por demandar uma reflexão meticulosa das ações para o controle de dados que promovem a reflexão. Assim, no caso da geometria por exemplo, depois de explicar a tarefa e escolher um plano a ser efetuado, o aluno imagina mentalmente o objeto, depois anota o plano de trabalho registrando: Quais peças serão utilizadas? De que peças precisaremos? Como essas peças serão unidas para compor um sistema, e em qual ordem deve ser feita? Ao terminar o trabalho, deve consultar o texto indicativo da tarefa e registrar o plano traçado novamente, fazendo as correções complementares. O resultado da tarefa e de seus planos deverão ser entregues ao professor.

Ao anotar as contradições encontradas nos modelos e a construção definitiva, o professor identifica as diferenças, avaliando a necessidade ou não de intervenção. Ao visualizar seus resultados, os alunos se questionarão da necessidade de ampliação do

conhecimento sobre determinadas áreas distintas, ao mesmo tempo, em que nos trabalhos executados, os alunos alcançarão conhecimentos que fundamentarão o conceito estudado.

Segundo L. V. Zankov, no trabalho com o sistema experimental, os alunos precisam conhecer as coisas que dão sentido ao mundo, tais como os princípios básicos físicos, a própria matemática das coisas, através de instrumentos como balanças, calculadoras e quadros de energia. Assim, os alunos adquirem diferentes vivências que ampliam seus horizontes técnicos e de vida, visto que estes conhecimentos cinemáticos e matemáticos se fazem presentes nas máquinas e suas peças, dentre outros.

É claro que não só o contato com materiais e instrumentos podem garantir o aprendizado, é necessário que o professor ofereça também, uma quantidade de exercícios que seja suficiente para a fixação do conteúdo apresentado, pois o abstrato, a imaginação e a interpretação de situações-problema através da linguagem são igualmente necessários para a formação integral do aluno. Entretanto, para evitar que esse tipo de treinamento seja tedioso, como costuma ser nas propostas tradicionais de ensino, no sistema experimental zankoviano, opta-se por descartar os excessos e as repetições desnecessárias.

Estabelecer meios para que os alunos sejam respeitados em suas particularidades a cada tarefa, porém sem perder de vista o essencial do conceito desenvolvido e os princípios do aprendizado do sistema experimental zankoviano, irá colaborar com a ampliação de destrezas que se tornarão hábitos, os quais serão adquiridos com a realização de tarefas teóricas e práticas que respeitem uma quantidade de repetições onde a mesmice e o tédio não tenham vez.

Em nossa pesquisa, atentos para que não fixássemos nossos esforços de análise apenas nos registros das tarefas e nas impressões do professor, decidimos que o pesquisador deveria atuar como observador. Dentre as análises feitas para esta definição, destacamos a de Tjora (2006, p. 429), quando afirma que:

[...] o método de observação faz demandas substanciais sobre o pesquisador e pode ser uma das formas mais difíceis de pesquisa para aplicar em seu próprio ambiente. A vida cotidiana, que aceitamos sem questionar, pode tornar invisíveis coisas que seriam relevantes para o observador. Estudantes e pesquisadores têm sido muitas vezes relutantes em iniciar estudos de observação, visto que há o risco de ser rejeitado por causa da grande necessidade de presença pesquisador, ou, num segundo momento, o risco de não ser capaz de lidar com o fato de passar tanto tempo junto com os objetos do próprio estudo, e, ainda, o

medo de acabar com pilhas de dados que podem não ser capazes de analisar²². (TJORA, 2006, p.429)

Após conhecermos os fundamentos e o método utilizado no sistema experimental de L. V. Zankov, planejamos um experimento didático-formativo, organizado nessa perspectiva. Essa opção se baseia na defesa do autor de que o ensino através de seu sistema didático experimental pode proporcionar melhores resultados no desenvolvimento do aluno que o realizado através das metodologias tradicionais, como na defesa de que por ter sua base no experimento, as possibilidades de uma maior eficácia nos resultados do processo de ensino são evidentes (ZANKOV, 1984).

Ao fazermos essa opção, concordamos com Aquino (2017), quando pondera que o experimento didático-formativo é simultaneamente um método de investigação e um método de ensino, “orientado para potencializar a aprendizagem e o desenvolvimento físico e emocional dos alunos” (p. 340). Segundo ele, enquanto método de pesquisa no campo da didática desenvolvimental envolve novas metodologias de ensino, novas tecnologias, enfim, outras formas de organização do ensino.

O experimento que realizamos fundamentou-se nos pressupostos e princípios do sistema didático experimental zankoviano, porém, sem a pretensão de se constituir em um sistema didático abrangente e longitudinal como o realizado por L. V. Zankov e sua equipe. A limitação se dá pelos limites físicos e temporais para tal abordagem. Desenvolvemos o experimento voltado para um único conceito, o dos “Logaritmos”.

Quanto ao limite de tempo, ele decorre do fato de que a investigação está vinculada à elaboração de uma tese de doutorado, para a qual existem prazos a serem cumpridos. É preciso considerar, ainda, o limite da disponibilidade dos alunos, pois o experimento precisou ser realizado em horário extra turno regular, bem como a disponibilidade do professor que colaborou no desenvolvimento do experimento.

Nesta investigação, ao nos aproximarmos do objeto de estudo, o ensino-aprendizagem dos logaritmos, buscamos abarcar todos os aspectos e vínculos deste

²² “[...] the observation method makes substantial demands on the researcher and can be one of the most difficult forms of research to apply in your own environment. Daily life, which we accept without question, can make things that would be relevant to the observer invisible. Students and researchers have often been reluctant to start observation studies, as there is a risk of being rejected because of the great need for a researcher presence, or, in a second moment, the risk of not being able to deal with the fact of passing so much time together with the objects of the study itself, and yet, the fear of ending up with stacks of data that may not be able to analyze” (TJORA, 2006, p.429).

objeto, ainda que o próprio L. V. Zankov diga que isto é impossível, pois jamais abordaremos por completo todas suas relações. No entanto, durante o estudo, procuramos organizar buscas contínuas que nos aproximassem ao máximo daquilo que poderia ser indicado como a essência do objeto.

Neste sentido, apoiamo-nos em Caraça (1951, p.112), quando afirma: “Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e factos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados”. A esse recorte chama “isolado” e a partir dele busca-se reconstituir o todo, num movimento de análises e de sínteses.

Assim, analisamos as particularidades que se manifestam nos programas curriculares, no material didático, no registro de fala do professor e dos alunos, nas tarefas de ensino e nas produções dos 6 alunos, em 16 encontros, nos quais se buscou avaliar o sistema didático experimental proposto, na apropriação do conceito dos logaritmos, isto é, na busca da essência revelada pelo estudo histórico e lógico do conceito dos logaritmos.

Para a análise, tomamos como eixo as tarefas de estudo desenvolvidas nos encontros com os alunos, construídas com base nos princípios didáticos de L. V. Zankov, que nos orientaram em todo o processo de pesquisa. Para a realização da análise das tarefas cujas ações realizadas, visavam explorar o histórico, o lógico e a apropriação do conceito dos logaritmos, vamos considerar três eixos:

- a) apreensão de relações essenciais do conceito,
- b) a aplicação dinâmica dos princípios didáticos,
- c) a unidade do afetivo-cognitivo.

Com a intenção de verificar vestígios da apropriação do conceito dos logaritmos, pelos alunos, apoiamo-nos nas argumentações sobre os conceitos científicos em Vigotski, que nos diz que a relação do sujeito com um determinado objeto é mediada desde o início por algum outro conceito, ou seja, a noção de conceito científico implica em compreendê-lo relacionalmente em um sistema de conceitos, assim: “a sua apreensão (...) pressupõe um tecido conceitual já amplamente elaborado e desenvolvido por meio da atividade espontânea do pensamento infantil” (VIGOTSKI, 1998, p. 269).

Este entendimento nos leva ao primeiro eixo, o da apreensão de relações essenciais do conceito, que se entrelaça com os demais pela sua essencialidade no objetivo do processo de ensino-aprendizagem.

Já para a definição do segundo eixo, o da aplicação dinâmica dos princípios didáticos, baseamo-nos no próprio L. V. Zankov, quando diz que:

O papel determinante e regulador, referente à metodologia de ensino em suas múltiplas formas, corresponde aos princípios didáticos, que foram descobertos no processo de busca de caminhos pedagógicos que levem ao desenvolvimento geral ótimo de escolares. (ZANKOV, 1984, p.20)²³

A aplicação dinâmica dos princípios didáticos não é possível de ser alcançada sem o envolvimento verdadeiro dos alunos, o qual é acionado através da unidade afetivo-cognitivo, levando-nos ao terceiro eixo de análise.

O próprio pensamento não tem origem em outro pensamento, mas na esfera motivacional da nossa consciência, aqui se inclui nossos desejos e necessidades, nossos interesses e motivos, nossos afetos e emoções. Por traz do pensamento se encontra uma tendência afetiva e volitiva, a única que pode dar resposta ao único “por que” na análise do pensamento. (VIGOTSKI, 1987, p. 357)

Com estes três eixos definidos, buscamos indícios que respondam nossas questões e nos levam à produção de propostas que possam ser relevantes para o ensino de Matemática, e, mais especificamente, para o ensino dos logaritmos no Ensino Médio.

3.2 A trajetória da pesquisa

Desde o início da investigação, sentimos a necessidade de adaptação do sistema didático experimental de L. V. Zankov, para a nossa pesquisa que seria realizada no século XXI, com participantes que possuem características temporais, culturais e sociais diferentes. O experimento de L. V. Zankov se deu com crianças do ensino fundamental russo, na segunda metade do século XIX. No caso desta pesquisa, tratam-se de adolescentes, estudantes do ensino médio brasileiro. Por tudo isso, não seria possível a replicação exata das características do sistema longitudinal zankoviano.

²³ “El papel determinante y regulador, en lo concerniente a la metodología de la enseñanza en sus múltiples formas, corresponden a los principios didácticos, que fueron descubiertos en el proceso de la búsqueda de las vías pedagógicas que conducen al desarrollo general óptimo de los escolares.” (ZANKOV, 1984, p.20)

Em nossa pesquisa, investimos no ensino-aprendizagem dos logaritmos, mais especificamente, na apropriação do seu conceito apoiados nos pressupostos e princípios desse sistema.

O papel do estudo e da adaptação de tal sistema para esta pesquisa, ocorreram no sentido de atualização dos processos e tarefas que foram desenvolvidos no decorrer dos encontros com os alunos, visando alcançar os objetivos aqui traçados, bem como a preparação do professor colaborador para o desenvolvimento do experimento de maneira coerente com os princípios zankovianos.

Conforme já apresentamos, o experimento didático-formativo ocorreu em quatro etapas. Neste capítulo, detalharemos as etapas de elaboração do sistema, a de desenvolvimento.

Nos meses de julho, agosto e setembro do ano de 2018, apresentamos o sistema zankoviano e seus princípios para os dois professores de matemática que aceitaram participar do experimento, reuníamos-nos uma vez por semana em horários variados, conforme a disponibilidade que possuíam. No mesmo período, recolhemos o assentimento dos alunos da primeira série do Ensino Médio, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido dos responsáveis pelos alunos para que participassem do experimento. Na ocasião, conseguimos a adesão de 26 alunos. Porém, a aplicação não foi possível em 2018, dada a proximidade do final do ano letivo.

Em outubro e novembro do ano de 2018, discutimos e elaboramos as quatro tarefas, materializadas em 16 ações, que foram revistas e alteradas durante o processo de sua aplicação no ano de 2019, tornando-se, ao final de 16 encontros, 3 tarefas com 12 ações, acrescidas do diagnóstico inicial e final. A primeira tarefa começou a ser aplicada no dia 16 de abril de 2019 para 6 alunos, pois os demais alegaram não possuir disponibilidade de horário para participar dos encontros, dado que seria em horário extra, uma vez que esse conteúdo não está incluído no 2º ano. Depois de 16 encontros de 50 minutos cada, realizados uma vez por semana, às quintas-feiras, no horário extra turno, das 14h00min às 14h50min, no período de abril a setembro de 2019, concluímos a aplicação das 3 tarefas, mais os diagnósticos e a avaliação dos encontros. Também tivemos a baixa de um dos professores que, em 2018, havia concordado em participar, porém isso não foi possível, devido ao seu desligamento da escola no final do mesmo ano.

As três tarefas foram definidas a partir das relações concebidas entre o lógico, o histórico. Neste sentido, Kopnin (1978, p. 186) afirma que:

O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. À base do conhecimento dialético do histórico e do lógico resolve-se o problema da correlação entre o pensamento individual e o social; em seu desenvolvimento intelectual individual o homem repete em forma resumida toda história do pensamento humano. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento. (KOPNIN, 1978, p.186)

Com essas tarefas procuramos abranger dentro do processo de apropriação do conhecimento e formação do conceito dos logaritmos, elementos que reflitam a teia de conhecimentos que compõem o próprio conceito. A escolha de trabalharmos com as tarefas ordenadamente não as tornam tarefas distintas, não se trata de decompor o todo em partes para uma análise, trata-se de uma tentativa de mostrar, tendo como base a análise de elementos, como se constitui e se desenvolve o todo.

Apoiamos nossa escolha em L. Vigotski (1998, p.98), que afirma:

Ao usar essa abordagem, não nos limitamos ao método usual que oferece ao sujeito estímulos simples dos quais se espera uma resposta direta. Mais que isso, oferecemos simultaneamente uma segunda série de estímulos que têm uma função especial. Dessa maneira, podemos estudar o processo de realização de uma tarefa com a ajuda de meios auxiliares específicos; assim, também seremos capazes de descobrir a estrutura interna e o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. (VIGOTSKI, 1998, p.98)

Acreditamos que as estruturas internas que podem levar os alunos ao desenvolvimento dos processos psicológicos superiores são as ações. Essas definidas como auxiliares da tarefa na constituição das estruturas internas. Pois há uma diferença importante que deve ser considerada na organização do processo de ensino-aprendizagem dos adolescentes que se distingue do processo das crianças. Segundo Vigotski (1998, p. 67), a diferença é a seguinte:

Para as crianças, pensar significa lembrar; no entanto, para o adolescente, lembrar significa pensar. Sua memória está tão “carregada de lógica” que o processo de lembrança está reduzido a estabelecer e encontrar relações lógicas; o reconhecer passa a consistir em descobrir aquele elemento que a tarefa exige que seja encontrado.

Utilizando esse recurso de memória do adolescente, realizamos um diagnóstico inicial, que nos ofereceu como resultado a zona de desenvolvimento atual do aluno,

permitindo-nos organizar o ensino-aprendizagem de modo a atuar na zona de desenvolvimento próximo (ZDP²⁴) deste aluno, fazendo com que nossa abordagem tenha maior efetividade.

Partimos para a realização da atividade, que foi desenvolvida com a presença e observação do pesquisador, sendo que a regência do processo e a mediação aluno-professor ficaram a cargo do professor colaborador, que foi um professor de Matemática da escola, que aceitou participar e tinha espaço em sua carga-horária para os encontros de preparação. Apesar de o professor possuir formação acadêmica e ter experiência profissional de docência, sua participação nesta investigação também se constituiu em momento de formação continuada, pois para atuar em cada encontro, participou previamente de estudos e discussões com o pesquisador para definir como deveria ser sua postura na aplicação de cada tarefa.

3. 3 Planejamento do experimento

Como pretendíamos organizar o ensino-aprendizagem dos logaritmos visando à apropriação do seu conceito de forma coerente com os princípios didáticos zankovianos, sendo um deles a apropriação do conhecimento teórico, decidimos organizá-los em três tarefas de estudo. Tais tarefas foram organizadas durante todo o período de formação com o professor, que antecedeu sua aplicação, até o final dos encontros, pois a cada semana avaliávamos os elementos utilizados e modificávamos as seguintes, conforme as necessidades. Participaram da produção e desenvolvimento das tarefas, o pesquisador, a orientador e o professor.

A tarefa, quando organizada dentro dos princípios zankovianos, possui estruturas, que associadas à etapa da observação, extrai dos alunos o conhecimento através da oralidade e escrito. A realização destas tarefas mobiliza de maneira única, o cognitivo e o afetivo, que são percebidos nos relatos verbalizados dos alunos e na disposição deles para dedicar-se e resolver os desafios apresentados.

Diferente de processos de ensino, que enfatizam o cognitivo, a organização do ensino a partir dos princípios de L. V. Zankov, inclui os aspectos emocionais, a

²⁴ Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VIGOTSKI, L. S. 1998 p.112)

sensibilidade do aluno, que apreende no processo as relações essenciais do conceito estudado em uma ação consciente que se revela em sua fala e em sua escrita durante o processo. Este formato de aprendizagem, auxilia na formação do pensamento teórico e abstrato que é essencial para o ensino-aprendizagem da Matemática.

Apesar de sabermos que o processo de aplicação das tarefas é dinâmico e todas elas se resumem a um único objetivo, a apreensão de conhecimentos teóricos a respeito dos logaritmos, em que os aspectos históricos, lógicos, conceituais se relacionam e se integram de forma dialética, foram propostas três tarefas, cada uma focando um aspecto:

- 1) O histórico;
- 2) O lógico;
- 3) O conceito.

Deste modo as tarefas e as ações propostas foram pensadas e organizadas, assumindo os princípios de L. V. Zankov a fim de que a qualidade do método científico geral fosse preservada, permitindo estudar as relações de determinadas facetas do processo. As tarefas procuraram orientar a tomada de decisões racionais dos alunos, fazendo uso de um nível de dificuldade gradativa e assistida. Procuramos ainda estimular o trabalho em equipe dentro do ambiente escolar. Assim, as tarefas propostas assumiram caráter de proporcionar condições favoráveis para impulsionar a criação de ações com iniciativa dos alunos, se então, em nossos eixos de análise.

Visando a uma melhor organização do texto e a compreensão do leitor, as tarefas serão apresentadas no momento de sua análise, no próximo capítulo e nos Anexos. Nesta parte, apresentaremos os objetivos de cada tarefa.

Apesar de nós termos programado desenvolver o experimento no ano de 2018, apenas em 2019 foi possível sua realização, devido a alguns problemas encontrados com a disponibilidade dos professores da escola. Atrasamos, e os alunos que haviam aceitado participar da pesquisa, já haviam sido promovidos para a segunda série, sendo assim, já haviam estudado os logaritmos, que é assunto da primeira série.

Decidimos então, iniciar nossas atividades com a aplicação de um diagnóstico sobre o conceito dos logaritmos, na tentativa de avaliar a apropriação do mesmo pelos alunos. Essa análise inicial nos proporcionou justificar e organizar a sequência das tarefas propostas. Esse planejamento ocorreu num movimento dialético de idas e vindas, com reformulações, estudo bibliográfico e discussões.

A seguir, apresentamos a intencionalidade de cada tarefa e para auxiliar na sua análise como unidade, relacionamos as ações e seus objetivos sempre procurando observar os pressupostos zankovianos, incluímos, também as ações de diagnóstico.

3.3.1 O Diagnóstico

No diagnóstico, buscamos compreender se o aluno apresenta consciência de seu próprio processo de aprendizagem sobre o tema e qual é o nível de conhecimento apresentado por cada sujeito quanto ao conceito dos logaritmos.

Esta ação envolvia a produção de um texto, orientado pelas seguintes questões: Relate aqui o que você se recorda desse estudo, a partir das questões: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

3.3.2 As tarefas/ações propostas e seu objetivos

Apresentamos no quadro as três tarefas e seus objetivos, como também as ações mais gerais que constituem essas tarefas. O detalhamento, como anunciamos anteriormente será feito no momento da análise, no próximo capítulo. Destacamos que, em todas elas, procuramos observar que as ações promovessem o ensino a um alto grau de dificuldade, com ênfase na rede de conhecimentos e conceitos teóricos, em ritmo acelerado, orientando o sujeito ao uso da consciência de seu próprio processo de aprendizagem. Além de estimular o ensino de cada aluno em particular respeitando seu tempo.

Quadro 3 – Tarefas e objetivos

TAREFA	OBJETIVOS	AÇÃO
Tarefa 1 1.1 O histórico: A necessidade	Promover o interesse a partir de fatos históricos, despertando a afetividade em relação ao estudo em questão, a partir de uma lógica objetiva alinhada à rede de conceitos necessários para a	Ação 1 – Apresentação aos alunos de situações e fatos históricos nos quais os números e suas operações fossem identificados como essenciais para o desenvolvimento do homem, indicando o aumento natural da complexidade das necessidades operatórias, conduzindo os alunos a

	apropriação do conceito dos logaritmos. Usar de elementos históricos que apresentam a necessidade do homem em fazer contas cada vez mais complexas para compreender e explicar o mundo.	reflexões que serão compartilhadas no grupo e registradas.
Tarefa 1 1.2 O processo manual	Promover um ritmo rápido de aprendizagem a partir da tomada de consciência de seu próprio processo de aprendizagem. Provocar a necessidade do uso de ferramentas matemáticas mais sofisticadas, além do uso de instrumentos, como a calculadora, a partir da proposta da resolução de operações simples, porém trabalhosas.	Ação 2 – Incentivo à resolução de operações matemáticas básicas, porém aumentando a cada uma seu nível de complexidade, até que o aluno diagnosticasse a necessidade do uso de equipamentos como a calculadora, para que percebessem as dificuldades dos relatos vistos na tarefa anterior.
Tarefa 1 1.3 A dificuldade	Promover emoções positivas com relação ao estudo, por meio da proposta de resolução de operações simples, porém trabalhosas que exemplificam a necessidade de recursos matemáticos mais sofisticados e do uso de instrumentos como a calculadora.	Ação 3 Resolução de operações simples, porém trabalhosas que exemplifiquem a necessidade de recursos matemáticos mais sofisticados e do uso de instrumentos como a calculadora, a fim de promover a identificação e afetividade nos processos em relação ao estudo histórico já realizado na ação anterior.
Tarefa 1 1.4 Os números na atualidade	Promover o estudo da lógica objetiva e histórica do processo de apropriação do conceito dos logaritmos. Desenvolver a consciência de seu próprio processo de ensino e aprendizagem.	Ação 4 - Apresentação de elementos atuais e cotidianos que justificam a necessidade de operações matemáticas complexas e/ou o uso da calculadora, tais como o armazenamento de dados digitais.
Tarefa 1 1.5 A busca por uma solução	Observar a tabela de Arquimedes (tabela numérica organizada de forma que expoentes e potências sejam	Ação 5 – Apresentação da tabela de Arquimedes (tabela numérica organizada de forma que expoentes e potências sejam encontrados com facilidade) de maneira intuitiva,

	encontrados com facilidade), que agrega uma diversidade de significados, propriedades e conceitos matemáticos.	procurando agregar significados às operações realizadas, propriedades e conceitos matemáticos utilizados.
Tarefa 2 Explorando os expoentes	Aproximar do conceito dos logaritmos, através da rede conceitual construída até o momento. Identificar e compreender os elementos matemáticos, expoentes, base e potência, bem como o surgimento de suas propriedades operatórias na tabela de Arquimedes.	Ação 6 – Estimulação de aproximações ao conceito dos logaritmos através da delimitação da rede conceitual construída a partir das tarefas anteriores, instigando a identificação e compreensão dos elementos matemáticos como, os expoentes e suas propriedades operatórias, presentes na tabela de Arquimedes.
Tarefa 3 3.1 Explorando os logaritmos	Desenvolver o conceito dos logaritmos, com ênfase na rede de conceitos teóricos já construídos.	Ação 8 – Identificação do conceito dos logaritmos a partir da ênfase dada à rede de conceitos teóricos já construídos nas tarefas anteriores, estimulando o sujeito a construir conscientemente seu próprio processo de aprendizagem.
Tarefa 3 3.2 O logaritmo	Compreender os componentes dos logaritmos: mantissa e característica, resgatando a Tábua dos Logaritmos.	Ação 9 – Introdução do conceito de mantissa e característica, resgatando o uso da tábua dos logaritmos.
Tarefa 3 3.3 A função logarítmica	Compreender a função exponencial e logarítmica a partir de seus gráficos, como instrumentos de leitura da realidade e dos fenômenos da natureza, com o auxílio das tecnologias.	Ação 10 – Exploração da linguagem gráfica das funções exponencial e logarítmica, para que os alunos construíssem sua interpretação da rede de conceitos apresentadas utilizando linguagens diversificadas.
Tarefa 3 3.4 Compreendendo a função mais a fundo	Usar a definição de PA (progressão aritmética) e PG (progressão geométrica), para alcançar o conceito de função exponencial e logarítmica, conforme definido em Lima (2001).	Ação 11 – Apresentação através de deduções, utilizando PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica), os conceitos existentes nas funções exponencial e logarítmica, envolvidos na rede de conceitos já constituída.

Tarefa 3 3.6 A função exponencial	Aplicar o modelo da atividade anterior a situações-problema propostas, na busca do aprimoramento de seu conhecimento.	Ação 13 – Aplicação de modelos da ação anterior a situações-problema propostas, na busca do aprimoramento do conhecimento já construído.
---	---	--

Destacamos a contribuição do método dialético na constituição das ações e tarefas aqui apresentadas, pois, em nosso entendimento, buscamos alcançar a totalidade do objeto, sendo o todo imprescindível para conhecê-lo na sua essência.

Assim, as tarefas, ações e seus objetivos constituem um modelo de organização do ensino dos logaritmos, cujo movimento lógico e histórico promove uma abordagem dialética da teia de conceitos que compõem o conceito dos logaritmos no Ensino Médio.

4 A APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DOS LOGARITMOS: A ANÁLISE DOS RESULTADOS DO EXPERIMENTO

[...] o objeto, no processo do pensamento, entra em novas e novas relações e, em virtude disso, atua em novas e novas qualidades, que se fixam em novos conceitos; desse modo, do objeto parece como se extraísse constantemente um novo conteúdo; cada vez apresenta um lado novo, nele aparecem novas qualidades. (RUBINSTÉIN, 1958 apud ZANKOV, 1984, p. 103, tradução nossa).

Com base nos princípios de L. V. Zankov e em sua concepção de ensino integral, analisamos os resultados obtidos no experimento desde sua concepção. Assim, iniciamos este capítulo apresentando o perfil dos alunos, em seguida os resultados do diagnóstico, até aplicação do experimento.

As tarefas, tomadas como nossos eixos de análise, dinamizadas nas ações referentes a seus eixos conceituais, foram apresentadas por meio de um material impresso que orientou professor e alunos, na busca pela apreensão das relações essenciais da rede de conceitos relacionados com os logaritmos. Na tentativa de reconhecer tal apreensão, buscamos nos participantes, em suas respostas, representações, reações e emoções, indícios do registro e expressões de significados e conceitos que direcionaram nosso olhar para uma estrutura qualitativa de análise, que possibilitou a identificação das relações essenciais do conceito dos logaritmos por estes participantes.

Nesta análise, inserimos falas e produções dos alunos, porém optamos por não publicar os registros similares, evitando a redundância.

Na sequência, apresentaremos os participantes destacando que, para preservar a sua identidade, faremos uso da palavra Aluno, seguida de um número para a sua identificação, independente do sexo.

4.1 Traçando os perfis dos participantes

Para melhor compreendermos as características dos participantes, vamos descrevê-los, identificando-os como explicado anteriormente.

4.1.1 Perfil dos alunos participantes

Aluno1 – Menina de 16 anos, oriunda da escola pública, chegou ao colégio para cursar a primeira série. Seu histórico de notas indica dificuldades com a compreensão dos conteúdos, sendo a Matemática sua nota mais baixa. Colegas e professores relatam grande

determinação, o que tem contribuído para a perceptível melhora de seu desempenho geral. Apesar de seus esforços, foi promovida para a segunda série com progressão em Matemática e Química.

Aluno2 – Menina de 16 anos, sempre estudou em escola particular. Chegou ao colégio pesquisado, na primeira série do Ensino Médio, no ano de 2018. Suas notas são acima da média. Colegas e professores apontam a aluna como comprometida com seus estudos. Foi promovida para a segunda série, sem restrições.

Aluno3 – Menina de 15 anos, sempre estudou na escola pesquisada. Suas notas oscilam entre a média e pouco abaixo dela, indicando instabilidade em seu desempenho escolar. Colegas e professores relatam que é uma aluna com dificuldades, mas estável, fechando o bimestre sempre com notas dentro da média. Foi promovida para a segunda série, sem restrições.

Aluno4 – Menina de 16 anos, estuda há dois anos no colégio. Oriunda da escola pública, possui um histórico de notas sempre acima da média. Colegas e professores relatam que é uma aluna aplicada. Foi promovida para a segunda série, sem restrições.

Aluno5 – Menino de 16 anos, sempre estudou no colégio. Perceptivelmente tímido, procura ser discreto e contido em suas reações. Colegas e professores relatam que é introvertido e silencioso. Suas notas são acima da média. Foi promovido para a segunda série, sem restrições.

Aluno6 – Menino de 16 anos, sempre estudou no colégio. Suas notas são acima da média. Colegas e professores relatam que é discreto e participativo. Foi promovido para a segunda série, sem restrições.

Em síntese, é um grupo de alunos com média de idades de 15,83 anos, portanto sem defasagem idade-série e histórico de reprovações. Quatro são meninas, e dois meninos. A maioria estudou sempre em escola particular e na escola pesquisada, sendo que apenas um veio de escola pública. A maioria (4) tem bom desempenho escolar, com notas acima da média.

4.1.2 Perfil do professor colaborador

O professor tem 46 anos, é formado em odontologia há vinte e dois anos e atua como professor de matemática em escolas particulares e cursos preparatórios para vestibular há vinte e cinco anos, tendo cursado licenciatura em Matemática há quinze

anos. Atua nas três séries do ensino médio do colégio pesquisado, divide com outros dois professores os conteúdos de matemática previstos. Está na escola há um ano, sendo 2019 o seu segundo ano.

Apresentaremos a seguir os resultados do diagnóstico.

4.2 Análise do diagnóstico

O objetivo de aplicar um levantamento diagnóstico inicial foi o de averiguar quais conhecimentos acerca dos logaritmos os alunos traziam consigo depois de ter estudado o assunto na primeira série, no ano anterior. Após o registro escrito feito individualmente pelos participantes, foi realizado um momento de apresentação e discussão para verificar em seus falas vestígios de como foi sua experiência com o conteúdo e o professor, as emoções experimentadas neste processo, bem como suas impressões sobre a didática utilizada na ocasião, e, ainda, se perceberam a importância do assunto para suas vidas. Além de verificar se houve a apreensão do caráter geral do conceito dos logaritmos.

Diagnóstico inicial

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se lembra desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

Fonte: Arquivo do autor

Apresentaremos a seguir, trechos dos principais registros realizados pelos participantes, referentes às questões levantadas no diagnóstico.

Aluno1

Logaritmo é composto por 3 fatores, são eles: logaritmo, logaritmando e o outro eu não lembro.
--

O que eu me lembro é que existe um número, e
 que junto a ele constitui-se a base e um
 número que é elevado. Logo após identificar esses
 3 fatores que eu havia falado no começo é neces-
 sário fazer algumas mudanças para resolver a
 equação, podemos ao longo do exercício fazer o MMC
 para achar o valor dos expoentes até igualar
 as bases. Mediante a isso existem várias outras
 de substituir e resolver a equação. Eu me
 lembro também que antes disso estudamos a
 função para compreendermos melhor essa matéria

Logaritmo é composto por 3 fatores, são eles: logaritmo, logaritmando e o outro eu não recordo.
 O que eu me lembro é que existe um número, e que junto a ele constitui-se a base e um número
 que é elevado. Logo após identificar esses 3 fatores que eu havia falado no começo é necessário
 fazer algumas mudanças para resolver a equação, podemos ao longo do exercício fazer o MMC
 para achar o valor dos expoentes até igualar as bases. Mediante a isso existem várias outras
 maneiras de substituir e resolver a equação. Eu me recordo também que antes disso estudamos
 a função para compreender melhor essa matéria.

Nas respostas do **Aluno1**, o que também foi constatado nas dos demais de modo
 geral, percebemos o tangenciamento ao conceito dos logaritmos. É possível verificar que
 se recordam de boa parte da estrutura, porém são elementos externos, aparentes. Isso fica
 claro, quando o **Aluno1** escreve: “Lembrei! Tem o logaritmo, o logaritmando, e aí, tem
 um que é elevado, e o outro é a base. Novamente, quando se refere à resolução de
 equações: “é necessário fazer algumas mudanças para resolver a equação, [...] fazer o
 MMC para achar o valor dos expoentes até igualar as bases”, os nexos externos
 prevalecem.

O pensamento empírico prevalece na formação do conceito, indicando que não
 houve a apreensão das suas relações essenciais, o que permitiria a abstração teórica dos
 logaritmos. L. V. Zankov (1984) não despreza o conhecimento empírico e considera que
 o objetivo de seu sistema de ensino visa ao “desenvolvimento geral ótimo” dos estudantes
 para o qual também concorre o conhecimento empírico. Afirma ele: “O conhecimento
 empírico é o ponto de partida do complexo caminho que conduz à abstração”. (ZANKOV,

1984, p. 36). O ensino para ele não deve se limitar nem ao conhecimento empírico nem ao teórico, o importante é que se avance rumo à elevação do abstrato ao concreto.

Sua referência a MMC, no lugar de fatoração, é um indício do tipo de aprendizagem que valoriza os procedimentos e, não, os conceitos, pois o aluno se atém a um procedimento, que não é MMC, mas “fatoração”, para tentar igualar as bases das potências. Consegue associar o uso das equações exponenciais para a obtenção dos logaritmos, apesar de não conseguir explicitar de que maneira esta operação está associada ao conceito dos logaritmos.

No geral, nas respostas dos alunos foram usadas com frequência, palavras como: “base”, “logaritmando”, “função”, “aplicação” e “fórmula”, porém, estas palavras não traduzem, isoladamente, a compreensão do conceito dos logaritmos, pois são fragmentos empíricos, oriundos da repetição de algoritmos sem a atribuição de sentido. Essas palavras, quando usadas adequadamente, compõem uma rede de conceitos importantes para que seja alcançada a essência do conceito dos logaritmos. Junto a elas, há outras palavras que também compõem essa rede, tais como: “potência”, “expoente” e “inverso”. Essas aparecem com menor frequência em seus registros, citadas por apenas três participantes.

Assim, em seus registros e falas, encontramos indícios de que os participantes não detêm a essência do conceito dos logaritmos e desconhecem as possibilidades de suas aplicações no mundo real. Em todos os registros, é possível perceber, como os participantes tangenciam as características dos logaritmos, suas propriedades e condições de existência. Tal percepção nos possibilita afirmar que, no contato que tiveram com o assunto “logaritmos” na série anterior, estes alunos não se apropriaram do conceito.

Apenas os **alunos 1, 5 e 6**, sinalizaram de alguma forma, a ideia central do conceito dos logaritmos, ao citarem a importância do expoente desconhecido.

Aluno5

O Logaritmo possui em sua estrutura a base, logaritmando e o logaritmando, possui também uma incógnita, quando de-
nuncia descrever seu valor. Sua estrutura na algebra como $\log_2 x$
pois não me recordo muito bem como era a estrutura e co-
mo se usava ela para achar o resultado.

O logaritmo possui em sua estrutura a base, logaritmo e o logaritmando, possui também uma incógnita, quando devemos descobrir seu valor. Sua estrutura tem algo como $\log = x$, porém não me recordo muito bem como era a estrutura e como organizar ela para achar o resultado.²⁵

Ligado a ele também aprendemos a função logarítmica, em geral estudá-la foi bem repetitivo, o professor que na época ensinava, repetia o que era o que na estrutura, mas não foi de certa forma eficiente. Em relação a sua aplicação prática sei que ele tem uma importância, porém não foi mostrada nenhuma de suas aplicações práticas durante as aulas.

Ligado a ele também aprendemos a função logarítmica, em geral estudá-la foi bem repetitivo, o professor que na época ensinava, repetia o que era o que na estrutura, mas não foi de certa forma eficiente. Em relação a sua aplicação prática sei que ele tem uma importância, porém não foi mostrada nenhuma de suas aplicações práticas durante as aulas.

Por ser tímido, durante nossa discussão, o **Aluno5** recusou-se em manifestar junto a seus colegas, porém em seu registro escrito, apresenta clareza na ideia da importância de se encontrar um valor para a potência desconhecida. Apresentando ainda de maneira insegura, a compreensão da estrutura dos logaritmos. Com relação ao processo didático, percebemos que a repetição foi estimulada, porém não transformada em apreensão do conceito, a este processo de repetições, o aluno se refere como “não eficiente”.

Aluno6

O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído de logaritmando e de logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como ... fração, ... o expoente, fatorar potência, etc. Era necessário sempre identificar a base e expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho...

O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído do logaritmando e do logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como ... fração, ... o expoente, fatorar potência, etc. Era necessário sempre identificar a base expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho...

²⁵ Os registros dos alunos que usaram lápis não ficaram legíveis. Nestes casos, optamos por transcrevê-los em itálico.

O **Aluno6** se aproxima do conceito de forma empírica quando demonstra clareza no entendimento da existência de uma relação estreita dos expoentes para a solução das equações exponenciais ao afirmar que “era necessário sempre identificar o expoente, para assim organizar a equação com incógnita.” Percebemos na fala do aluno, a tentativa de manifestar uma rede de conhecimentos que alicerçam as relações essenciais do conceito dos logaritmos.

Com relação à função logarítmica, a transcrição de parte do diálogo do aluno **Aluno3** afirmando que “- Eu lembro de que tinha alguma coisa que era o inverso do logaritmo. Mas não lembro o que é. Acho que era uma função... É um b elevado ao quadrado.” Ou ainda, na fala do **Aluno4** “- Acho que começou mesmo foi por função quadrática, depois foi pra sua inversa que é a logarítmica... O gráfico eu sei que é ao contrário da quadrática.”

Estas falas mostram-se encobertas por dúvidas, associadas à essência do conceito dos logaritmos e da função logarítmica. Quando associam a ideia de “inverso” e destacam para isso, “aquele que se eleva”, identificamos vestígios do uso das potências, porém, a mesma vem associada à função quadrática, cujo potência é fixa, desqualificando tal associação. Percebemos uma confusão gerada pela presença de potências nas duas funções. – a potência 2 na função quadrática e “x” na função exponencial.

Há vestígios de que os alunos percebem de alguma forma que a função é um ente matemático importante para os logaritmos, porém nenhum deles conseguiu definir qual, dentre as funções estudadas, é a adequada à associação como inversa da função logarítmica, a quadrática, a exponencial ou a afim. Dentre os relatos dos participantes, a ideia de opostos, de inverso ou de algo que é o contrário dos logaritmos aparece, porém não conseguem distinguir ou apresentar de maneira correta tal ideia. Dois deles classificam as propriedades operatórias dos logaritmos como fórmulas para achar o resultado, porém, não sabem descrever onde ou como aplicá-las.

Quanto ao ritmo das aulas os alunos **Aluno6** e **Aluno4** registram.

Aluno4

As aulas eram voltadas para resolução de exercícios, principalmente de vestibulares. Não lembro de ter visto quais sejam suas aplicações na vida real e qual sua importância, mas sei que tem grande importância nos vestibulares.

Aluno6

com incógnita. As aplicações, suponho eu, que podem ser usados na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como a Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo de incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a "fórmula" do logaritmo e a terminando, com um ou outro exercício mais complexo.

As aplicações, suponho que podem ser usadas na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como a Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a "fórmula" do logaritmo e a terminando, com um ou outro exercício mais complexo.

Nos registros acima, são encontradas evidências de que os conteúdos escolares no ensino médio são tratados como meros recursos para os processos de seleção dos vestibulares, desprivilegiando sua cientificidade ou aplicabilidade na vida real, como se lê no registro do **Aluno4**, ao declarar que "sei que tem grande importância nos vestibulares". Esta fala, desqualifica o conteúdo dos logaritmos como conhecimento humano acumulado no decorrer da história da humanidade, tornando-o mero recurso de seleção para o ingresso nas universidades.

Em síntese, a partir desse diagnóstico, podemos inferir que os alunos avaliados, aproximam-se da compreensão das relações do conceito dos logaritmos, porém com a apresentação de marcas evidentes de um conhecimento empírico, baseado em elementos externos. Pela análise de seus registros e falas, tem-se a impressão de que o aluno se apropriou de pequenas partes de conhecimento, as quais não promovem seu desenvolvimento integral, visto que não conseguem associar onde os logaritmos caberiam em suas vidas ou na vida real, a não ser para serem aprovados nos vestibulares.

Assim, o diagnóstico apresentado aponta para um ensino que não alcança a apreensão de conceitos pelos alunos. Neste sentido, a busca do conhecimento teórico, como estabelece um dos princípios zankovianos, é um caminho que pode conduzir a avanços. Este diagnóstico vem justificar e corroborar a necessidade de investimentos em estratégias didáticas que possam proporcionar aos alunos, uma formação que seja integral.

4.3 Análise da Tarefa 1: o histórico

Conforme já apresentamos, essa tarefa contempla cinco ações. De modo geral, elas exploram situações históricas, a fim de despertar a curiosidade e o interesse dos participantes, além de lhes provocar através de indagações constantes, reflexões a respeito das necessidades envolvidas que se relacionam com o uso de elementos e ferramentas matemáticas, levando-os a perceber os motivos pelos quais os logaritmos se tornaram necessários para o homem.

Nas ações propostas, foram pensadas situações que descrevessem, ainda que brevemente, conquistas obtidas através do uso da matemática como instrumento e linguagem universal. Procuramos, também, estimular a imaginação, o raciocínio, a linguagem e a memória, a fim de acionar as capacidades psíquicas superiores que levarão os alunos ao seu “desenvolvimento ótimo”.

4.3.1 Análise da Ação 1 da Tarefa 1 – A necessidade

Ação 1 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que de alguma forma precisavam ser divididos, trocados ou utilizado em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros ainda maiores que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoados entre os anos de 1489 e 1631 (AABOEO, 2001).

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E, então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais as ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

Fonte: Arquivo do autor

Foi solicitado que descrevessem situações enfrentadas pelo homem em sua história em que foram necessários o conhecimento matemático as e ferramentas matemáticas

criadas para resolvê-las. Desta forma, foi possível estimular a participação dos sujeitos, que se mostraram emocionalmente envolvidos com a forma didática apresentada.

Seguem os registros realizados pelos **Aluno1 e 2**:

Aluno1

Desde os primórdios, o homem necessitou ao melhor aprimorar suas práticas comerciais, como por exemplo, no início do modo de produção capitalista comercial (passagem do feudalismo para o capitalismo). Os burgueses começaram a surgir, e o desenvolvimento matemático também, uma vez que ele é de grande forma, usual para cálculos monetários, criação de balanças para medir a massa dos produtos, e dentre outros. Há um livro que aborda a vida de Galileu Galilei e retrata essa exacta situação do aprimoramento matemático.

Aluno2

A matemática foi criada e "descoberta" durante situações de necessidade. Tal fenômeno começou a ser utilizado devido as humanas, primitivas necessidades de fazerem trocas, julgar, medir terras, prever fenômenos arqueológicos, dividir a colheita entre si, "entender" as estações do ano, para não prejudicarem as suas plantações, etc. Sendo assim, a matemática foi se desenvolvendo cada vez mais, e sendo mais compreendida, elaborando para uma maior facilidade uma vida das pessoas.

Percebemos nas falas dos **Alunos1 e 2**, uma postura que remete à uma perspectiva interdisciplinar, provocada pela associação de elementos históricos relevantes ao assunto. Há também o estímulo ao desenvolvimento de ferramentas matemáticas que orientam e organizam o cotidiano das pessoas. Seus registros demonstram que pensar a respeito da história do homem nos leva a associar suas práticas e tecnologias no desenvolvimento da própria matemática.

Percebemos que o uso de elementos históricos para contextualizar a matemática no cotidiano da humanidade no decorrer dos séculos, serviu como elemento de ativação de emoções que caracterizam o homem no mundo, promovendo satisfação e engajamento dos alunos na ação.

Aproveitando este engajamento, o professor propôs na sequência, ações que envolviam a resolução de algumas operações matemáticas com o objetivo de chamar-lhes a atenção para elementos básicos contidos em nosso cotidiano, como efetuar operações aritméticas, que, hoje fazemos com o uso das calculadoras, mas que historicamente ofereceram dificuldades ao homem.

4.3.2 Análise das Ações 2 e 3 da Tarefa 1 – O processo manual e a dificuldade

Ação 2 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo em que ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as “contas” a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

- A) 16×32
- B) 256×128
- C) 512×2014
- D) 64×512

A)	C)
B)	D)

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

Fonte: Arquivo do autor

Ação 3 – A dificuldade

O avanço tecnológico não para. São inúmeras as invenções e conquistas do homem por todo o mundo. Temos o desenvolvimento da astronomia, das engenharias, dos sistemas

econômicos e políticos, o uso do dinheiro como moeda de troca. Muitas são as necessidades do homem na busca de conhecer o mundo e das profissões, hoje, para que façam evoluir, tornar seguro e confiável seus processos.

Vamos destacar que a calculadora só foi criada em 1642, substituindo o ábaco, que era o instrumento mais próximo de uma, até então. Antes disso todos os cálculos eram realizados manualmente. Logo, o trabalho era imenso e as chances de erro enormes.

Assumindo que somos um navegador português que precisava calcular valores das coordenadas de suas cartas náuticas para prever rotas seguras para sua tripulação. Vamos ainda sem o auxílio da calculadora, resolver as operações apresentadas.

$$A) 3,12 \times 4,35$$

$$B) 3,124 \times 4,3256$$

$$C) 3,1249 \times 4,3568$$

A)	B)	C)
----	----	----

E então, como foi? Descreva seus sentimentos com relação às operações, suas soluções e resultados alcançados.

Fonte: Arquivo do autor

Ao destacar um contexto histórico, no qual os computadores e calculadoras não existiam, a ação proposta visava reproduzir de maneira simplificada um pouco das dificuldades de se executar operações com números “grandes” e “pequenos”, com as quais os homens se confrontaram frequentemente, na história da humanidade.

Os alunos foram expostos à necessidade do uso de conteúdos matemáticos básicos, desafiando-os a se reconectar com conteúdos há muito banais em suas práticas, incentivando-os a fazerem registros que poderiam ser apenas falados ou por escrito, respeitando o ritmo de cada um, na tentativa de provocar emoções positivas em relação à necessidade de encontrar caminhos menos trabalhosos para a realização de operações, envolvendo multiplicação, antes do advento da calculadora.

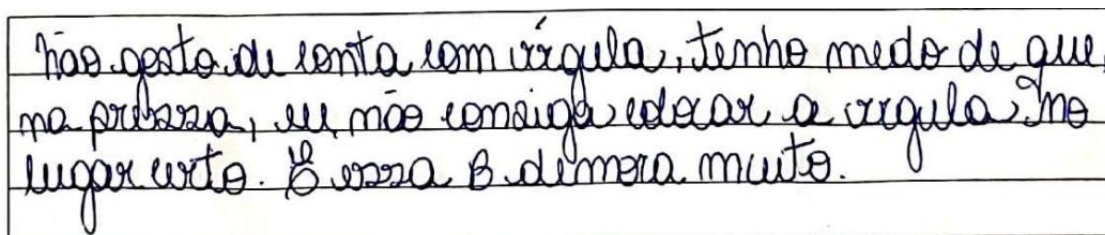
Nos 3 primeiros encontros, percebemos a dificuldade da participação dos alunos com intervenções orais. Eles ouviam atentamente as propostas e intervenções do professor, porém permaneciam prioritariamente calados, mesmo quando era solicitado que participassem. Nas raras ocasiões em que participavam, realizavam um pequeno encontro entre eles para discutir o assunto, depois um deles era eleito para falar em nome de todos. Tal comportamento prejudicou de certa forma a aplicação do experimento de maneira mais aproximada do proposto por L. V. Zankov (1984), quando destaca que só é possível alcançar bons resultados, com o desenvolvimento da fala dos alunos.

Acreditamos que parte desta inibição dos participantes se deu por três motivos em especial. O primeiro deles foi a dificuldade do professor em conduzir suas intervenções a

partir da apresentação de questões que guiassem os alunos e não com a exposição de respostas diretas para os problemas propostos. Tal fato foi sendo adequado pelo professor no decorrer dos encontros, até que, a partir do quinto encontro, ele já se encontrava ajustado a este modelo de condução. Outro motivo foi a presença do pesquisador na sala de aula, anotando todo o tempo e observando os alunos. Tal movimento gerou um possível constrangimento e timidez nos alunos, visto que o pesquisador havia sido um de seus professores de matemática na série anterior. O terceiro deles é a própria timidez dos alunos, provocada por um sentimento negativo de não poder errar, tratando o erro como um problema e não como um processo de apropriação do saber.

Apesar da dificuldade relatada, seguimos com as operações da Ação 3, que exigiam um pouco mais dos participantes, mais atenção, uso de recursos matemáticos um pouco mais detalhados, visto que foram propostos números muito maiores ou muito menores – números decimais, com a presença da vírgula, acarretando maior dificuldade na solução das mesmas.

Dentre as manifestações nesta ação, o **Aluno2** registra que:



Não gosto de conta com vírgula, tenho medo de que na prova, eu não consiga colocar a vírgula no lugar certo. Berra B demais muito.

Nas Ações 2 e 3 (o processo manual e a dificuldade), as respostas dos alunos demonstram modos de agir, inicialmente, despreocupados, passando pelo medo e a angústia de errar, da imperfeição e da auto cobrança. Porém, estas sensações não os afastaram do desejo de participar e de acertar, diante do desafio proposto. É a presença do emocional-cognitivo, que impulsiona ou impede de avançar, como considerado por L. V. Zankov.

Nas operações de multiplicação com números inteiros cada vez maiores, as dificuldades não foram muitas, apesar de reconhecerem que a atenção e o raciocínio foram acionados pela necessidade de operar uma quantidade grande de algarismos.

Em suas falas, os sujeitos reconheceram que, em um tempo, em que não havia instrumentos que facilitassem essas “contas”, elas certamente seriam um problema. Em sua fala, o **Aluno3** afirma que “- sem calculadora na antiguidade, com certeza os profissionais que faziam contas assim deviam cobrar bem caro”.

Já nas operações de multiplicação com números decimais, os alunos deixaram transparecer dificuldades e atitudes como o medo, a pressa, a falta de atenção, e dúvidas relacionadas à estrutura do algoritmo da multiplicação, registrando emoções negativas que certamente interferiram momentaneamente na motivação dos alunos, até que estas tenham de alguma forma se convertido em emoções positivas, que motivassem a continuidade de suas ações. Sensações associadas à cobrança que recebem constantemente em sua vida escolar em diversos momentos, promovem o medo de errar sobrepondo-se em muitas vezes a vontade de acertar.

É necessário que, no processo de ensino-aprendizagem, as emoções sejam analisadas como mais um elemento didático que compõe uma boa abordagem, pois segundo L. V. Zankov (1984, p.63): “As emoções têm uma força motivadora. Podem elevar ou reduzir a atividade vital.”

Nesse momento o **Aluno4** destaca que “apesar de saber a tabuada, sempre tenho a impressão de que vou me distrair e errar essas contas.” Este comentário foi importante para destacar o objetivo desta tarefa, que era justamente o de mostrar a necessidade que incentivou os homens na busca por ferramentas matemáticas que facilitassem estes e outros cálculos, dando mais segurança para os resultados obtidos.

4.3.3 Análise da Ação 4 da Tarefa 1 - Os números na atualidade

Ação 4 – Os números na atualidade

Vamos pensar! Onde nos dias atuais encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos? Registre no quadro a seguir onde acredita sejam utilizados.

...

Nos dias atuais, temos vivenciado o desenvolvimento das tecnologias digitais, cujo armazenamento de dados se dá utilizando uma unidade de medida da qual falamos muito, mas muitas vezes não temos ideia de sua real capacidade.

Vejamos, no mundo do armazenamento digital, a menor unidade de medida é o **bit**, que guarda um sinal que identifica “zero” ou “um”, pois toda comunicação é dada em código binário.

Um caractere é uma unidade de armazenagem, tal como uma letra, um espaço, um ponto de luz, etc. Este é formado por **8 bits**, passando a ser tratado como **1byte**.

Para ficar clara essa explicação, na palavra **ESCOLA** o espaço ocupado em sua armazenagem demanda o uso de **6 bytes**, ou **48 bits**.

As relações entre as unidades de medidas seguem da seguinte maneira:

1 bit – menor unidade de medida

8 bits – 1 **byte**

1024 bytes – 1 **kilobyte** – 2^{10} – Kb

1024 kilobytes – 1 **megabyte** – 2^{20} – Mb – 1.048.576 bytes

1024 megabytes – 1 **gigabyte** – 2^{30} – Gb – 1.073.741.824 bytes
 1024 gigabytes – 1 **terabyte** – 2^{40} – Tb – 1.099.511.627.776 bytes
 1024 terabytes – 1 **pentabyte** – 2^{50} – Pb – 1.125.899.906.842.624 bytes
 1024 pentabytes – 1 **hexabyte** – 2^{60} – Hb – 1.152.921.504.606.846.976 bytes
 1024 hexabytes – 1 **yotabyte** – 2^{80} – Yb – 1.208.925.819.614.630.000.000.000 bytes
 Imagine realizar operações com estes valores sem o auxílio da calculadora!
 Que trabalhão não é mesmo?

Fonte: Arquivo do autor

Percebemos que os elementos desta Ação 4, incentivaram os alunos a pensar na matemática da antiguidade e analisar sua aplicação nos dias atuais, observando como números muito grandes e/ou muito pequenos fazem parte e interferem em nossas vidas.

No desenvolvimento da Ação 4, obtivemos o seguinte registro do **Aluno6**:

química/

Números tão pequenos encontramos na biologia e na nanotecnologia, pois se trabalha com elementos extremamente pequenos, microscópicos. Já números grandes podemos achar em grandes construções, armazenamento, astronomia, já que se lida com grandes dimensões e distâncias.

Números tão pequenos encontramos na biologia e na nanotecnologia, pois se trabalha com elementos extremamente pequenos, microscópicos. Já números grandes podemos achar em grandes construções, armazenamento, astronomia, já que se lida com grandes dimensões e distâncias.

Em seu registro percebemos que as observações feitas estão relacionadas ao trabalho com elementos químicos, biológicos, construção civil e até na astronomia. O **Aluno2**, com muita propriedade, destaca em sua fala que o trabalho com a notação científica é uma das entidades matemáticas que deve ter sido criada para facilitar os cálculos nestas áreas. Há nos relatos e registros dos sujeitos, uma percepção da interferência da matemática nas mais diversas áreas e segmentos da vida humana.

4.3.4 Análise da Ação 5 da Tarefa 1 – A busca por uma solução

Ação 5 – A busca por uma solução

Em um tempo no qual não havia calculadoras, temos a seguinte pergunta: Como facilitar essas operações sem o uso de calculadora?

Arquimedes desenvolveu uma técnica para calcular multiplicações com estes números de maneira mais fácil, trocando produtos por somas.

Observe o quadro a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,031250	0,015625	0,0078125	0,00390625	...

Ao tomarmos a multiplicação de 4 e 8, basta observar os valores acima destes números no quadro e somá-los, fazendo $2+3=5$, agora, observando o valor abaixo do número 5 temos o resultado da multiplicação, que é 32.

Engenhoso não é?

Usando a tabela de Arquimedes, comece resolvendo as operações 16 vezes 32 e 16 vezes 64. Depois, divirta-se procurando outros resultados de operações disponibilizadas na tabela.

16	32	
16	64	
		...

Percebeu alguma semelhança ou características dentre os valores da tabela e os resultados? Quais? Quais os fundamentos matemáticos nos quais se baseou?

Fonte: Arquivo do autor

A partir do reconhecimento das dificuldades enfrentadas pela humanidade para atuar com a matemática numa época em que não havia calculadoras ou computadores, sugerimos o uso da Tabela de Arquimedes como uma possível solução para a efetivação de cálculos.

A Tabela de Arquimedes é uma organização numérica, que permite a partir da simples associação dos valores, em linhas e colunas, substituir grandes operações de multiplicação e divisão por somas e subtrações simples, trabalhando com potências e suas propriedades, em uma dada base.

Nosso intuito de estimular os sujeitos a perceberem as relações existentes em tal Tabela, sem que o professor explicasse detalhes da mesma, foi alcançado. Os participantes foram guiados prioritariamente pelas operações indicativas do material impresso e estimulados pelo professor a pensar. Sendo que neste processo, cada um, a seu tempo, alcançou o resultado esperado, que era de identificar as relações de potência e expoentes que existem na Tabela.

O **Aluno3**, em seu registro, apresenta:

A Tabela de Arquimedes foi criada com o intuito de facilitar cálculos, juntamente com uma maior rapidez, quando as operações são mais complexas, com números muito grandes ou pequenos. Mesmo sem uma calculadora, você consegue obter resultados certos, sem muito esforço.

Após utilizarmos a Tabela, concluímos que, tal mecanismo facilitou a nossa vida e nos traz uma grande probabilidade de acerto, sem muito desperdício, como foi sem a Tabela.

Já o **Aluno4**, afirma que:

O uso da Tabela de Arquimedes facilita muito quando não se tem uma calculadora. Baseando-se em sua forma de utilização e em seus princípios, fica fácil, rápido, prático e até mesmo mais divertido de se fazer uma operação que possua números muito grandes ou muito pequenos.

Os resultados obtidos foram facilmente identificados e encontrados na Tabela. Com certeza, é uma experiência muito mais legal de se resolver os cálculos, os quais geralmente perdemos muito tempo resolvendo e ainda temos a probabilidade de errar, diferentemente do uso da Tabela.

O uso da tabela de Arquimedes facilita muito quando não se tem uma calculadora. Baseando-se em sua forma de utilização e em seus princípios, fica fácil, rápido, prático e até mesmo mais divertido de se fazer uma operação que possua números muito grandes ou muito pequenos.

Os resultados obtidos foram facilmente identificados e encontrados na tabela. Com certeza, é uma experiência muito mais legal de se resolver os cálculos, os quais geralmente perdemos muito tempo resolvendo e ainda temos a probabilidade de errar, diferentemente do uso da tabela.

Em suas respostas, os alunos demonstram ter reconhecido a presença da operação de potenciação, bem como as relações existentes entre linhas e colunas para solucioná-las, sem ainda demonstrar maior profundidade em suas análises, além de não apresentarem descrições que indiquem estar conscientes do princípio operatório que as definem, muito menos de seus limites, por exemplo, calcular um produto cujos fatores não se expressam em potências da base usada.

Em sua fala, o **Aluno1** destaca, “- isso parece mágica!”. Tal expressão, demonstra o poder das emoções positivas frente às ações, bem como a produção da necessidade e da satisfação em participarem, aproximando aluno, conteúdo e professor. O **Aluno4** chega a falar em “ficar mais divertido” e “Com certeza, é uma experiência muito mais legal de se resolver os cálculos”.

Com o conjunto de ações propostas, foi possível apresentar aos participantes, através de um formato diferente do convencional, trazido pelos materiais didáticos e professores, a introdução do conteúdo matemático dos logaritmos, utilizando estímulos históricos, técnicos e emoções positivas.

As ações propostas desafiaram os participantes a recordarem conteúdos matemáticos elementares, incentivou-os a fazerem observações verbais e registros escritos, dentro de seu ritmo, provocando sentimentos de auto responsabilidade para com seu aprendizado.

A necessidade de intervenção do professor foi mínima nestas ações, apenas ocorrendo onde se fez necessário o incentivo e a discussão coletiva. A escolha do trabalho com a Tabela de Potências de Arquimedes decorreu da intenção de introduzir e acompanhar a apreensão do conceito de “base” de potências, permitindo-nos observar logo nos primeiros encontros, como se dá o processo de tomada de consciência dos participantes, o que nos trouxe indícios da assertividade do uso deste conceito para as ações especificadas.

Os dados apresentados com base nos registros escritos dos alunos e em seus discursos durante o processo permitiram identificar vestígios de capacidades já adquiridas no processo de reconhecimento dos conteúdos mobilizados para a compreensão do processo de internalização das ações.

Percebemos que, na busca pelos resultados das ações, os alunos usam o processo da soma da posição dos valores, que é um algoritmo de identificação do resultado pela

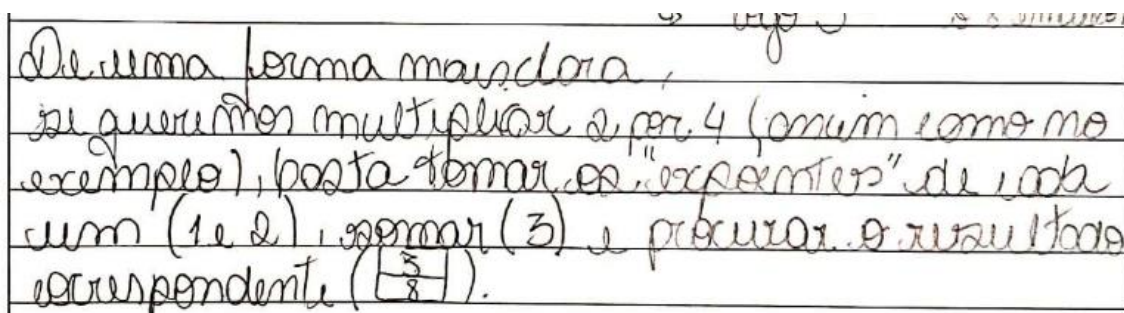
posição, indicado na própria explicação da ação. O professor interfere no processo com perguntas do tipo:

- A soma dos valores das posições indicam o resultado da operação proposta. Como podemos associar esta soma ao resultado encontrado?

- O resultado poderia ser encontrado de outra maneira?

Os alunos percebem e concluem a ação, destacando a rapidez e a facilidade de operar com a Tabela de Arquimedes, mediante a associação de somas, para alcançar o resultado de um produto ou de uma potência.

Aluno2



De uma forma mais clara, se quisermos multiplicar 2 por 4 (ou um como no exemplo), basta tomar os "expoentes" de cada um (1 e 2), somar (3) e procurar o resultado correspondente ($\frac{3}{8}$).

Percebemos no registro realizado pelo **Aluno2**, sua percepção do processo operatório para encontrar os resultados na Tabela de Arquimedes, na qual a partir da soma de dois número da mesma linha (por exemplo 1 e 2), é possível identificar o resultado do produto dos números correspondentes a eles (2 e 4), fazendo a soma ($1 + 2 = 3$) e buscando o correspondente à soma (3) na linha de baixo, promovendo a interpretação informal de uma das propriedades operatórias dos logaritmos.

Para sintetizar as considerações a respeito da Tarefa 1, após analisar as ações nela contidas, que visavam explorar o histórico do conceito dos logaritmos, vamos considerar ao três eixos, já apresentados quando nos referimos à análise dos dados no capítulo 4: a) apreensão de relações essenciais do conceito; b) a aplicação dinâmica dos princípios didáticos; c) a unidade do afetivo-cognitivo.

De modo geral, podemos afirmar que o caminho percorrido pelas ações foi positivo frente aos objetivos propostos, pois nos permitiu encontrar os vestígios de apropriação do uso da Tabela de Arquimedes, bem como perceber suas emoções e suas impressões sobre a didática utilizada. Destacamos também a importância dada pelos participantes ao desenvolvimento da tabela como um elemento importante para o ser humano e os motivos que os levaram a esta conclusão.

A) apreensão de relações essenciais do conceito

Na busca pela apreensão das relações essenciais dos conceitos que envolvem os logaritmos, começamos com o despertar daquilo que, historicamente, motiva o homem em sua evolução e o faz entrar em atividade, a necessidade. Com o objetivo de executar operações de multiplicação com números cada vez maiores, promovemos o desenvolvimento de estratégias para que elas fossem realizadas rapidamente e com assertividade, usando a Tabela de Arquimedes. Nas ações referentes à necessidade de criação do objeto matemático – logaritmo, percebemos que os alunos conseguiram atribuir sentido para os elementos históricos que motivaram o homem no desenvolvimento da matemática, despertando também satisfação pela manipulação da Tabela como ferramenta de facilitação dos cálculos, cuja base são as propriedades das potências, que estão na essência do conceito dos logaritmos.

B) a aplicação dinâmica dos princípios didáticos do sistema zankoviano.

Nesta tarefa, os princípios zankovianos se apresentam de maneira dinâmica e inter-relacionados. Inicialmente, destacamos a preocupação com o papel diretor do conhecimento científico, na Tarefa 1, especificamente explorando as propriedades das potências. Nas ações que intitulamos o “processo manual” e a “dificuldade” da realização das operações com números grandes e pequenos, procedimentos como os das quatro operações são exigidos com um “alto grau de dificuldade”, visto que não é comum para os alunos operar manualmente com estes números. Também registramos a preocupação com o “avanço em grande ritmo”, pois não há a necessidade de repetições de uma mesma operação já efetuada, com a variedade de casos que procuraram promover a aprendizagem de cada aluno em particular, reconhecendo em si mesmo as facilidades e as dificuldades que são históricas para o homem, e não um produto exclusivo do aluno.

C) a unidade do afetivo-cognitivo

Nas ações referentes à “compreensão dos números na atualidade” e a “busca por uma solução”, verificamos que o engajamento dos alunos, produziu um dos principais objetivos definidos pelo sistema zankoviano, o despertar do pensamento independente e inquieto que, associado às emoções vivas e positivas, pode encaminhar os alunos a uma postura de alegria frente ao processo de trabalho gerado pelas ações escolares. Relacionado a isto, temos o assombro ou encanto despertado pelo descobrimento e

apropriação das estruturas necessárias não apenas para utilizar a Tabela de Arquimedes, mas para gerar a sua própria, incluindo o aluno como protagonista de seu aprendizado levando-o ao desenvolvimento não apenas de suas funções psíquicas superiores, como também a um “desenvolvimento ótimo” referente aos objetivos desta tarefa.

A exploração do histórico do conceito permitiu seguirmos por um caminho, no qual o desenvolvimento da necessidade ajudou a evidenciar aspectos essenciais do conceito dos logaritmos, ainda sem falar nele próprio, em um processo indutivo de ensino-aprendizagem.

Por fim, analisando as manifestações dos participantes, encontramos pistas de que o conhecimento intencionalmente organizado alcançou os alunos, justificando as bases teóricas que nos trouxeram até aqui.

4.4 Análise da Tarefa 2: o lógico

Na Tarefa 2, que inclui as Ações 6 e 7, propusemos elementos que oferecessem aos participantes a oportunidade de alcançar por si mesmos a rede conceitual necessária à compreensão das relações essenciais do conceito dos logaritmos, envolvendo a base, a potência e o expoente.

As ações procuraram atender à recomendação zankoviana, de que a repetição não é garantia de resultado, priorizando assim a variedade de propostas que se entrelaçassem e se completassem, fazendo com que o aluno percorresse um caminho de descobertas a cada resolução, associada à resolução anterior, de modo que cada passo neste percurso oferecesse um nível mais elevado e mais desafiador.

4.4.1 Análise da Ação 6 da Tarefa 2 – Explorando os expoentes

Ação 6 - Explorando os expoentes

Voltamos a apresentar a tabela vista na Ação 5, vamos analisá-la de outra maneira. Perceba que a primeira linha representa o expoente da potência, enquanto a segunda linha representa o resultado da potência.

Quadro1

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$2^{(expoente)}$	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

Baseado na explicação anterior e usando sua calculadora, preencha os quadros a seguir adequadamente.

Quadro2

Expoente	2							...
Potência	9	27	729	19683	59049	1594323	14348907	...

Quadro3

Expoente	3		9					...
Potência	27	243	19683	531441	15946323	43046721	129140163	...

Apresente a seguir como foi seu processo para encontrar os valores que faltavam acima.

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Expoente								...
Potência								...

Quadro 5

Expoente								...
Potência								...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

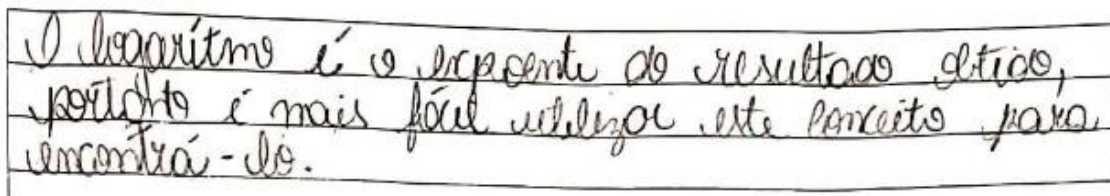
Fonte: Arquivo do autor

Carregada de significados, a Ação 6 promoveu a aproximação do principal conceito presente na rede conceitual dos logaritmos, o de expoente, em sua estreita e essencial relação com o de base e de potência. O uso da calculadora direciona a solução dos problemas na ação, sendo utilizada como elemento de consolidação e conferência, além de elemento de tomada de decisão. Em seus registros, os participantes descreverem suas considerações e convicções apresentadas a seguir.

Os alunos não tiveram dificuldades no preenchimento dos quadros 2 e 3. Entretanto, ao preencherem os quadros 4 e 5, não atentaram ao comando da questão ou

não a compreenderam, pois nenhum deles apresentou uma tabela em que a base fosse menor do que um inteiro.

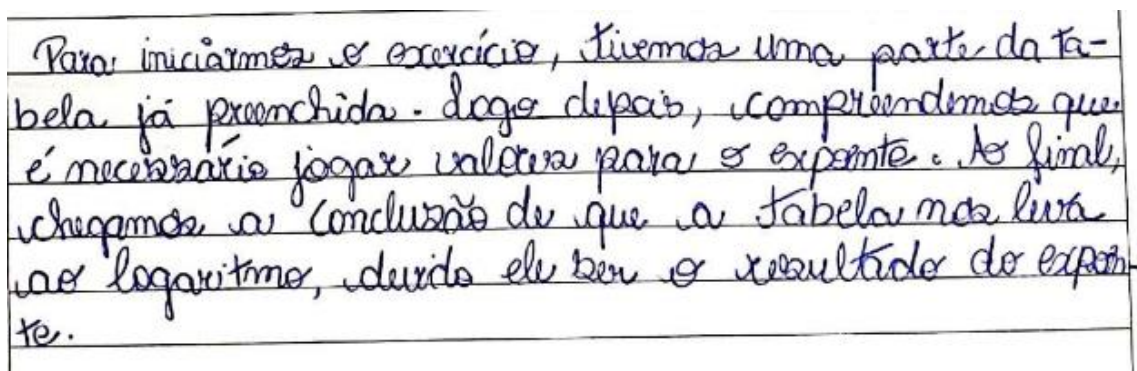
Percebemos a aproximação do conceito dos logaritmos na fala do **Aluno1** que registra:



O logaritmo é o expoente do resultado obtido, portanto é mais fácil utilizar este conceito para encontrá-lo.

Em seu registro, o aluno apresenta o conceito de expoente como elemento abstrato, a partir de sua materialização algébrica, porém não se trata do conceito dos logaritmos em sua essência, apenas a observação de sua existência relacionada ao contexto que promoveu seu significado.

O **Aluno3**, em uma aproximação mais assertiva, registra sua dedução a partir das ações experimentadas com a tabela.



Para iniciarmos o exercício, tivemos uma parte da tabela já preenchida. Logo depois, compreendemos que é necessário jogar valores para o expoente. Ao final, chegamos à conclusão de que a tabela nos leva ao logaritmo, devido ele ser o resultado do expoente.

Ao afirmar que a tabela “leva” ao logaritmo, pelo fato de encontrarmos um resultado que representa o valor do expoente que era desconhecido, o aluno demonstra indícios de que os princípios zankovianos, que orientaram a ação, possibilitaram a associação e a inter-relação dos conhecimentos adquiridos anteriormente, colocando o aluno na zona de desenvolvimento próximo, capacitando-o a alcançar o próximo estágio de aprendizado.

Já, o **Aluno4** usa do processo de estimativa e uso da calculadora para encontrar valores que completem a tabela.

A tabela é apresentada de uma maneira fácil e, com a utilização da calculadora fica mais prático e fácil. A única exigência é a estimativa para encontrar os valores a serem preenchidos, mas é um processo rápido também.

Apesar de a organização do processo de ensino ter sido a mesma, a lógica aplicada pelo aluno não permite que ele alcance, neste momento, as relações essenciais que poderiam levá-lo ao conceito dos logaritmos. Ele ficou nos procedimentos de preenchimento das tabelas. Destacamos que este foi o único aluno que não alcançou por si mesmo a ideia proposta na ação.

Na socialização das respostas, o **Aluno4** percebe, antes de sua vez de falar, as relações que deixou de lado e se manifesta com a seguinte fala: “- Ah! Então, quando procuro o valor do expoente que eu ainda não conheço, na verdade estou procurando o logaritmo. O logaritmo é o expoente?”

Neste momento os colegas se juntam para parabenizar e confirmar o quão correto está sua afirmação, enquanto o professor apenas observa.

4.4.2 Análise da Ação 7 da Tarefa 2 – Explorando o logaritmo

Ação 7 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas ações anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Assim, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos calculando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmação é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmação, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente.

Logo, podemos escrever $9 = 3^2$, pois $3^2 = 9$

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1					...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Esses expoentes existem? Como determiná-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

Expoente	1					...
Potência		2	3	4,5	10	...

Fonte: Arquivo do autor

Aluno2

Muito bom trabalho em encontrar o expoente, apresenta-se de uma maneira muito plausível a definição: de forma com que encontramos o expoente, é o logaritmo de encontrar o log. (ele é o expoente - a^x = variável)

O **Aluno2** apresenta uma definição algebrizada de sua compreensão, indicando que existe um x a ser encontrado, e este é expoente da base a . Com sua atitude, demonstra como superou suas dificuldades, mostrando-se à vontade para utilizar a linguagem matemática em seu registro, porém, ainda é incompleta a sua generalização, pois não inclui a potência, ou seja, o número do qual se quer o logaritmo.

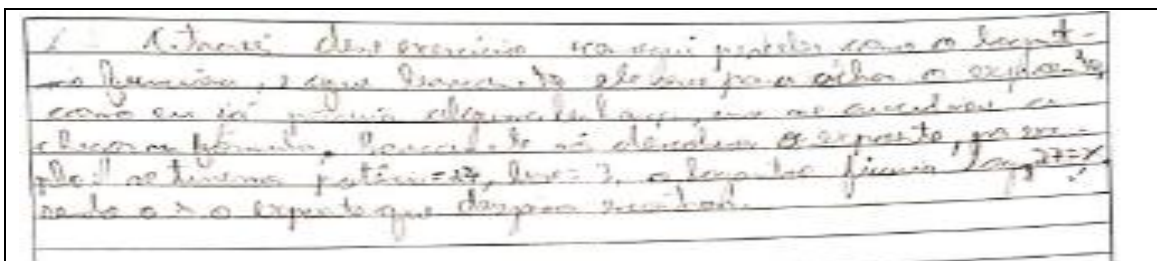
Aluno4

O processo que usei para encontrar o expoente também foi por estimativa, mas agora com números decimais, o que dificultou um pouco mais, porque não foi possível encontrar o expoente exato. Além disso, foi evidenciado que o logaritmo é o expoente de uma potência. Então, pode concluir que:

$$\log_{10} 10 = 1, \text{ pois } 10^1 = 10.$$

O **Aluno4**, agora consciente do papel do expoente para os logaritmos, representa com um caso particular suas descobertas, conseguiu abstrair dos dados observados o que é o logaritmo, mas não chegou a um nível de generalização que fosse traduzida por uma linguagem específica da álgebra. Apesar de permanecer investindo na estimativa para encontrar os resultados, dá indícios de apropriação de relações essenciais do conceito dos logaritmos. Em sua fala, o aluno mostra que a ação proposta criou uma dificuldade, um desafio que impulsionou o aluno a buscar a solução e se aproximar do conceito dos logaritmos.

Aluno5



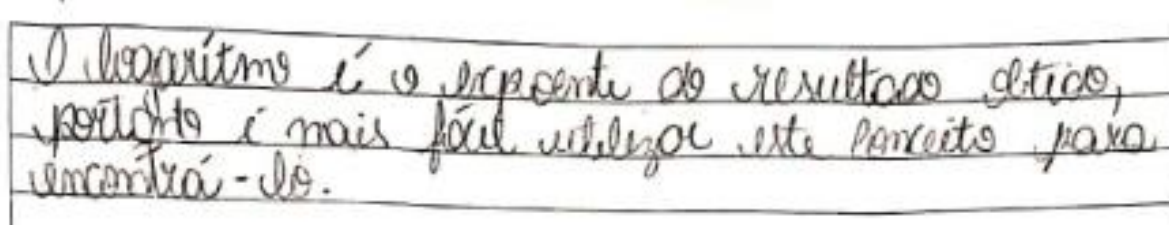
Através desse exercício consegui perceber como o logaritmo funciona, e que basicamente ele serve para achar o expoente, como eu já possuía alguma lembrança, isso me auxiliou a chegar na fórmula. Basicamente nós descobrimos o expoente. Por exemplo, se tivermos potência = 27, base = 3, o logaritmo ficaria $27 = x$, sendo x o expoente que desejamos encontrar.

O **Aluno5** conseguiu chegar a uma abstração, mas, como o **Aluno4**, não alcançou uma generalização, traduzida na linguagem algébrica, pois a sua escrita é a de um caso particular – $\log_3 27 = x$.

Isso mostra o nível atual desse aluno, que nesse momento, precisou da mediação do professor para atingir um nível potencial em que estivesse presente a generalização e a escrita na linguagem algébrica.

Os **Alunos1, 3 e 6** apresentaram em seus registros a confirmação de que nossos objetivos com esta tarefa podem ter sido alcançados. Encontramos neles bons indícios de apropriação das relações essenciais referentes ao conceito dos logaritmos, quando o aluno afirma que o logaritmo é o expoente. Apesar da demonstração da compreensão apresentaram dificuldade com a generalização do conhecimento e seu registro em linguagem algébrica. Mesmo incentivado por questionamentos do professor, tal como “- Se o expoente é o logaritmo, como podemos representá-lo através da escrita matemática?”, ou “Como poderíamos apresentar esse expoente de outra maneira?”, os alunos, ainda demonstrando resistência com as participações, não registraram, nem se manifestaram.

Aluno1



Aluno3

Depois da realização de todos os exercícios, consegui relacionar a tabela com logaritmos, devido ele ser o resultado da própria exponência, usando na tabela.

Aluno6

A conclusão é que logaritmo é encontrar o expoente de uma base e é o inverso da potenciação. Realizá-lo não é tão difícil e aparenta ser muito utilizado em diversos locais.

A conclusão é que logaritmo é encontrar o expoente de uma base e é o inverso da potenciação. Realizando não é tão difícil e aparenta ser muito utilizado em diversos locais.

Retomaremos, a seguir os eixos estabelecidos anteriormente, para chegar à síntese dos resultados apresentados pelos alunos na Tarefa 2, a partir das abstrações dos dados empíricos.

A) apreensão de relações essenciais do conceito

As Ações 6 e 7, constituintes da Tarefa 2, tinham como objetivo explorar o lógico, a partir do histórico, isto é, a matematização da tabela de Arquimedes e a criação de tabelas em outras bases, explorando os conceitos pertencentes à rede conceitual dos logaritmos. Os registros dos alunos confirmam que, ao final dos encontros, em que foram propostas, houve a aproximação dos participantes de relações essenciais do conceito dos logaritmos, induzidos pela sequência proposta na tarefa. Pode-se afirmar que a partir da observação do que foi apresentado, das tabelas dadas, o aluno abstraiu de forma substancial que o logaritmo é um expoente, que está vinculado a uma base e a uma potência. Porém, não podemos afirmar que chegaram a uma generalização substantiva do conceito, pois essa, segundo Resende (2019, p. 314), “revela a essência dos objetos ou fenômenos, a condição necessária, que se expressa numa lei.” Ela resulta de um movimento de um concreto real a um concreto pensado, por um processo de ascensão do abstrato ao concreto. Os participantes não atingiram esse nível, não sendo capazes, inclusive, de traduzir na linguagem algébrica o que haviam assimilado.

Cada um superou à sua maneira os desafios encontrados para construir novas tabelas e, sobretudo, para descobrir expoentes, que não eram inteiros, pois foram dados números que não eram potências inteiras de 10. Alguns o fizeram por estimativa, outros através da observação de padrões, outros preferiram utilizar o recurso da calculadora, porém, em todos os casos, percebemos evidências de emoções positivas, como sorrisos, falas positivas e exclamações de satisfação, que estimulavam uns aos outros, fazendo com que não desistissem e mantivessem o interesse necessário para seguir nos encontros.

Explorar os expoentes e os logaritmos proporcionou aos alunos a possibilidade de apresentar suas assimilações, seja verbalmente ou através do registro escrito, como ações volitivas que trazem à tona a consciência do conceito estudado, ainda que num estágio sujeito a novas apropriações.

B) a aplicação dinâmica dos princípios didáticos

Quanto à dinâmica dos princípios didáticos de L. V. Zankov, fica evidente a importância do papel dos conhecimentos teóricos que atribuem valor e sentido à rede conceitual que está associada ao conhecimento científico. Com a valorização desses conhecimentos, os alunos superaram as dificuldades apresentadas com maior autonomia, mantendo um grande ritmo de trabalho, estimulados pela satisfação de aprender.

As ações e as operações necessárias à sua realização foram propostas a um nível de dificuldade que estimulou os alunos a avançarem, embora a mediação do professor fosse necessária, pois não atingiram sozinhos tudo o que lhes foi solicitado, de modo especial, a generalização substancial, que promoveu um salto no desenvolvimento psíquico dos alunos rumo a um “desenvolvimento ótimo” de suas potencialidades.

Resumindo, a rede conceitual inserida nas ações propostas, referenciam a orientação das produções que podem gerar sentido e significado para os alunos, mediante a condução do professor, o registro verbal ou escrito e das emoções positivas que produzem a satisfação.

C) a unidade do afetivo-cognitivo

As manifestações de satisfação e alegria expressas pelos alunos no decorrer da realização do proposto e principalmente no momento de suas descobertas nos permitiram perceber o quanto o desenvolvimento cognitivo está atrelado ao afetivo.

Na próxima tarefa, trataremos da expansão do conceito dos logaritmos com a sua representação gráfica e uso da tecnologia digital.

4.5 Análise Tarefa 3: o conceito

De posse de algumas sínteses a respeito do conceito dos logaritmos, os alunos foram estimulados a seguir adiante com a leitura e interpretação da Tábua dos Logaritmos, instrumento que foi muito utilizado quando a calculadora não existia.

Entendemos que o conceito é, na verdade, um conjunto das relações, representações, aplicações, dentre outras possibilidades associadas, estendemos que o conceito dos logaritmos inclui a determinação de seu valor, que, antes do advento das máquinas de calcular, contou com a Tábua dos Logaritmos.

Apresentaremos a seguir os resultados obtidos nesta ação.

4.5.1 Análise da Ação 8 da Tarefa 3 – O logaritmo

Ação 8 – O Logaritmo

Monte um quadro com a base 10, usando outros expoentes, observando as potências dadas. Use a calculadora.

QUADRO 1

Expoente	1					
Potência		2	3	4,5	10	

Agora responda:

- 1) O expoente (o logaritmo) pode ser um número real qualquer?
- 2) O expoente (o logaritmo) pode ser um número negativo?
- 3) O número do qual vamos buscar o logaritmo (a potência) numa dada base pode ser um número real qualquer?
- 4) A base pode ser um número negativo?

Imagine um tempo que não havia calculadoras, ou não era fácil encontrar uma, para utilizar. Como encontrar de maneira rápida e confiável os resultados dos logaritmos?

Napier, escocês, no século XVII revelou sua invenção dos logaritmos.

Ele fez isso usando como base um número irracional que hoje é conhecido como número neperiano, identificado pela letra **e**.

Existem fenômenos cuja evolução e desenvolvimento dependem do estado em que se encontram. Por exemplo, o crescimento populacional, dinheiro investido. Temos vários fenômenos naturais que também seguem esta relação, nestes casos se utiliza a base **e**=2,718... Napier criou, a partir dessa base, a tabela com milhares de resultados com logaritmos naturais, facilitando a vida de quem precisava fazer muitas contas.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

Vejam como, com base na tabela de Napier, uma tabela na base 10 que nos auxiliará a compreender o que vem a ser, dois componentes importantes dos logaritmos, *característica e mantissa*.

Para encontrar o log de 127 na base 10 (127), vamos até a linha 12 e coluna 7, o que corresponde ao modo de buscar o número 127. No encontro delas, encontramos a parte decimal do logaritmo, chamada de mantissa. Assim, para o 127, obtemos a parte decimal como 0,1038.

$$\text{Mantissa} = 0,1038$$

Para obtermos a parte inteira, procedemos do seguinte modo:

$127\{10^2 = 100 \ 10^3 = 1000$ Podemos afirmar que 2 é o logaritmo de 100 e 3 é o logaritmo de 1000, na base 10.

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx....$. Esse número inteiro 2, é a característica. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é **2,1038**.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a _____, pois na parte inteira este número possui ____ algarismos.

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? _____

Monte um quadro com a base 10, usando

Tábua de Logaritmos Decimais

Esta tabela possui uma precisão de seis casas decimais.

Nos casos em que a sétima casa decimal é igual ou superior a 5, a mantissa foi arredondada somando-se 1 ao sexto algarismo.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426

...

2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo, usando a tábua e conferindo, depois, na calculadora:

- a) $\log 54$
- b) $\log 540$
- c) $\log 540000$
- d) 5,4
- e) 0,54

Fonte: Arquivo do autor

Nesta etapa dos encontros, o professor já habituado à proposta de mediação de acordo com o sistema zankoviano, exerce um diálogo com os alunos, cujo resultado foi mais importante para nossa análise do que os registros escritos. Mesmo que os alunos ainda demonstrassem em algum nível um certo desconforto em participar, o diálogo foi se tornando o principal mediador da ação de dedução do conceito proposto.

Não foi possível identificar na transcrição do áudio qual aluno é o responsável pela fala, devido ao fato de as respostas eram sempre coletivas ou em meio a várias reações barulhentas na sala de aula. Por isso, as respostas dos alunos serão identificadas apenas por **Alunos**.

Professor: - O resultado da potência é 2, qual será o expoente de base 10?

Os alunos permaneceram em silêncio.

Professor: - Qual número será expoente de 10 para que o resultado seja 2?

Alunos: - Se 10 elevado a 1 é igual a 10, para alcançar 2 no resultado o expoente terá de ser menor que 1.

Os alunos testaram na calculadora de várias maneiras diferentes para tentar encontrar o número.

Alunos: - Ah! Então o expoente pode ser inclusive um número negativo!

Alunos: - Já a base não pode ser negativa!

Professor: - Se eu pensar no 10 e quiser encontrar um expoente que o faça ser igual a 100, eu posso?

Os alunos permaneceram em silêncio.

Professor: - Mas, se eu quiser o logaritmo de 0,1? Vou ter que elevar a -1.

Alunos: - Mas se eu quiser o logaritmo de -10 , vou ter limitações, porque não tem como eu usar um expoente que faça o número ficar negativo. Ah, nem zero.

Alunos: - Pois não tem como eu elevar um número a outro que o faça se anular ou ficar menor que zero.

Alunos: - O log não pode ser negativo ou zero.

Alunos: - Se a base for negativa, seja qual for o número do expoente, ficará cada vez mais negativo.

Professor: - Que número eu vou elevar o 10 para obter o resultado de 127 ? Vai ser um número maior que 2 e menor que 3 .

Professor: - Observando a tabela de logaritmo, descobrimos a parte decimal, que é a mantissa.

Professor: - A potência de no número inteiro mais próximo, que é a característica.

Alunos: - Uau! Dá pra calcular sem calculadora!

Alunos: - Então para conseguir um expoente para a base 10 que me dê como resultado 2 , vou usar $0,0018$? $0,0016$?

Professor: - Procurando o 2 na vertical, quem está na frente do 2 ?

Alunos: - 2 , 20 , 200 , 2000 , 20000 a parte decimal é a mesma. Ou seja, a mantissa. Já a característica será diferente.

Alunos: - Então 2 na base 10 , a característica será, entre 10 elevado a zero e 10 elevado a 1 , ou seja, entre 0 e 1 .

Professor: - Na frente do 2 temos 3010 .

Professor: - Qual o expoente para o resultado da potência ser 3 ?

Alunos: - $0,4733$

Alunos: - Mas e o $4,5$?

Professor: - A parte decimal do log de $4,5$. Vamos procurar na tabela.

Alunos: - Ah! Os valores entre 4 e 5 . Então é $0,6538$.

Alunos: - Que legal!

Alunos: - Então, para 10 , o expoente é 1 , ou seja, o logaritmo é 1 !

Alunos: - Professor, vai ser o mesmo resultado para 20 , 200 , 2000 ?

Professor: - A parte decimal é a mesma? Qual o logaritmo de 2 na base 10 ?

Alunos: - $0,3010$

Professor: - Qual o logaritmo de 20 na base 10 ?

Alunos: - $1,3010$

Professor: - E se eu pedir o logaritmo de 200?

Alunos: - 2,3010

Alunos: - Ah, entendi. Porque o 200 está entre 10 elevado ao quadrado e 10 elevado à terceira.

Professor: - Isso!!!

Professor: - E para 0,2?

Alunos: - A parte decimal é a mesma.

Alunos: - 0,2 vai ter a mesma mantissa, 3010. A parte decimal é a mesma.

Alunos: - A característica que precisamos encontrar agora.

Alunos: - O 2 está entre o 10 elevado a zero e o 10 elevado a um, então é 0, alguma coisa.

Alunos: - É 0,3010.

Professor: - O 0,2 está entre quais potências de 10?

Os alunos permaneceram em silêncio.

Professor: - Não tem como, porque 10 elevado a zero é 1. E não pode negativo.

Alunos: - O expoente não pode ser negativo não?

Professor: - Vocês me digam.

Alunos: - O resultado que não pode! Ah!

Professor: - Se for -1 o expoente?

Alunos: - Ah! 10 elevado a -1 e 10 elevado a 0.

Alunos: - Entre 0,1 e 1.

Alunos: - O expoente estará entre -1 e 0.

Alunos: - A mantissa é o 3010.

Professor: - Se a potência está entre 0 e 1, você não pegou o 0?

Professor: - Se a potência está entre 1 e 2, você não pegou o 1?

Professor: - Se a potência está entre 2 e 3, você não pegou o 2?

Professor: - Se a potência está entre -1 e 0, você vai pegar?

Professor: - A característica será?

Alunos: - menos 1!

Alunos: - menos 1 mais a parte decimal.

Alunos: - menos 1 + 0,3010, subtrai, vai ficar igual -0690.

Alunos: - Legal! O resultado do logaritmo pode dar negativo.

Professor: - Como podemos explicar isso com relação à tabela?

Alunos: - Na tabela só tem valores positivos, porque ela representa só a parte decimal. Aí você tem que fazer a conta da parte decimal com a característica. Aí essa conta pode dar positivo ou negativo, depende da característica.

Professor: - Você viu que do 0,2 a característica deu -1? Se eu pegar do 0,02? A característica vai dar?

Alunos: - menos 2.

Professor: - E se eu pegar 0,002?

Alunos: - A característica vai dar -3. E vai ser assim por diante.

Professor: - Dá pra gente criar um padrão, pois da mesma forma, simetricamente, para 20 da 1, pra 200 dá 2, pra 2000, dá 3!

Alunos: - Muito legal!

Alunos: - Tem a ver com o número de algarismos do número também? Pega o número de algarismos que tem o número e tira 1?

Professor: - No caso das vírgulas, conta os zeros.

Alunos: - Procurando o expoente na tabela, estou procurando o logaritmo.

Alunos: - Que trabalhão fazer isso com um número irracional. A base e .

Alunos: - Que bom que pensaram na base 10!

Alunos: - Não precisamos carregar a tábua por causa da calculadora e do computador.

O diálogo apresentado justifica a importância da palavra, da representação verbal no processo didático zankoviano, dada a mediação correta do professor, conduzindo o diálogo com questões que levem os alunos à reflexão, não apresentando respostas prontas. O papel singular dos conhecimentos teóricos também é explicitado no diálogo, sendo associado à Zona de Desenvolvimento Próximo, onde perceptivelmente se encontravam os alunos, fato que os permitiu avançar em grande ritmo e alto grau de dificuldade na essência do conteúdo.

Pelo diálogo, os alunos foram buscando generalizações, a partir da abstração já realizada – o logaritmo é o expoente que se deve atribuir a um número (base), para se obter o número dado. Também vão surgindo discussões sobre a existência do logaritmo, e os valores que ele pode assumir, assim como para os elementos que o constituem. Nem sempre as conjecturas são verdadeiras, como, quando afirmam “O log não pode ser negativo ou zero” ou “Se a base for negativa, seja qual for o número do expoente, ficará cada vez mais negativo”. Porém, pela mediação docente, vão estabelecendo condições

gerais importantes para a apropriação do conhecimento teórico e refutando o que não é verdadeiro.

Seguimos, para a representação do conceito dos logaritmos em sua representação através da função e seu gráfico com a Ação 9, utilizando para tal o auxílio de software *Winplot*, que é específico para o estudo das funções e o comportamento de seus gráficos.

4.5.2 Análise da Ação 9 da Tarefa 3 – A função logarítmica

Ação 9 - A função logarítmica

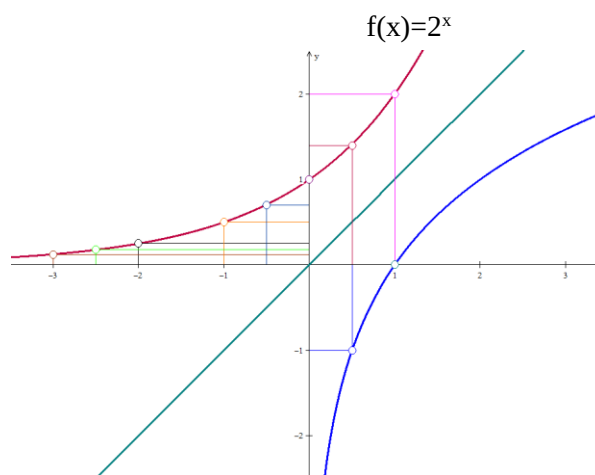
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função é o conjunto dos valores de x no qual a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmando (o número do qual se obtém o logaritmo numa dada base) deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática. Com ela, podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde $(a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ e } a \neq 1)$.

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$ $= 0,125$
-2,5	
-2	
-0,5	
-1	$y = 2^{-2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
0	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
0,5	
1	$y = 2^1 = 2$



2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$

Se a é um número positivo, diferente de 1, então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente, permanece crescente no domínio, se não, permanece decrescente) $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$ para quaisquer $x, y \in R$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

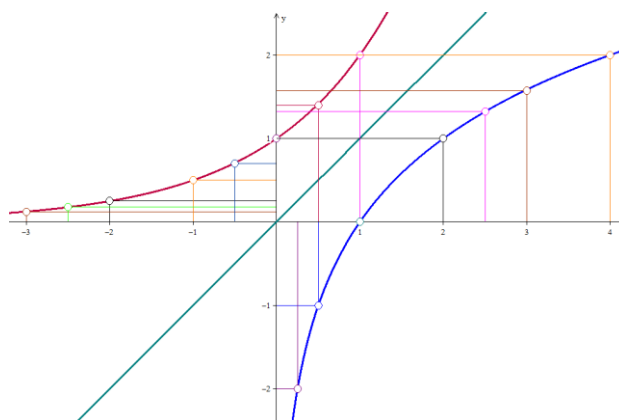
Registre seu entendimento a respeito da definição apresentada anteriormente.

A função logarítmica de base a é definida como x , com a real, positivo e $a \neq 1$. A função inversa da função logarítmica, como acabamos de ver, é a função exponencial.

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = x$

x	$y = x$
-1	
0	
1/4	
1/2	$y = \frac{1}{2} = -0,301$
1	
2	
2,5	
3	
4	



A partir das orientações dadas pelo professor, e, usando o software *Winplot*, construa e analise os gráficos das funções dadas:

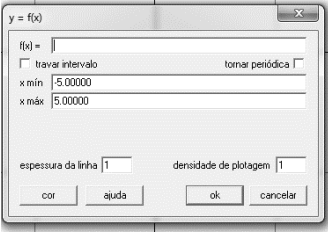
x	$y=10^x$

x	$y = x$

Para digitar uma função no *Winplot*, seguiremos os seguintes passos:

EQUAÇÕES/EXPLÍCITAS

Preencher a caixa **f(x)** com o comando referente a função desejada, depois clicar em **OK**.



Para função logarítmica, digite **log(x)**, se a base for 10 ou **log(x5)** se a base for 5, por exemplo.

Para a função exponencial, digite **b^x**, onde **b** é o valor da base. **10^x** para a base igual a 6.

Para sinalizar um ponto no gráfico é preciso ir em **EQUAÇÃO/PONTO/(XY)...** e na caixa de preenchimento digitar os valores das coordenadas do ponto, depois **OK**.



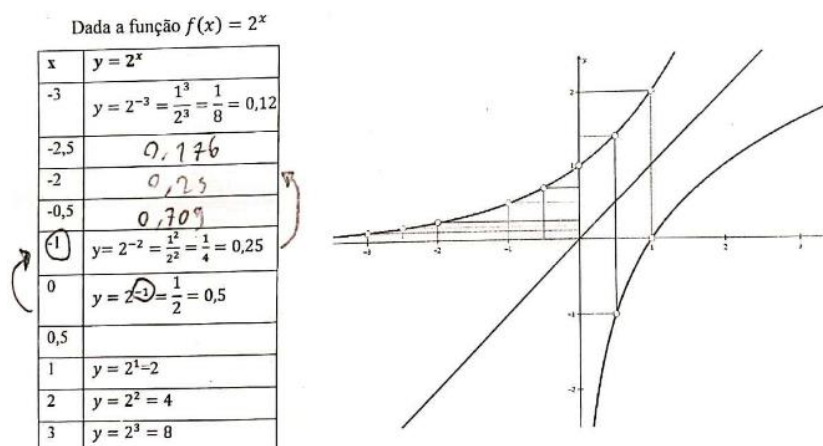
Para números decimais, usar o ponto e não a vírgula como separador.

...

Fonte: Arquivo do autor

Admitimos que a participação dos alunos nesta ação foi limitada. O uso do Winplot para o estudo das funções tomou proporção atrativa maior do que a esperada e o professor, não habituado ao trabalho no laboratório de informática, perdeu o controle das ações, comprometendo resultados e registros. Os alunos construíram os gráficos, mas não o analisaram, como também nenhum deles preencheu a tabela, porque ela passou a ser desnecessária. Tratou-se de uma ação que envolveu operações que não mais faziam sentido. Para que o aluno trabalhasse com a tabela, o software não deveria ter sido usado. Faltaram operações para direcionar a análise.

Seguem abaixo registros dos alunos, em branco ou incompletos e sem a reflexão adequada dos alunos.

Aluno1

Apesar de reconhecermos a necessidade de outras mediações neste encontro, não foi possível repetirmos a ação, devido à falta de disponibilidade de horários para agendamento do uso do laboratório de informática, ficando esta ação inconclusiva. Isso mostra que as condições objetivas de realização da atividade docente interferem, mesmo tendo ocorrido um planejamento prévio, fundamentado teoricamente. O sistema didático oferece princípios e diretrizes, entretanto não podemos desprezar as condições objetivas e as subjetivas de realização de uma atividade.

Seguimos nos próximos encontros para a execução das Ações 10 e 11, nas quais priorizamos um alto grau de dificuldade.

4.5.3 Análise da Ação 10 da Tarefa 3 – Compreendendo mais a fundo

Ação 10 - Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela já conhecida de vocês, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente relembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}

Se 27 pode ser escrito como 9×3 ou $3^2 \times 3^1$, usando as propriedades das potências temos que $3^2 \times 3^1 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$.

Como já vimos, isso garante que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

Sendo assim, responda:

- Ao dividir 729 por 81, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?
- Ao multiplicar 2187 por 9, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?

Registre aqui suas descobertas e percepções sobre a atividade:

..

Fonte: Arquivo do autor

Iniciamos com o conceito das progressões, caminhando para uma representação da principal essência do conceito dos logaritmos, em uma abordagem que quase não é trabalhada no Ensino Médio. Trata-se de sua forma mais abstrata, utilizada para a compreensão, interpretação e criação de modelos de aplicação na natureza. Embora venha se tratar de sua ideia essencial para o uso da função exponencial/logarítmica, não é comum encontrarmos tal abordagem, caracterizando um alto grau de dificuldade a ser superado.

Aluno3

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

Na primeira linha percebemos uma PA, devido a razão ser 1. Todos os números são acrescidos desse valor.

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

Na segunda linha percebemos uma PG, devido a razão ser 2. Todos os números são multiplicados por esse valor.

Nas primeiras operações da Ação 10, não identificamos dificuldades dos alunos em perceber a relação existente com as progressões e o registro do fato.

O mesmo se deu com o registro da operação que solicitava que encontrassem o valor dos logaritmos, associando a Tabela dos Logaritmos e as equações exponenciais, como podemos observar no registro do **Aluno4**.

Ao realizar a atividade, fica mais fácil e rápido usando as potências, além disso a utilização da tabela também contribui muito, tendo em vista que conseguimos verificar que a 2ª e 3ª linha são iguais.

Porém, na realização da Ação 11, cujo objetivo era usar a definição de PA (progressão aritmética) e PG (progressão geométrica), para alcançar o conceito de função exponencial e logarítmica, conforme definido por Lima e Wagner (2001, ver Ação 9), percebemos muita dificuldade, sobretudo em relação às propriedades da função $f(x) = a^x$:

$$1) f(1) = a$$

$$2) f(x + h) = f(x) \cdot f(h) \text{ para quaisquer } x, y \in R \text{ e}$$

$$3) \text{ para } h \text{ fixo, o valor } f(x + h) \text{ é proporcional a } f(x) \text{ e o coeficiente de proporcionalidade } \frac{f(x+h)}{f(x)} = c \text{ depende apenas de } h \text{ mas não de } x.$$

Essas propriedades são importantes, porque elas é que determinam se um dado fenômeno pode ser modelado pela função exponencial ou não.

4.5.5 Análise da Ação 11 da Tarefa 3 – A função exponencial

Ação 11 - A função exponencial

Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA h	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG q	9/3=3	27/9=3	81/27=3	243/81=3	729/243=3	2187/729=3	6561/2187=3	19683/6561=3	59049/19683=3
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x+h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- 1) Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes?
- 2) Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência?
- 3) Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x. Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).

QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$							...

Observe e complete a última linha.

Verifique na linha do $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, a variação muda em relação ao quadro 1.

Qual mudança aconteceu com o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, do quadro 1 para o quadro 2?

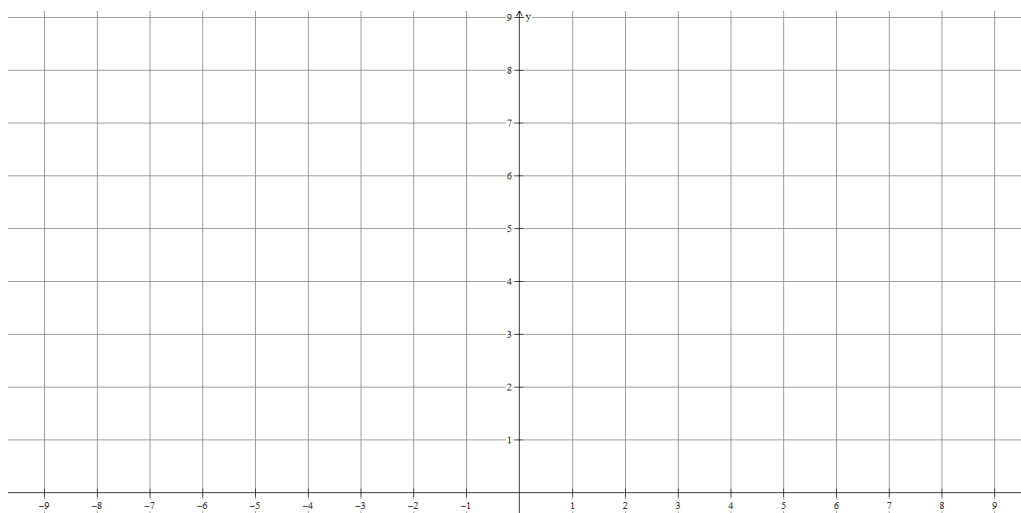
As razões também mudaram?

Qual relação você faz entre essas mudanças?

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

ada a função $f(x)=3^x$

x	y=3 ^x



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x . Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

...

Fonte: Arquivo do autor

Os registros dos alunos foram todos muito próximos, por isso optamos por apresentar apenas dois deles.

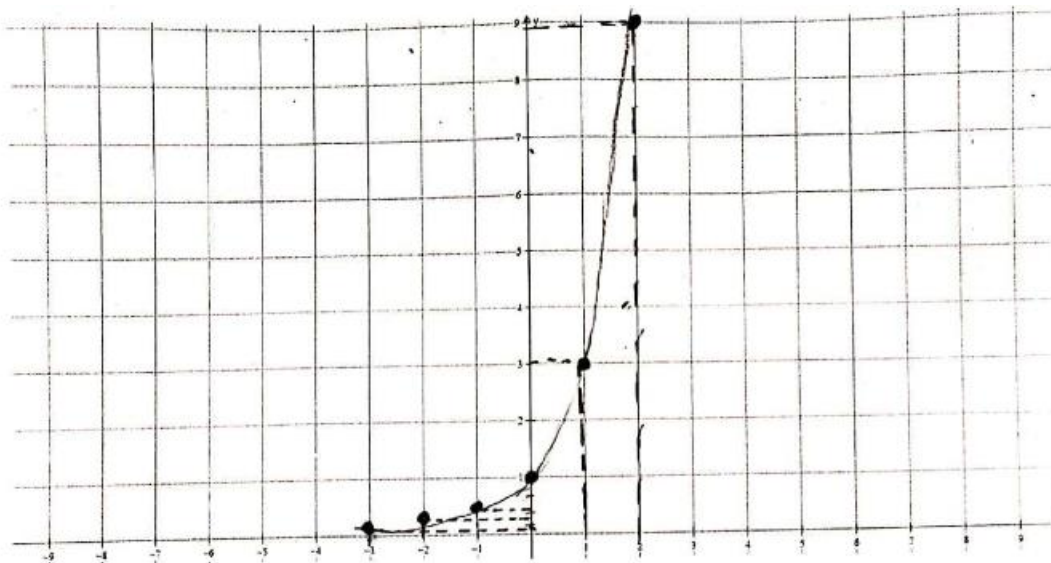
Aluno1.

$n=2$ QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)} = q$		$\frac{3 \cdot 3^2}{3^1}$	$\frac{3 \cdot 3^4}{3^3}$	$\frac{3 \cdot 3^6}{3^5}$	$\frac{3 \cdot 3^8}{3^7}$	$\frac{3 \cdot 3^{10}}{3^9}$	...

Qual relação você faz entre essas mudanças?

$\frac{f(x+h)}{f(x)} = q$
Sempre igual



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

na função $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, demonstra-se que o valor sempre será igual a q . Se de acordo com a última linha, é feita a descrição de PG (multiplicação da constante p para encontrar o próximo valor). A PA representa o valor dos expoentes, assim como a ação da PG (q) é igual a base da potência.

Com diversos campos em branco e uma explicação confusa, imprecisa e inconsistente, o registro da ação não alcançou a superação do grau de dificuldade esperado.

Aluno4

QUADRO 2

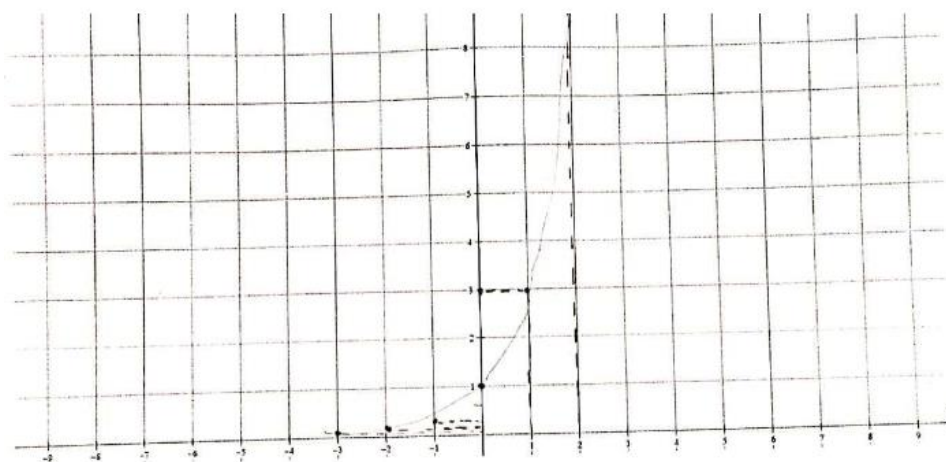
PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 6^2}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^3}$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^5}$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^7}$	$\frac{3^1 \cdot 3^{10}}{3^9}$	...

$h=2$
 $q=9$

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

Dada a função $f(x)=3^x$

x	y=3 ^x
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

→ A PA é dada por x e sua razão por h .
 → A razão da PG é q e q será a base das potências representadas por $x+h$ (q^{x+h}).
 → Tendo em vista que a PG é dada por $f(x)$ e x é a PA, tem-se a fórmula: $\frac{f(x+h)}{f(x)}$.

Para finalizar, a análise da terceira Tarefa 3, que visava avançar no conceito dos logaritmos, focando a função exponencial e suas propriedades, da qual a logarítmica é inversa, consideramos os eixos de análise já utilizados nas tarefas anteriores.

A) apreensão de relações essenciais do conceito

Ao tratar a função exponencial, associando-a às progressões aritmética e geométrica, e às suas propriedades, conforme caracterizado por Lima e Wagner (2001), os alunos avançam e conseguem perceber como variam os termos colocados em correspondência, percebem que a razão entre $f(x + h)$ e $f(x)$ é constante, porém as evidências dos registros e da mediação ocorrida em sala, na qual o professor acabou dando respostas, permitem inferir que o conhecimento apropriado pelos alunos baseia-se nas evidências externas do proposto, não atingindo, ainda, uma generalização substantiva.

B) *a aplicação dinâmica dos princípios didáticos*

O desenvolvimento dessa tarefa, que tinha por objetivo a apropriação de um conhecimento teórico que exige um grau de abstração e de generalização mais avançadas, mostrou-nos que a forma como foi proposta a tarefa e as condições em que foram desenvolvidas permitiram uma síntese, que exige novas aproximações, num movimento de novas abstrações e generalizações, para que sua essência seja captada. Fica claro, ainda, que o ensino a um alto grau de dificuldade, quando se trata de conhecimentos que têm uma estrutura complexa, conduz de modo que “a assimilação de determinadas noções, quando se tornam domínio do aluno, leve ao mesmo tempo à sua reciclagem no curso subsequente do conhecimento” (ZANKOV, 1984, p. 30).

A respeito da atividade mental, que compõe o processo de desenvolvimento dos alunos, afirma S. Rubinstéin (1958):

[...] o objeto, no processo do pensamento, entra em novas e novas relações e, em virtude disso, atua em novas e novas qualidades, que se fixam em novos conceitos; desse modo, do objeto parece como se extraísse constantemente um novo conteúdo; cada vez apresenta um lado novo, nele aparecem novas qualidades. (RUBINSTÉIN, 1958 apud ZANKOV, 1984, p. 103, tradução nossa)

C) *a unidade do afetivo-cognitivo*

No momento em que as ações desta tarefa foram desenvolvidas, os alunos demonstravam uma preocupação com o uso do tempo para essa atividade fora do horário regular de aulas, pois tinham que estudar outros conteúdos que estavam sendo avaliados, sendo perceptível a inquietação e o desejo de que os encontros chegassem ao fim. Acrescido do nível de dificuldade crescente e da insegurança na apresentação das ações e a não assertividade em seu formato de apresentação, ficou aparente que não alcançamos o objetivo proposto.

Mas e os diálogos? A mediação do professor?

Provavelmente a apropriação do professor/pesquisadores frente a essa estrutura pouco utilizada e, conseqüentemente, pouco tratada, não possibilitou a preparação adequada do material e nem a organização necessária do professor, para alcançarmos uma qualidade de mediação que conseguisse conduzir os alunos da zona de desenvolvimento real até a de desenvolvimento potencial.

Percebemos na aplicação que o material impresso, apesar de fazer uso da mesma estrutura da Tabela de Arquimedes, cujo sucesso de sua aplicação já havíamos comprovado, não se mostrou a melhor maneira de apresentar as relações conceituais pretendidas; bem como, a mediação do professor, por vezes insegura, não possibilitou atuar utilizando questões que conduzissem os alunos à reflexão e ao conhecimento da rede conceitual dos logaritmos. Porém o tempo de que dispúnhamos havia acabado.

Para a superação destes eventos será necessária uma nova análise quanto a estrutura e organização dos conceitos envolvidos, bem como do movimento dialético necessário para sua apresentação e aplicação aos alunos. Deixaremos esta nova análise em aberto para um novo momento.

Encerramos nossos encontros depois de tal atividade e seguimos para a aplicação de um diagnóstico final de como foi para os alunos a participação no experimento.

4.6 Análise do diagnóstico final

No movimento de ascensão do abstrato ao concreto pensado, a aplicação do modelo construído é uma etapa. Assim, o diagnóstico se inicia com duas situações que podem ser modelados e resolvidas, aplicando o conceito dos logaritmos, seguida de algumas perguntas.

Diagnóstico final

Chegamos ao final de nossos estudos. Responda as perguntas a seguir para nos ajudar a aprimorar nosso sistema de ensino.

- 1) Como você definiria o que é o logaritmo?
- 2) Como foi sua experiência neste trabalho?
- 3) Quais as similaridades e diferenças entre as aulas sobre logaritmo do ano passado, para estas?

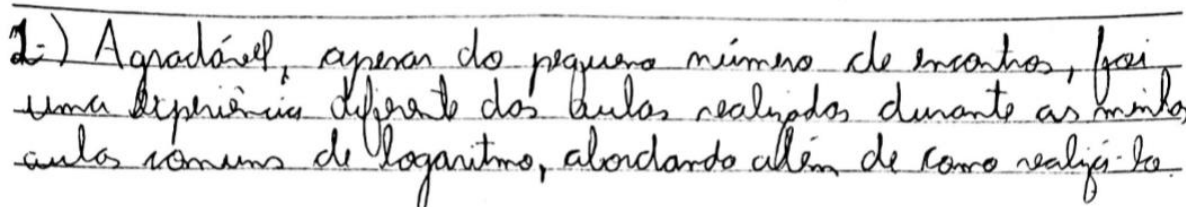
- 4) Quais observações você faria para melhorarmos nosso modelo de aula?
- 5) Quanto à velocidade e ao ritmo de sua aprendizagem, o que você poderia afirmar frente suas experiências de aprendizagens anteriores?
- 6) Quanto ao nível de dificuldade apresentado pelas atividades, o que você poderia afirmar frente suas experiências de aprendizagens anteriores?
- 7) Quanto à relação aluno, professor e conteúdo, o que você poderia afirmar frente suas experiências de aprendizagens anteriores?
- 8) Quanto à sua atuação como responsável pela sua aprendizagem, atenção e dedicação ao estudo do tema, o que você poderia afirmar frente suas experiências de aprendizagens anteriores?

Fonte: Arquivo do autor

Neste momento do experimento, é sensível a mudança de postura dos participantes frente os desafios apresentados, envolvendo os logaritmos, comprovando pressupostos da abordagem zankoviana utilizada para o ensino-aprendizagem das relações essenciais do conceito dos logaritmos.

Os relatos a respeito da participação no experimento e do aprendizado dos logaritmos foram os seguintes:

Aluno5



2-) Agradável, apesar do pequeno número de encontros, foi uma experiência diferente das aulas realizadas durante as minhas aulas comuns de logaritmo, abordando além de como resolvê-lo.

Em seu registro, o **Aluno5**, ao dizer que o número de encontros foi “pequeno”, e que os encontros foram agradáveis, apresenta sinais de satisfação por sua participação no experimento. Quando afirma que as aulas foram diferentes, destacando que a abordagem utilizada extrapolou o simples fato de resolver os logaritmos, reafirma que a abordagem utilizada proporcionou a ativação do caráter das emoções positivas, permitindo a percepção de indícios de que a organização utilizada difere positivamente da maneira tradicional de ensino.

Aluno3

1) A minha experiência neste trabalho foi muito boa, pois consegui aprender e entender de uma forma mais simplificada e com métodos mais fáceis o estudo dos logaritmos. Além disso, as aulas dinâmicas facilitaram o aprendizado individual.

1) A minha experiência neste trabalho foi muito boa, pois consegui aprender e entender de uma forma mais simplificada e com métodos mais fáceis o estudo dos logaritmos. Além disso, as aulas dinâmicas facilitaram o aprendizado individual.

O **Aluno3**, registra que “...as aulas dinâmicas facilitaram o aprendizado individual”, confirmando que alcançamos em nosso experimento a compreensão e prática do princípio cinco do sistema zankoviano, que trata do cuidadoso planejamento que visa à aprendizagem de cada aluno em particular.

Aluno5

3-) No ano passado, foi abordado somente como resolver as exercícios, suas propriedades e casos. Já estas aulas, abordaram não somente como resolver, mas foi apresentado um contexto, suas aplicações além dos exercícios.

O **Aluno5** registra que diferentemente das aulas sobre os logaritmos que teve na primeira série, no experimento lhe foi apresentado o contexto e aplicações, além dos exercícios, demonstrando que a simples repetição não exerce o papel ideal no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Aluno3

4) Nas aprendizagens anteriores, a velocidade e o ritmo da minha aprendizagem eram bem lentos, pois tenho dificuldade em Matemática e as matérias geralmente são dadas de formas bem rápidas. Diferentemente dessas aulas, que consegui aprender melhor.

4) Nas aprendizagens anteriores a velocidade e o ritmo da minha aprendizagem eram bem lentos, pois tenho dificuldade em matemática e as matérias geralmente são dadas de formas bem rápidas. Diferentemente dessas aulas que conseguimos aprender melhor.

O **Aluno3** destaca que seu ritmo de aprendizagem nas aulas do modelo tradicional é lento, assumindo a culpa por isso registrando sua dificuldade com a matemática, porém, nos encontros do experimento, percebeu que aprendeu melhor, confirmando dessa forma os resultados positivos trazidos pelo uso dos princípios três e quatro do sistema

zankoviano, que propõem um avanço em grande ritmo, o que não significa, um ritmo acelerado, provocando a compreensão do aluno do processo de estudo, que o leva a resultados positivos, consequentemente, aumentando sua autoestima.

Aluno2

05 Como relatado na questão 3, final de ano é um período muito cansativo e estafante para os estudantes, então o tempo e a maneira de como aprendi naquela situação desfez em mim dificuldades acumuladas.

O **Aluno2** confirma em seu registro aquilo que já havíamos identificado em nossa análise dos livros didáticos, onde registramos que o conteúdo dos logaritmos ocupa sempre o final do livro, acabando por provocar, devido ao tempo, um processo de “apressamento” de sua apresentação aos alunos, isso quando não acaba sendo simplesmente deixado de lado em alguns casos.

Aluno5

7) A relação aluno e conteúdo foi mais benéfica no momento, uma vez que foca no aprendizado, já a relação professor e aluno é melhor na sala de aula com os dois pontos, uma vez que foca na prova, que é o que mais preocupa os alunos.

O **Aluno5** confirma o primeiro princípio zankoviano ao definir a relação aluno e o conteúdo como “benéfica”; porém, afirma que a relação professor e aluno era melhor na sala de aula do ano anterior, onde o foco era a “prova, que é o que mais preocupa os alunos.” Tal afirmação demonstra que o aluno tem como maior preocupação a avaliação feita pelo professor ou a preparação para provas como a de vestibular ou do ENEM, e não o aprendizado. Devolver de maneira assertiva os conteúdos em uma prova, é tido como mais importante que aprender. Eis aqui um sério questionamento quanto a cultura das provas nas escolas, e o preço que isso cobra do real aprendizado para a vida.

Os relatos trazidos pelos sujeitos confirmam nossas expectativas de que o processo de ensino-aprendizagem, a partir dos princípios de L. V. Zankov, é mais promissor no sentido da aprendizagem e formação integral dos alunos do que os métodos tradicionais utilizados nas escolas. Sua preocupação com as emoções positivas promove

uma relação aluno e matemática, que minimiza os medos e angústias. A aplicação do sistema experimental zankoviano eleva o professor a um papel transformador do pensamento do aluno.

A participação no experimento do professor colaborador também foi analisada..

Professor

O trabalho que realizamos com a adaptação do experimento de Zankov foi muito produtivo e positivo, ao meu ver.

Conseguimos que os alunos chegassem ao conceito de logaritmos e com isso a necessidade de sua existência assim como o da tabela de valores decimais.

Em seu registro, o professor relata sua percepção quanto ao sucesso da adaptação realizada para o experimento, destacando o feito dos alunos por alcançarem o conceito dos logaritmos e do funcionamento da tabela de valores decimais.

A grande diferença para os métodos tradicionais foi justamente a constituição do conceito dos logaritmos pelo aluno e não a apresentação como fazemos comumente.

No trabalho com a tabela de logaritmos decimais os alunos conseguiram determinar o conceito da característica e entender a obtenção da mantissa sem que fosse feita nenhuma exposição prévia destes conceitos.

Destaca ainda que a diferença de nosso experimento para os métodos tradicionais, foi a “constituição do conceito dos logaritmos pelos alunos”, diferentemente do modelo dominante em que o professor apresenta o conceito.

Quanto à tarefa com a tabela dos logaritmos, ressalta que os alunos, já de posse do conceito, alcançaram por sua própria conta a ideia de mantissa e característica, sem necessidade de explicações, comprovando que a estrutura de ensino-aprendizagem

baseada nos cinco princípios zankovianos se interacionam e promovem a formação integral do aluno.

O professor, no caso eu, trabalhou mais como um orientador do que expositor de conceitos. Se entendemos a necessidade da existência e a aplicação prática de determinado algoritmo, fica mais fácil compreender as suas propriedades e desenvolver aprofundamento sobre o assunto.

No experimento tivemos diferentes níveis de alunos em relação à concentração em sala de aula e facilidade de aprendizagem, foi notado certo nivelamento entre eles, tal vez devido ao desafio de montar um conceito perante as

O professor ainda declara que seu papel junto aos alunos foi de orientador, fugindo do esquema tradicional da docência no qual o professor assume o papel principal nas relações de ensino-aprendizagem. Também destaca que o trabalho realizado auxiliou no nivelamento dos alunos de maneira natural, ou seja, sem a necessidade de intervenções do professor para atuar em separado na apropriação dos elementos e conteúdos percebidos como insuficientes para estes alunos, qualificando ainda mais a eficiência dos princípios de L. V. Zankov.

Identificar os aspectos que direcionaram o processo de desenvolvimento e indução apresentado no material que contribuiu para a percepção por parte dos alunos quanto às relações essenciais do conceito dos logaritmos, é a grande contribuição desta análise. A organização do conteúdo no material se mostrou tanto adequada, quanto relevante. A utilização do desenvolvimento histórico, da necessidade e dos processos foram importantes não pela apresentação de conteúdo, mas por orientar elementos da essência da produção humana, permitindo que o participante compreendesse seu lugar na interação entre homem e meio, priorizando ações apoiadas nos princípios zankovianos, os quais permitiram uma abordagem diferente da habitual.

Definir o que é o logaritmo e compreendê-lo como um conceito não são a mesma coisa. O conceito orienta o controle e a possibilidade de modificação das coisas a partir

dele, pois promove significado e sentido. Para desenvolver nos alunos esse tipo de conhecimento, foi necessário organizar tarefas baseadas em ações, que abordaram o conceito dentro de seu movimento histórico e lógico. Sendo assim, não se trata de qualquer tarefa ou ação, é necessário alcançar uma maneira de encaminhar o aluno a uma apropriação que corresponda às potencialidades formativas presentes em seu processo de desenvolvimento.

Assim podemos defender que o sistema zankoviano com seus princípios, ao mesmo tempo que eleva o aluno a um papel de protagonista em seu processo de aprendizagem, confirma que a organização do ensino-aprendizagem dos logaritmos nesta perspectiva, é sim uma maneira de tornar “vivos” os conteúdos escolares, mesmo tendo sido criados por outras necessidades – aqui o lógico e o histórico se entrelaçaram, o que nos permitiu apreender evidências de aumento de autonomia e de um caminhar para o pensamento teórico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas sociedades letradas, a escolarização tem importante papel na constituição dos sujeitos. Este é um fato indiscutível e socialmente referendado. Podemos, contudo, perceber diferentes concepções de homem, de mundo, de educação, de escola e de ensino-aprendizagem, que direcionam os fins da educação escolar e as condições para que ela se concretize.

A escola é espaço de apropriação do conhecimento científico pelas novas gerações, local onde o conhecimento historicamente acumulado é transferido com a intencionalidade de perpetuação da espécie como ser pensante e ativo no mundo. Nela, o processo de ensino-aprendizagem é intencional e deve visar o desenvolvimento do homem, a humanização pela apropriação da cultura. Na escola são desenvolvidos processos que envolvem o aluno, o professor, o saber, e as relações entre eles, de forma dinâmica, contextual, situada histórica e socialmente, ou seja, desenvolvem-se diferentes propostas e práticas pedagógicas.

Entretanto, essas precisam ser melhor explicitadas, estudadas e propostas para que o ato de ensinar, para que possamos atingir os fins da educação, que em nossa perspectiva, visam à humanização do homem. Tratar de questões como didática, ensino-aprendizagem e a formação do professor é essencial nesse processo. Foi com essa preocupação, que nos perguntamos inicialmente sobre os desafios enfrentados por escolas, professores e alunos para o desenvolvimento de uma educação que realmente faça diferença nas vidas daqueles que por lá passam.

No contexto da psicologia pedagógica e da didática desenvolvimental, com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, iniciada com L. S. Vigotski, na ex-União Soviética, no século passado, L. V. Zankov propôs e implantou um sistema didático, no qual um dos princípios é o *papel reitor dos conhecimentos teóricos*.

Diante da ênfase atribuída aos conceitos teóricos como fundamentais para a tomada de consciência e também como promotores do desenvolvimento psíquico do homem, na perspectiva do ensino desenvolvimental, e da necessidade de organização do ensino de matemática que conduza ao desenvolvimento integral do aluno, tomamos como objeto de estudo a organização do processo ensino-aprendizagem dos logaritmos no Ensino Médio, a partir de pressupostos de Leonid V. Zankov, buscando responder a seguinte questão: *Quais as contribuições de uma organização do ensino dos logaritmos*

com base em princípios do sistema didático zankoviano e no movimento lógico e histórico desse conceito, visando a sua apropriação pelos alunos?

Definimos como objetivo geral desta pesquisa: *analisar as contribuições do sistema zankoviano para organização do ensino dos logaritmos, visando à apropriação desse conceito, na perspectiva do ensino desenvolvimental.*

Podemos destacar dois pressupostos da Teoria Histórico-Cultural que foram importantes para a condução de nossa pesquisa. O primeiro relaciona-se ao objeto de estudo – o ensino-aprendizagem dos logaritmos, que considerou o conhecimento científico como uma teia de elementos culturalmente formados ao longo da história e codificados em diferentes signos. Assim, a aprendizagem é entendida como a apropriação dos elementos culturais, historicamente elaborados, por processos de elaboração de sínteses, a partir de abstrações do abstrato ao concreto. Como segundo pressuposto, temos a consideração do sujeito que aprende, em sua integralidade, como proposto no Ensino Desenvolvimental.

Essas características do objeto e do sujeito sugeriram a organização de um sistema didático inovador, que possui propostas diferentes dos demais, mais especificamente, um sistema que entenda o conteúdo escolar como meio para a formação integral do aluno e não como fim. Vários são os sistemas que poderíamos caracterizar desta forma, mas entendemos que o sistema de L. V. Zankov com seus princípios e sua preocupação com o afetivo, poderia fazê-lo nas condições objetivas do ensino de matemática no ensino médio.

L. V. Zankov, desenvolveu um sistema didático baseado em cinco princípios, priorizando a afetividade nas relações aluno - professor - conteúdo, visando ações que levem o sujeito à apropriação dos conceitos, promovendo condições para a passagem destes do plano intersíquico para o intrapsíquico.

Por isso, em busca de respostas às nossas questões, realizamos uma proposta de ensino dos logaritmos que se inspira nos princípios do sistema experimental zankoviano, considerando a realidade dos jovens que estudam no ensino médio brasileiro do século XXI. Buscamos no experimento realizado por L. V. Zankov, pressupostos de organização do ensino-aprendizagem que conduzissem o planejamento, a execução, bem como a análise dos dados obtidos.

Por entender o “conceito” como a representação abstrata do objeto, consideramos que sua apropriação exige dos sujeitos, a percepção da relação objeto-

representação, o que nos levou a priorizar ações de comparação, definição, memorização e aplicação na trajetória das tarefas propostas.

Como trabalhamos na perspectiva do ensino desenvolvimental, entendemos que os conhecimentos produzidos historicamente estão objetivados nos instrumentos físicos e simbólicos. Assim como os instrumentos físicos facilitam e ampliam nossa capacidade de interagir com a natureza, os instrumentos simbólicos exercem essa mesma função na medida em que ampliam as possibilidades de memória, raciocínio, planejamento e imaginação. Podemos, neste sentido, considerar como sendo essa a função da escrita, como também do cálculo e da álgebra, do uso de fórmulas físicas e químicas, e de uma série de conteúdos escolares que, transmitidos socialmente, podem desempenhar a mesma função de ampliação das capacidades do homem.

A metodologia utilizada foi o experimento didático-formativo que envolveu as seguintes etapas, apresentadas por Aquino (2017), ao trazer as contribuições de L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov, para esse método: a revisão de literatura e diagnóstico da realidade, a elaboração do sistema didático experimental, o desenvolvimento do experimento, análise dos dados e elaboração do relatório. Na elaboração do sistema didático que foi desenvolvido experimentalmente, trabalhamos juntos, pesquisadores e professores, na preparação de tarefas que pudessem guiar as ações dos participantes e dos próprios professores, pesquisador e colaborador, no processo prático da sala de aula.

Este foi um momento no qual os conhecimentos produzidos historicamente sofreram uma seleção e uma transposição didática, a fim de que baseados nos princípios definidos por L. V. Zankov, pudéssemos experimentar, tanto aluno, quanto professor, sentimentos que colaborassem no desenvolvimento de capacidades psíquicas superiores e o “desenvolvimento ótimo” do indivíduo. Pensar e construir estas tarefas, certamente foi uma experiência formadora para os professores/pesquisador envolvidos, uma formação continuada, que envolveu pesquisa bibliográfica, documental e experimento.

A aplicação das tarefas e condução do processo do experimento em sala de aula, foi realizada por apenas um dos professores que haviam iniciado o trabalho conosco. Sua regência, foi diferenciada e modificada ao longo do processo, pautada nas orientações e princípios zankovianos. Esta maneira de condução da sala de aula não gerou nenhum tipo de dificuldade para o professor, que a esta altura já havia se envolvido com nossa pesquisa. Para os participantes, a falta das respostas diretas normalmente dadas pelos

professores em suas explicações, causou-lhes estranheza a princípio, mas com o decorrer do uso deste modelo, ainda, no primeiro encontro, todos já pareciam à vontade com este modo de condução pautado nos princípios zankovianos.

Não podemos negar que a formação do professor constitui elemento essencial para a boa realização do ensino, que suas experiências interferem em sua prática a ponto de comprometer os resultados didático-pedagógicos de seus alunos, tornando essencial os encontros de formação que realizamos durante todo o período em que o experimento foi pensado e realizado.

O diagnóstico realizado no início, apresentou-nos um ensino fragmentado, rejeitado por sua “chatice²⁶”, com muitas informações lançadas sem nexos ou conexões, com ênfase no pensamento empírico. Tal constatação foi essencial para darmos sequência em nosso experimento, agora justificável não somente pelo embasamento teórico já apresentado em nossa tese, mas também pelos resultados encontrados neste momento.

As tarefas que se seguiram nos demais encontros procuraram criar situações nas quais fosse possível contemplar o percurso lógico e histórico do próprio conteúdo, sua regularidade no processo de aprendizagem e sua singularidade no desenvolvimento dos alunos, para que assim revelassem a complexidade do ato de ensinar e aprender. Sabemos que estes processos se entrelaçam de diversas formas, sendo quase inseparáveis, mas mesmo assim, optamos por separar cada um deles em um determinado conjunto de tarefas, desdobradas em ações, que nos mostrassem de modo mais aproximado possível o processo e interferência junto aos participantes.

A partir do desenvolvimento do experimento em que o sistema didático foi testado, é possível afirmar que há indicadores capazes de orientar a tomada de decisões no ensino, porém não há modelos prontos e que podem ser credibilizados como totalmente eficientes. Na organização das tarefas de aprendizagem foi fundamental a clareza quanto à sua intencionalidade e aos instrumentos adequados para que o sujeito alcançasse os objetivos. Porém é preciso sempre garantir flexibilidade suficiente para que sejam permitidas mudanças de rumos, conforme as necessidades percebidas durante a interação entre aluno, professor e conteúdo, entendendo conteúdo como o novo objeto de aprendizagem posto.

²⁶ Termo próprio da linguagem dos adolescentes participantes da pesquisa.

Com relação ao princípio do *papel reitor dos conhecimentos teóricos* de L. V. Zankov, as tarefas utilizadas demonstraram um caminho possível para a compreensão do conceito dos logaritmos, tendo em vista o seu desenvolvimento histórico e lógico, em busca da essência do conceito. Há nas manifestações dos alunos participantes, registros e falas, algumas evidências de apropriação do conceito, como também desenvolvimento geral, abstração, generalização, atenção, memória, emoções, sempre provocando os sujeitos a relacionarem as relações de dependência correspondentes a cada nível de compreensão alcançado por eles, respeitando o ritmo e o espaço de cada um, conduzindo o aluno para a autonomia no processo de aprender. Neste aspecto, é importante retomar a contribuição de Rubinstéin (1958), quando afirma que o objeto de pensamento entra em novas relações, portanto está sempre em constante movimento e transformação. Por este motivo, os alunos ao retomarem esse conceito em outros espaços e momentos irão ampliar a sua compreensão desse objeto, identificando nele novas qualidades.

Quanto ao *ensino em alto grau de dificuldade*, podemos afirmar que se trata de um princípio que está sempre contido nos demais, pois é através dele que foi possível dar às atividades um ritmo estimulante e ao mesmo tempo provocador para que os sujeitos não se sentissem cansados ou desestimulados com o processo de apresentação da rede de conceitos que os fez caminharem até o conceito base pretendido. Este princípio proporcionou aos sujeitos a liberdade de ousar, interagir, manifestar através da fala suas certezas e dúvidas, compartilhando com seus pares e com o professor sua trajetória de aprendizagem. Como observador, houve momentos em que ficamos especialmente emocionado ao perceber como os alunos superavam suas dificuldades e deduziam suas hipóteses com prazer e tranquilidade.

O princípio do *avanço em grande ritmo* é resultado dos demais princípios, que a cada encontro sentiam-se mais felizes e satisfeitas por seus avanços, além de sinalizarem a produção de uma autoestima que os levava a querer progredir sempre mais e mais rápido. Seus relatos de medo e angústia do primeiro momento foram substituídos por relatos de satisfação que nos apresentavam seu sucesso frente os desafios propostos. A não repetição de exercícios foi um dos elementos que mais colaborou para este processo, pois como cada tarefa exigia um passo a mais do que já havia sido realizado, o aluno era estimulado a seguir em frente, carregando seu conhecimento anterior e fazendo uso do mesmo para alcançar o próximo nível exigido. Em seus relatos informais, os alunos

comparam este processo aos jogos eletrônicos, onde para superar cada fase é necessário saber fazer uso do que foi aprendido na fase anterior.

O princípio da *compreensão dos alunos do processo de estudo* é uma consequência de todos os demais já citados. Visivelmente construído a cada tarefa, este princípio em particular é apresentado pelo próprio aluno ao professor quando expressa através de perguntas uma apropriação e preocupação com a sequência de seus estudos, passando assim a assumir o papel de protagonista de sua formação.

O planejamento cuidadoso das aulas para promover a aprendizagem de cada aluno particular se deu não somente durante o processo de elaboração das tarefas, mas por todo o tempo dos encontros. Realizamos algumas adaptações e inserimos novos elementos em algumas ações após percebermos as necessidades de alguns alunos em especial. Este processo não somente atende às necessidades individuais e coletivas dos alunos, como também nos permite rever e analisar possíveis alterações necessárias ao melhor andamento das tarefas.

Ao longo do desenvolvimento do experimento, fomos compreendendo que muitas das limitações da aprendizagem conceitual e do desenvolvimento psíquico dos sujeitos decorrem da falta de organização adequada do ensino, pois para tal é necessário o entendimento do processo de apropriação de novos conhecimentos por parte dos sujeitos envolvidos e além de investimentos na questão afetiva envolvendo aluno, professor e conteúdo.

Em nosso levantamento documental e bibliográfico, percebemos como é comum, quando se trata de ensino de conceitos, propostas que promovem saltos da definição conceitual para a sua forma operacional, ou seja, simplificando o conceito ao uso instrumental para a resolução das tarefas escolares e nada mais. Perde-se a oportunidade de inserir valores da vida cotidiana e real ao aprendizado, ocasionando o esvaziamento do valor daquilo que foi ensinado.

As propostas encontradas, em sua maioria nos livros didáticos, priorizam a formação de ações vinculadas a situações particulares apresentadas nas próprias tarefas propostas, atendendo apenas às demandas imediatas da reprodução de conteúdos indicados no currículo escolar, sem a associação destes à vida e ao desenvolvimento integral do aluno. Estes acabam por não serem internalizados pelos alunos como operações conscientes, por isso acabam por não serem facilmente trazidos à consciência quando necessário no futuro.

É verdade que a natureza de nosso trabalho e a vivência de anos como alunos do sistema tradicional são alguns dos motivos pelos quais temos dificuldades de pensar e organizar o trabalho docente do modo como é proposto por L. V. Zankov, prova disto foram as tarefas de aplicação do conceito, as quais apesar de termos nos dedicado a compô-las seguindo o mesmo processo das tarefas anteriores, acabaram por se tornar meros momentos de reprodução do processo indutivo educacional. Fica esse desafio para nossos próximos estudos.

Foi possível concluir, ainda, que o sistema didático estabelece pressupostos e diretrizes, porém não se pode desconsiderar as condições objetivas que cercam a atividade de ensino e aprendizagem, o que impede ou dificulta a sua realização.

Ao final deste trabalho, podemos afirmar que a atividade de pesquisa constituiu-se em um processo de aprendizagem para seu autor devido aos aspectos intelectual e emocional que são mobilizados em todo o percurso. Podemos acrescentar também que novos instrumentos e processos mediadores foram adquiridos para enriquecimento de nossa atuação profissional, revelando a pesquisa como atividade formadora. Assim como o trabalho de organização das tarefas e do processo de mediação ampliaram a potencialidade de abordagem para a formação dos conceitos, tornando nosso olhar sobre os fenômenos educativos mais afetivos e humanos.

Olhando para trás, percebemos que no interior de nossa pesquisa, lá no começo, compreender os conceitos zankovianos foi uma ação que exigiu um bom tempo de reflexão e análise. Leituras e releituras foram feitas na busca de alcançarmos uma adaptação de igual significado da proposta do autor. Neste processo, fomos crescendo gradativamente durante nosso estudo, como autor e como professor. Em particular, foi perceptível nosso crescimento como coordenador, nas minhas relações com alunos, pais e professores, levando a alcançar resultados relevantes neste período junto a toda comunidade escolar e tornando um profissional mais feliz e realizado.

Diante de tudo isso, percebemos que criamos uma nova ação dentro de um mesmo processo, baseados nos conceitos e princípios de L. V. Zankov, passamos a exercer uma função formativa que nos permitiu a leitura do que não estava objetivamente explícito, dando-nos condições de estabelecer relações entre os fenômenos e captar indícios do movimento de aprendizagem.

Enfim, o conceito de ensino-aprendizagem transformou-se e mudou nossas práticas e de todos os envolvidos no processo. Essa transformação, presente no plano

interpsíquico, de modo especial durante a pesquisa documental, bibliográfica e de campo, encontra-se, agora, após um longo processo de apropriações, também no plano intrapsíquico.

Nossa pesquisa não se encerra com este trabalho, ela apenas muda de nível, contamos com investimentos em novos experimentos para que certamente possamos alcançar maior qualidade às novas ações em nossas propostas de tarefas para o ensino de matemática e o ensino em geral.

No que se refere aos limites desta pesquisa, um deles é o número de alunos participantes do experimento. Trata-se de uma pequena amostra, podendo gerar resultados que não correspondem a uma realidade que possa ser generalizada, porém, é o início de um processo de pesquisa que pode ter apontado questões que sustentarão outros possíveis estudos. Vale destacar também que, dado o universo estudado e a amostra utilizada, foi possível aplicar e verificar de maneira muito próxima o método e a metodologia proposta, permitindo que erros e acertos neste processo fossem evidentes.

Reconhecemos que o processo de ensino-aprendizagem baseado nos princípios zankovianos demandam mais estudos para que seja efetivamente utilizado nas salas de aulas brasileiras. Acreditamos que a continuidade de investimentos neste sentido poderá trazer resultados positivos.

REFERÊNCIAS

ALVES, Gabriel. Afinal, o que é crescimento exponencial de casos? **Folha de S. Paulo**. São Paulo, 17 mar. 2020. Seção B4.

BRASIL.MEC. **Base Nacional Comum Curricular, BNCC**. 2018. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em jun. 2019.

BRASIL. CNS. - **Resolução Nº 466/12**; “- RESOLUÇÃO Nº 510”, 2016). Aprova as diretrizes e normas regulamentadoras de pesquisas envolvendo seres humanos. Disponível em: <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/saudelegis/cns/2013/res0466_12_12_2012.html>. Acesso em: mar. 2018.

BRASIL. CNS.- **Resolução Nº 510/16**. Dispõe sobre as normas aplicáveis a pesquisas em Ciências. Humanas. Disponível em: <<http://conselho.saude.gov.br/resolucoes/2016/Reso510.pdf>>. Acesso em: mar. 2018.

BRASIL. **Leis de Diretrizes e Bases, LDB**. Lei nº 9.394. 1996. Disponível em:<http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm> Acesso em julho de 2019.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, PCN**. 1999. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>>. Acesso em julho de 2019.

BRASIL. Portal do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, **PROFMAT**. Disponível em: <<http://www.profmatsbm.org.br/funcionamento/regimento/>>. Acesso em 5 de abril de 2017.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Lisboa: Editora Gradiva, 1951.

CARVALHO, Jean Pereira; TAVARES, Rodrigo. **Ensino dos logaritmos através da resolução de problemas no 1º ano do Ensino Médio**. Escola Normal Superior Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática do Ensino Médio. Universidade do Estado do Amazonas 2015.

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino**. O Clube de Matemática. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contextos e aplicações v1**. SP: Ática, 2012.

DAVIDOV, V. V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental**. Moscú: Editorial Progreso, 1988.

- DUARTE, Newton. **Os conteúdos escolares e a ressurreição dos mortos: contribuição à teoria histórico-crítica do currículo**. Campinas, SP: Autores Associados, 2016 (Coleção educação contemporânea).
- GIOVANNI, José Ruy. **Matemática uma nova abordagem v1**. SP: FTD, 2000.
- GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no Ensino Médio v1**. SP: Scipione, 1999.
- GOULART, Márcio Cintra. **Matemática no Ensino Médio 1ª série**. SP: Scipione, 2005.
- HOWARD, Eves. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2004.
- KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro, RJ: Civilização Brasileira, 1978. Coleção Perspectivas do homem. v. 123. 353 p.
- LIMA, E. L. *et al.* **Exame de textos: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- SBS, ABECS, ABA, ANPOCS. Nota Pública: pela revogação da lei da reforma do ensino médio e retirada da proposta da BNCC. Brasília: 2018. Disponível em: <<https://appsindicato.org.br/entidades-lancam-nota-publica-solicitando-revogacao-da-reforma-do-ensino-medio-e-retirada-da-proposta-da-bncc/>>. Acesso em: mai. 2019.
- LIMA, E. L. *et al.* **A Matemática do Ensino Médio: Vol 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2004.
- OLIVEIRA, Andréia Julio de. **O Ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. Natal, RN, 2005.
- PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antônio. História do número *e*: gênese e aplicações. **Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco**. 2013, p. 31-44.
- PUENTES, ROBERTO; AQUINO, ORLANDO. **Ensino desenvolvimental da atividade: uma introdução ao estudo do sistema zankoviano (1957-1977); Linhas Críticas**, Brasília, DF, v.24, 2018.
- PEREIRA, José Geraldo de Araújo. **Abordagem das funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no Ensino Médio**. 2010. 121f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.
- RESENDE, Marilene Ribeiro. O pensamento teórico segundo Davídov: abstração e generalização substantivas e a educação matemática. In: PUENTES, Roberto Valdés; LONGAREZI, Andréa Maturano (orgs). **Ensino Desenvolvimental: sistema Elkonin-Davídov-Repkin**. Campinas, SP: Mercado de Letras; Uberlândia, MG: Edufu, 2019.

RUBINSTEIN, S. L. **Princípios de psicologia geral: sensação e percepção**. Lisboa: Estampa, 1973. v. 3

SAVIANI, Dermeval. **A pedagogia no Brasil: história e teoria**. Campinas, SP: Autores Associados, 2008. (Coleção Memória da Educação)

SMOLE, Kátia Cristina; KIYUKAWA. **Matemática** – volume 1, SP: Saraiva, 1988.

SOARES, Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. 2011. 141f . Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2011.

SOUSA, Maria do Carmo de. (2018). O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática . **Obutchénie: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica**, 1(4), 40-68.

SOUZA, Maria Helena Soares. **Matemática 2º grau**. SP: Scipione, 1996.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar Matemática v1**. SP: FTD, 2010.

TARDIF, Maurice & LESSARD, Claude. **O Trabalho Docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas**. Petrópolis: Vozes, 2014.

TJORA, A. H. **Writing small discoveries: an exploration of fresh observers' observations. Qualitative Research**, London, v. 6, n. 4, 2006.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

ZANKOV, Leonid Vladimirovich. **La enseñanza e el desarrollo: investigación pedagógica experimental**. URSS: Progreso, 1984.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Livros didáticos como fontes para a escrita da história da matemática escolar**. Guarapuava: SBHMat, 2007. (Coleção História da Matemática para Professores).

ANEXOS – MATERIAL A SER ANALISADO E INCORPORADO AO TEXTO

ATIVIDADES

logaritmo logaritmando

 x^y
zMME
logarUNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOlog₁Data: / /2019 Série: Identificação aluno: Aluno 1

funções

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

Potências

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se lembra desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

 $x^y = x^y$

Logaritmo é composto por 3 fatores, são eles: logaritmo, logaritmando e o outro eu não lembro. O que eu me lembro é que existe um número, e que junto a ele constitui-se a base e um número que é elevado. Depois após identificar sobre 3 fatores que eu chamo, falado no começo é necessário fazer algumas mudanças para resolver a equação, podemos ao longo do exercício fazer o MME para achar o valor das incógnitas até igualar as bases. Mediante a isso existem várias outras regras e junto a elas a sua forma diferente de substituir e resolver a equação. Eu me lembro também que antes disso estudamos a função para compreendermos melhor essa matéria.

$$\log x = a^2 + b^2$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2º Identificação aluno: aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os logaritmos. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

A matéria "logaritmo" foi um conteúdo abstrato na primeira série de ensino médio, não sendo então, algo tão presente na memória, mesmo possuindo tal importância na matemática. Para iniciar os estudos dessa matéria, começamos abordando o tema das funções para compreendermos melhor as aplicações de logaritmo, desde serem processos "inversos". Tal tema aborda as potências, possuindo uma base, logaritmo e logaritmado. Na hora ensinamos uma fórmula também ($\log x = a^2 + b^2 \rightarrow$ não tem a certeza), juntamente com a aplicação em gráficos e sistemas.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^ª Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

O primeiro contato com o estudo do logaritmo foi no 1º ano do Ensino Médio. Me recordo de estudar juntamente com as amigas matemáticas. Não lembro o que realmente seja o logaritmo, mas lembro que existia propriedades para determinadas situações de log. As aulas eram voltadas para resolução de exercícios, principalmente de vestibulares. Não lembro de ter visto quais sejam suas aplicações na vida real e qual sua importância, mas sei que tem grande importância nos vestibulares.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 2019 Série: 2ªA Identificação aluno: Aluno S

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

O logaritmo possui em sua estrutura a base, logaritmando e o logaritmando, possui também uma incógnita, quando de um dos dados seu valor. Sua estrutura na álgebra é $\log_b x$ para não esquecer muito bem como na estrutura com uma operação para achar o resultado.

Descrevo a ele também aparecendo a função logarítmica, em geral estudá-lo foi bem repetitivo, as professoras que na época ensinavam repetia o que era o que na estrutura, mas não foi de outra forma eficiente. Em relação a suas aplicações práticas sei que ele tem uma importância, porém não foi mostrado nenhuma de suas aplicações práticas durante as aulas.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 6

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se lembra desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído de logaritmando e de logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como inverteção, alterar o expoente, fatorar potência, etc. Era necessário sempre identificar a base e expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho eu, que podem ser usados na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo as incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a "fórmula" do logaritmo e a treinando, com um ou outro exercício mais complexo.

logaritmo logaritmando

x^y
z

MME
PQ

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

log:

funções

Potências

x^y
 $= x^y$

Data: __/__/2019 Série: __ Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

Logaritmo é composto por 3 fatores, são eles: logaritmo, logaritmando e o outro que não lembro. O que eu me lembro é que existe um número, e que junto a ele constitui-se a base e um número que é elevado. Depois após identificar, foram 3 fatores que eu chamo. Falando no começo é necessário fazer algumas mudanças para resolver a equação, pedimos ao longo do exercício fazer o MME para achar o valor das incógnitas até igualar as bases. Mediante a isso existem várias outras regras e junto a elas a sua forma diferente de substituir e resolver a equação. Eu me lembro também que antes disso estudamos a função para compreendermos melhor uma matéria.

log 4

$$\log x = a^b$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: ___/___/2019 Série: ___ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

De certa forma, não me lembro totalmente (ou definitivamente não)
Primeiro, estudamos um determinado conceito para que depois, pudéssemos aplicar o elemento inverso, que é o logaritmo.
Depois assim, lembro-me disso: que ele é o inverso (da função que se aplica)
↓
é o inverso
 $\log b = a^x$ → essa era a fórmula, em que se podia encontrar a base, o logaritmo e o logaritmando.

→ Não sei se me lembro, ou se não aprendi, onde ele é utilizado.

$$\log x = a^2 + b^2$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2º Identificação aluno: aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os logaritmos. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

A matéria "logaritmo" foi um conteúdo abstrato na primeira série de ensino médio, não sendo então, algo tão presente na memória, mesmo possuindo tal importância na matemática. Para iniciar os estudos dessa matéria, começamos abordando o tema das funções para compreendermos melhor as aplicações de logaritmo, desde serem processos "inversos". Tal tema aborda as potências, possuindo uma base, logaritmo e logaritmado. Na época, ensinamos uma fórmula também ($\log x = a^2 + b^2 \rightarrow$ não tenho certeza), juntamente com a aplicação em gráficos e sistemas.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^ª Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

O primeiro contato com o estudo do logaritmo foi no 1º ano do Ensino Médio. Me recordo de estudar juntamente com as amigas matemáticas. Não lembro o que realmente seja o logaritmo, mas lembro que existia propriedades para determinadas situações de log. As aulas eram voltadas para resolução de exercícios, principalmente de vestibulares. Não lembro de ter visto quais sejam suas aplicações na vida real e qual sua importância, mas sei que tem grande importância nos vestibulares.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 2019 Série: 2ªA Identificação aluno: Aluno S

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se recorda desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

O logaritmo possui em sua estrutura a base, logaritmando e o logaritmando, possui também uma incógnita, quando de uma desobedece seu valor. Sua estrutura na álgebra é $\log_a x$ para não esquecer muito bem como na estrutura com uma operação para achar o resultado.

Descrevo a ele também aparecendo a função logarítmica, em geral estudá-lo foi bem repetitivo, as professoras que na época ensinavam repetia o que era o que na estrutura, mas não foi de outra forma eficiente. Em relação a suas aplicações práticas sei que ele tem uma importância, porém não foi mostrado nenhuma de suas aplicações práticas durante as aulas.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 6

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 1 - Diagnóstico

No ano anterior, na primeira série do Ensino Médio, você estudou os **logaritmos**. Nesse estudo, você deve ter utilizado modelos matemáticos de várias áreas para exercitar e compreender esse conteúdo.

Relate aqui o que você se lembra desse estudo, tal como: o que é o logaritmo? Como foi estudá-lo? Qual(is) sua(s) aplicação(s)? Sua importância? Como foram as aulas? Dê exemplos.

O logaritmo envolve potências em conjunto com incógnitas. É constituído de logaritmando e de logaritmo. Estudá-lo é utilizar os conceitos matemáticos já estudados como inveteração, elevar o expoente, achar a potência, etc. Era necessário sempre identificar a base e o expoente, para assim organizar a equação com incógnita. As aplicações, suponho eu, que podem ser usados na química, visto que lembro de uma questão de prova, além de escalas (como Richter). Sua importância é de aprofundar sobre as equações envolvendo as incógnitas. As aulas eram sempre repetindo a "fórmula" do logaritmo e a transformando, com um ou outro exercício mais complexo.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: __/__/2019 Série: __ Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 2 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que, de alguma forma, precisavam ser divididos, trocados ou utilizados em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros, ainda maiores, que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui, destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoadas entre os séculos XIV e XVI.

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

Na antiguidade o homem conforme foi tendo as dificuldades, ele teve que desenvolver uma lógica matemática para enfrentar uma sobrevivência. Com o tempo a vida e meio de comunicação muito utilizado naquela época era a troca ou venda de mercadorias, e consequentemente dependiam das operações de matemática básica e tempo etc, mas esse uso constante das operações foi diminuindo cada vez mais tornando-a indispensável para a nossa rotina.



Scanned with
CamScanner

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: ___/___/2019 Série: ___ Identificação aluno: Aluno 21

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 2 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que, de alguma forma, precisavam ser divididos, trocados ou utilizados em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros, ainda maiores, que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui, destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoadas entre os séculos XIV e XVI.

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

Desde os primórdios, o homem necessitou melhorar a primeira suas práticas comerciais, como por exemplo, no início do modo de produção capitalista, comercial (passagem do feudalismo para o capitalismo). Os burgueses começaram a surgir, e o desenvolvimento matemático também, uma vez que ela é de grande forma, usual para cálculos monetários, criação de balancos para medir a massa dos produtos, e dentre outros. Há um livro que aborda a vida de Epileu Epileu e retrata essa situação de aprimoramento matemático.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 2 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que, de alguma forma, precisavam ser divididos, trocados ou utilizados em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros, ainda maiores, que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui, destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoadas entre os séculos XIV e XVI.

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

A matemática foi criada e "descoberta" por causa das situações de necessidade. Tal fenômeno começou a ser utilizado desde os homens primitivos necessitarem de fazer trocas justas, medir terras, prever fenômenos arqueológicos, dividir coisas entre si, "entender" as estações do ano, para não prejudicarem as suas plantações, etc. Sendo assim, a matemática foi se desenvolvendo cada vez mais, e sendo mais compreendida, elaborando para uma maior facilidade na vida das pessoas.
--

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 2 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que, de alguma forma, precisavam ser divididos, trocados ou utilizados em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros, ainda maiores, que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui, destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoadas entre os séculos XIV e XVI.

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

O homem ao fazer trocas e começar a vender precisa a começar a ter conhecimento dos números e quantidades. Ao fazer alimentos, precisava saber a quantidade para cada um e saber dividir. Precisava cronometrar o tempo em algumas atividades. Ao construir casas, precisava saber as medidas e fazer cálculos para dar certo. Sendo assim, a partir dessas situações o homem precisou a conhecer os números, fazer cálculos e assim, a matemática surge.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2ª Identificação aluno: Aluno 5

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 2 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que, de alguma forma, precisavam ser divididos, trocados ou utilizados em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros, ainda maiores, que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui, destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoadas entre os séculos XIV e XVI.

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

Assim como diz no texto, as operações matemáticas na vida do homem surgiram da necessidade do homem, no começo foram utilizadas para organizar a sociedade, estabelecer uma balança comercial, e para organizar a cultura.

Depois começaram a ser usadas para diversas outras coisas como: a construção de casas, criação de ferramentas, para determinar quantidades e tempo. Com o tempo foram descobertas novas descobertas e se diversificando, até chegar nos dias de hoje.



Scanned with
CamScanner

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / /2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 2 - A necessidade

Depois de o homem aprender a se comunicar, foi preciso mensurar, medir, quantificar e limitar espaços, produtos e riquezas que, de alguma forma, precisavam ser divididos, trocados ou utilizados em escambo.

Usando os dedos, pedras, nós em cordas ou marcas em superfícies, o homem começa a desenvolver o registro desses bens. Tal desenvolvimento levou a outros, ainda maiores, que ajudaram a desenvolver a Matemática e as Tecnologias transformadoras da vida do homem.

As operações matemáticas básicas são utilizadas desde a Grécia antiga, na verdade, os povos egípcios e babilônios já conheciam e utilizavam as operações básicas. Aqui, destacaremos registros de somas realizadas por Diofanto, mas a estrutura que conhecemos é bem recente. Os sinais, ou seja, as representações das operações bem como seus algoritmos foram aperfeiçoadas entre os séculos XIV e XVI.

Apesar disso, o homem sempre usou as ferramentas matemáticas disponíveis para se aventurar e conhecer a vida e as tecnologias. Perceba que não há nada a sua volta que não tenha necessitado da Matemática para dar sentido a sua existência.

Com essa percepção das coisas do mundo, propomos um exercício de imaginação. Embarque numa grande viagem pelo conhecimento matemático e pela história da humanidade, procurando identificar quais as situações encontradas pelo homem que o levaram a necessitar e desenvolver as ferramentas matemáticas conhecidas?

E então, imaginou? Quais as situações percebidas por você e quais ferramentas matemáticas envolvidas?

Registre abaixo seus argumentos:

O homem, no início, usou a matemática para a convivência em grupo e a sobrevivência, por exemplo, as operações básicas ^{por contagem a frações} contregam nas trocas iniciais, taxas na contagem de rebanhos, na contagem do tempo para as plantações e viagens. Logo, conceitos que se estendiam à engenharia, que é a construção de largas, arcos, casas, fortalezas, etc. Assim, a matemática foi se aprofundando e se ramificando, sendo utilizada nas áreas de engenharia, finanças, destimativa, geometria e científica (Lembrando que a matemática da ciência foi reforçada por Galileu Galilei, um modelo que perdura até hoje). A matemática avança a sociedade humana e proporciona diversos campos da convivência. Até hoje a matemática continua se desenvolvendo, especialmente em áreas com tantos mistérios como a astronomia e a biologia.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 3 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo, no qual ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as operações a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

A) 16×32

B) 256×128

C) 512×2014

D) 64×512

A) $\begin{array}{r} 16 \\ \times 32 \\ \hline + 32 \\ + 48 \\ \hline 512 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 2014 \\ \times 512 \\ \hline 4028 \\ + 2014 \\ \hline 10070 \\ \hline 1.031.168 \end{array}$
B) $\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 2048 \\ + 512 \\ \hline 256 \\ \hline 32.768 \end{array}$	D) $\begin{array}{r} 512 \\ \times 64 \\ \hline 2048 \\ + 3072 \\ \hline 32.768 \end{array}$

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

Nessa atividade eu não senti quase que nenhuma dificuldade, mesmo que quanto mais quantidade de números na equação consequentemente a probabilidade de errar é cada vez maior. É bastante necessário ter bastante atenção em relação ao número de casas.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 23/04/2019 Série: _____ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 3 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo, no qual ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as operações a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

- A) 16×32
B) 256×128
C) 512×2014
D) 64×512

A) $\begin{array}{r} 16 \\ \times 32 \\ \hline 32 \\ 320 \\ \hline 512 \end{array}$	B) $\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 2048 \\ 1512 \\ \hline 256 \\ 32768 \end{array}$
C) $\begin{array}{r} 2014 \\ \times 512 \\ \hline 14028 \\ 2014 \\ \hline 10070 \\ 1031168 \end{array}$	D) $\begin{array}{r} 512 \\ \times 64 \\ \hline 2048 \\ 3072 \\ \hline 32768 \end{array}$

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

Quanto maior o número (em dezenas, centenas) maior a dificuldade para realizar, uma vez que se realiza a soma dos resultados parciais por cada número, se tiver algum erro, toda a conta também estará errada.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2ª Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 3 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo, no qual ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as operações a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

- A) 16×32
B) 256×128
C) 512×2014
D) 64×512

A) $\begin{array}{r} 16 \\ \times 32 \\ \hline 32 \\ + 480 \\ \hline 512 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 2014 \\ \times 512 \\ \hline 4028 \\ + 20140 \\ + 1007000 \\ \hline 1.031.168 \end{array}$
B) $\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 2048 \\ + 5120 \\ + 25600 \\ \hline 32.768 \end{array}$	D) $\begin{array}{r} 512 \\ \times 64 \\ \hline 2048 \\ + 30720 \\ \hline 32.768 \end{array}$

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

Com as operações feitas, consegui concluir que sim, as dificuldades aumentam conforme a conta também aumenta, devido necessitar de uma maior atenção e raciocínio, mas, devido todos os anos estudando multiplicação, não tive nenhuma dificuldade perante as operações, independente de sua tamanho/grau de dificuldade.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 23/04/2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 3 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo, no qual ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as operações a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

A) 16×32

B) 256×128

C) 512×2014

D) 64×512

A) $\begin{array}{r} 16 \\ \times 32 \\ \hline 32 \\ 48 \\ \hline 512 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 2014 \\ \times 512 \\ \hline 4028 \\ 2014 \\ 10070 \\ \hline 1031168 \end{array}$
B) $\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 2048 \\ 512 \\ 256 \\ \hline 32768 \end{array}$	D) $\begin{array}{r} 512 \\ \times 64 \\ \hline 2048 \\ 3072 \\ \hline 32768 \end{array}$

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

A medida que os números aumentam, as chances de erro também aumentam, porque se algum número ficar em algum lugar errado, o resultado estará totalmente errado também. Apesar disso não há muitas dificuldades. É preciso sempre manter a atenção para não cometer erros básicos.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 23/04/2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluno 5

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 3 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo, no qual ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as operações a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

A) 16×32

B) 256×128

C) 512×2014

D) 64×512

A) $\begin{array}{r} 16 \\ \times 32 \\ \hline 32 \\ 480 \\ \hline 512 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 2014 \\ \times 512 \\ \hline 4028 \\ 20140 \\ 100700 \\ \hline 1031168 \end{array}$
B) $\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 512 \\ 2560 \\ 25600 \\ \hline 32768 \end{array}$	D) $\begin{array}{r} 512 \\ \times 64 \\ \hline 2048 \\ 30720 \\ \hline 32768 \end{array}$

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

As chances de erro aumentam de acordo com o número de unidades dos números que estão multiplicando, além disso, quanto maior a quantidade de números, por exemplo 8 e 9, é necessário ter um pouco mais de cautela, do que quando se trata de números mais baixos, como 1, 2, 3 e 4.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 3 – O processo manual

Dando continuidade à nossa aventura, imagine que você é um astrônomo curioso e que vive em um tempo, no qual ainda não existem calculadoras. Usando o algoritmo da multiplicação das operações básicas, resolva as operações a seguir, que representam as coordenadas de algumas estrelas. Mãos a obra!

A) 16×32

B) 256×128

C) 512×2014

D) 64×512

A) $\begin{array}{r} 16 \\ \times 32 \\ \hline 32 \\ 48 \\ \hline 512 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 2014 \\ \times 512 \\ \hline 14028 \\ 2014 \\ 10070 \\ \hline 1031168 \end{array}$
B) $\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 2048 \\ 1512 \\ 256 \\ \hline 32768 \end{array}$	D) $\begin{array}{r} 512 \\ \times 64 \\ \hline 2048 \\ 3072 \\ \hline 32768 \end{array}$

Você deve ter percebido que o trabalho e as chances de erro aumentam consideravelmente a cada operação proposta. Qual o motivo disso? Discuta com seus colegas e justifique.

O motivo disso é que quanto maior os números da conta, mais multiplicações e somas serão requeridos até o resultado final. E como se fosse um processo acumulativo que, qualquer erro na soma ou na multiplicação acarretará em resultados errados e isso pode ocorrer e passar despercebido. Assim, multiplicações maiores precisam de um pouco mais de atenção.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 4 – A dificuldade

O avanço tecnológico não para. São inúmeras as invenções e conquistas do homem por todo o mundo. Temos o desenvolvimento da astronomia, das engenharias, dos sistemas econômicos e políticos, o uso do dinheiro como moeda de troca. Muitas são as necessidades do homem na busca de conhecer o mundo e das profissões, hoje, para que façam evoluir, tornar seguro e confiável seus processos.

Vamos destacar que a calculadora só foi criada em 1642, substituindo o ábaco, que era o instrumento mais próximo de uma, até então. Antes disso todos os cálculos eram realizados manualmente. Logo, o trabalho era imenso e as chances de erro enormes.

Assumindo que somos um navegador português, que precisava calcular valores das coordenadas de suas cartas náuticas, para prever rotas seguras para sua tripulação. Vamos, ainda, sem o auxílio da calculadora, resolver as operações apresentadas.

A) 10×10000

B) $0,0625 \times 0,031250$

C) $0,125 \times 0,25$

A) $\begin{array}{r} 10000 \\ \times 10 \\ \hline 100.000 \end{array}$	B) $\begin{array}{r} 0,031250 \\ \times 0,0625 \\ \hline 0,187500 \\ + 0,062500 \\ \hline 0,0019531250 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 0,125 \\ \times 0,25 \\ \hline 0,03125 \end{array}$
---	--	---

E então, como foi? Descreva seus sentimentos com relação às operações, suas soluções e resultados alcançados.

achei mais de menos fácil, porque precisa usar a régua e ainda mais a atenção em relação a vírgula e dentro outros



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2 Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 4 – A dificuldade

O avanço tecnológico não para. São inúmeras as invenções e conquistas do homem por todo o mundo. Temos o desenvolvimento da astronomia, das engenharias, dos sistemas econômicos e políticos, o uso do dinheiro como moeda de troca. Muitas são as necessidades do homem na busca de conhecer o mundo e das profissões, hoje, para que façam evoluir, tornar seguro e confiável seus processos.

Vamos destacar que a calculadora só foi criada em 1642, substituindo o ábaco, que era o instrumento mais próximo de uma, até então. Antes disso todos os cálculos eram realizados manualmente. Logo, o trabalho era imenso e as chances de erro enormes.

Assumindo que somos um navegador português, que precisava calcular valores das coordenadas de suas cartas náuticas, para prever rotas seguras para sua tripulação. Vamos, ainda, sem o auxílio da calculadora, resolver as operações apresentadas.

A) 10×10000

B) $0,0625 \times 0,031250$

C) $0,125 \times 0,25$

A) $\begin{array}{r} 10000 \\ \times 30 \\ \hline +00000 \\ 300000 \\ \hline 3000000 \end{array}$	B) $\begin{array}{r} 0,031250 \\ \times 0,0625 \\ \hline +0156250 \\ 00625000 \\ \hline 018750000 \\ 0000000000 \\ \hline 00000000000 \\ 000000000000 \\ \hline 00019531250 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 0,125 \\ \times 0,25 \\ \hline +01625 \\ 02500 \\ \hline 0000000 \\ 003125 \\ \hline 003125 \end{array}$
--	---	--

E então, como foi? Descreva seus sentimentos com relação às operações, suas soluções e resultados alcançados.

Com as operações feitas, devido da números serem muito pequenos, mas com um uma resolução grande, tive um sentimento de desamparo, mesmo não errando nenhuma conta. Foi necessário dobrar a atenção e lembrar de alguns conceitos, como o de andar com a vírgula, contar zeros, etc.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 4 – A dificuldade

O avanço tecnológico não para. São inúmeras as invenções e conquistas do homem por todo o mundo. Temos o desenvolvimento da astronomia, das engenharias, dos sistemas econômicos e políticos, o uso do dinheiro como moeda de troca. Muitas são as necessidades do homem na busca de conhecer o mundo e das profissões, hoje, para que façam evoluir, tornar seguro e confiável seus processos.

Vamos destacar que a calculadora só foi criada em 1642, substituindo o ábaco, que era o instrumento mais próximo de uma, até então. Antes disso todos os cálculos eram realizados manualmente. Logo, o trabalho era imenso e as chances de erro enormes.

Assumindo que somos um navegador português, que precisava calcular valores das coordenadas de suas cartas náuticas, para prever rotas seguras para sua tripulação. Vamos, ainda, sem o auxílio da calculadora, resolver as operações apresentadas.

A) 10×10000

B) $0,0625 \times 0,031250$

C) $0,125 \times 0,25$

A) $\begin{array}{r} 100000 \\ \times \\ \hline \end{array}$	B) $\begin{array}{r} 0,031250 \\ \times 0,0625 \\ \hline 0156250 \\ 0062500 \\ 0187500 \\ 0000000 \\ 0000000 \\ \hline 00019531250 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 0,125 \\ \times 0,25 \\ \hline 01625 \\ 0250 \\ 0000 \\ \hline 0,03125 \end{array}$
---	--	---

E então, como foi? Descreva seus sentimentos com relação às operações, suas soluções e resultados alcançados.

Os números são muito pequenos, com muitas casas decimais, dificultando ainda mais a conta e deixando-a cansativa. Nesse caso, o nível de atenção deve ser muito maior. Não tive dificuldade, porém não sabia se havia esquecido algo, pois são muitas operações, deixando a conta chata de se resolver e também cansativa.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 4 – A dificuldade

O avanço tecnológico não para. São inúmeras as invenções e conquistas do homem por todo o mundo. Temos o desenvolvimento da astronomia, das engenharias, dos sistemas econômicos e políticos, o uso do dinheiro como moeda de troca. Muitas são as necessidades do homem na busca de conhecer o mundo e das profissões, hoje, para que façam evoluir, tornar seguro e confiável seus processos.

Vamos destacar que a calculadora só foi criada em 1642, substituindo o ábaco, que era o instrumento mais próximo de uma, até então. Antes disso todos os cálculos eram realizados manualmente. Logo, o trabalho era imenso e as chances de erro enormes.

Assumindo que somos um navegador português, que precisava calcular valores das coordenadas de suas cartas náuticas, para prever rotas seguras para sua tripulação. Vamos, ainda, sem o auxílio da calculadora, resolver as operações apresentadas.

A) 10×10000

B) $0,0625 \times 0,031250$

C) $0,125 \times 0,25$

A) $\begin{array}{r} 10000 \\ \times 10 \\ \hline 100000 \end{array}$	B) $\begin{array}{r} 0,031250 \\ \times 0,0625 \\ \hline 0156250 \\ 0062500 \\ \hline 0187500 \\ 0000000 \\ 0000000 \\ \hline 00019531250 \end{array}$	C) $\begin{array}{r} 0,125 \\ \times 0,25 \\ \hline 0625 \\ 0250 \\ \hline 0000 \\ \hline 003125 \end{array}$
--	---	--

E então, como foi? Descreva seus sentimentos com relação às operações, suas soluções e resultados alcançados.

Trabalhamos com números pequenos, com muitas casas decimais. Foi um sentimento de focar, ter medo de errar algo banal e de longo tempo. A forma de fazer é longa, porém confiável e os resultados parecem estar corretos.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 5 – Os números na atualidade

Vamos pensar! Onde nos dias atuais encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos? Registre no quadro a seguir onde acredita sejam utilizados.

Unidades biológicas (como tamanho de uma célula)	→ monômetros 10^{-3} ↓ muito pequeno
Atômica, ou até mesmo medidas de corpos celestes (A notação científica simplia essas coisas)	

Nos dias atuais temos vivenciado o desenvolvimento das tecnologias digitais, cujo armazenamento de dados se dá utilizando uma unidade de medida da qual falamos muito, mas muitas vezes não temos ideia de sua real capacidade.

Vejamos, no mundo do armazenamento digital, a menor unidade de medida é o **bit**, que guarda um sinal que identifica zero ou um, pois toda comunicação é dada em código binário.

Um caractere é uma unidade de armazenagem, tal como uma letra, um espaço, um ponto de luz, etc. Este é formado por **8 bits**, passando a ser tratado como **1 byte**.

Para ficar clara essa explicação, na palavra **ESCOLA** o espaço ocupado em sua armazenagem demanda o uso de **6 bytes**, ou **48 bits**.

As relações entre as unidades de medidas seguem da seguinte maneira:

1 bit – menor unidade de medida

8 bits – 1 byte

1024 bytes – 1 kilobyte – 2^{10} – Kb

1024 kilobytes – 1 megabyte – 2^{20} – Mb – 1.048.576 bytes

1024 megabytes – 1 gigabyte – 2^{30} – Gb – 1.073.741.824 bytes

1024 gigabytes – 1 terabyte – 2^{40} – Tb – 1.099.511.627.776 bytes

1024 terabytes – 1 pentabyte – 2^{50} – Pb – 1.125.899.906.842.624 bytes

1024 pentabytes – 1 hexabyte – 2^{60} – Hb – 1.152.921.504.606.846.976 bytes

1024 hexabytes – 1 yotabyte – 2^{80} – Yb – 1.208.925.819.614.630.000.000.000 bytes

Imagine realizar operações com estes valores sem o auxílio da calculadora!

Que trabalho não é mesmo?



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / /2019 Série: 2- Identificação aluno: Flume/3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 5 – Os números na atualidade

Vamos pensar! Onde nos dias atuais encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos? Registre no quadro a seguir onde acredita sejam utilizados.

Para operações vão utilizadas para verificar e facilitar o cálculo de construções de lugares, medidas, objetos, calcular distâncias muito grandes, etc.

Nos dias atuais temos vivenciado o desenvolvimento das tecnologias digitais, cujo armazenamento de dados se dá utilizando uma unidade de medida da qual falamos muito, mas muitas vezes não temos ideia de sua real capacidade.

Vejamos, no mundo do armazenamento digital, a menor unidade de medida é o **bit**, que guarda um sinal que identifica zero ou um, pois toda comunicação é dada em código binário.

Um caractere é uma unidade de armazenagem, tal como uma letra, um espaço, um ponto de luz, etc. Este é formado por **8 bits**, passando a ser tratado como **1 byte**.

Para ficar clara essa explicação, na palavra **ESCOLA** o espaço ocupado em sua armazenagem demanda o uso de **6 bytes**, ou **48 bits**.

As relações entre as unidades de medidas seguem da seguinte maneira:

1 bit – menor unidade de medida

8 bits – 1 byte

1024 bytes – 1 kilobyte – 2^{10} – Kb

1024 kilobytes – 1 megabyte – 2^{20} – Mb – 1.048.576 bytes

1024 megabytes – 1 gigabyte – 2^{30} – Gb – 1.073.741.824 bytes

1024 gigabytes – 1 terabyte – 2^{40} – Tb – 1.099.511.627.776 bytes

1024 terabytes – 1 pentabyte – 2^{50} – Pb – 1.125.899.906.842.624 bytes

1024 pentabytes – 1 hexabyte – 2^{60} – Hb – 1.152.921.504.606.846.976 bytes

1024 hexabytes – 1 yotabyte – 2^{80} – Yb – 1.208.925.819.614.630.000.000.000 bytes

Imagine realizar operações com estes valores sem o auxílio da calculadora!

Que trabalho não é mesmo?



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 23/04/2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 5 – Os números na atualidade

Vamos pensar! Onde nos dias atuais encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos? Registre no quadro a seguir onde acredita sejam utilizados.

A verificação, bem como o cálculo de distâncias e escalas, a projeção ou construção de lugares muito grandes e muito pequenos, como construções próximas ao átomo de objetos são exemplos de locais onde encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos.

Nos dias atuais temos vivenciado o desenvolvimento das tecnologias digitais, cujo armazenamento de dados se dá utilizando uma unidade de medida da qual falamos muito, mas muitas vezes não temos ideia de sua real capacidade.

Vejamos, no mundo do armazenamento digital, a menor unidade de medida é o **bit**, que guarda um sinal que identifica zero ou um, pois toda comunicação é dada em código binário.

Um caractere é uma unidade de armazenagem, tal como uma letra, um espaço, um ponto de luz, etc. Este é formado por **8 bits**, passando a ser tratado como **1 byte**.

Para ficar clara essa explicação, na palavra **ESCOLA** o espaço ocupado em sua armazenagem demanda o uso de **6 bytes**, ou **48 bits**.

As relações entre as unidades de medidas seguem da seguinte maneira:

1 bit – menor unidade de medida

8 bits – 1 byte

1024 bytes – 1 kilobyte – 2^{10} – Kb

1024 kilobytes – 1 megabyte – 2^{20} – Mb – 1.048.576 bytes

1024 megabytes – 1 gigabyte – 2^{30} – Gb – 1.073.741.824 bytes

1024 gigabytes – 1 terabyte – 2^{40} – Tb – 1.099.511.627.776 bytes

1024 terabytes – 1 pentabyte – 2^{50} – Pb – 1.125.899.906.842.624 bytes

1024 pentabytes – 1 hexabyte – 2^{60} – Hb – 1.152.921.504.606.846.976 bytes

1024 hexabytes – 1 yotabyte – 2^{80} – Yb – 1.208.925.819.614.630.000.000.000 bytes

Imagine realizar operações com estes valores sem o auxílio da calculadora!

Que trabalho não é mesmo?



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2ª Identificação aluno: Aluno 05

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 5 – Os números na atualidade

Vamos pensar! Onde nos dias atuais encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos? Registre no quadro a seguir onde acredita sejam utilizados.

Utilizamos as operações com números grandes e pequenos para determinar resultados que apresentam de uma grandeza para outra. Podemos citar a área de física, que ao ser dada uma velocidade, a mesma não abundante quando utilizamos a notação científica para facilitar, ou pequenos, quando falamos de átomos ou pequenas partículas.

Nos dias atuais temos vivenciado o desenvolvimento das tecnologias digitais, cujo armazenamento de dados se dá utilizando uma unidade de medida da qual falamos muito, mas muitas vezes não temos ideia de sua real capacidade.

Vejamos, no mundo do armazenamento digital, a menor unidade de medida é o **bit**, que guarda um sinal que identifica zero ou um, pois toda comunicação é dada em código binário.

Um caractere é uma unidade de armazenagem, tal como uma letra, um espaço, um ponto de luz, etc. Este é formado por **8 bits**, passando a ser tratado como **1 byte**.

Para ficar clara essa explicação, na palavra **ESCOLA** o espaço ocupado em sua armazenagem demanda o uso de **6 bytes**, ou **48 bits**.

As relações entre as unidades de medidas seguem da seguinte maneira:

1 bit – menor unidade de medida

8 bits – 1 byte

1024 bytes – 1 kilobyte – 2^{10} – Kb

1024 kilobytes – 1 megabyte – 2^{20} – Mb – 1.048.576 bytes

1024 megabytes – 1 gigabyte – 2^{30} – Gb – 1.073.741.824 bytes

1024 gigabytes – 1 terabyte – 2^{40} – Tb – 1.099.511.627.776 bytes

1024 terabytes – 1 pentabyte – 2^{50} – Pb – 1.125.899.906.842.624 bytes

1024 pentabytes – 1 hexabyte – 2^{60} – Hb – 1.152.921.504.606.846.976 bytes

1024 hexabytes – 1 yotabyte – 2^{80} – Yb – 1.208.925.819.614.630.000.000.000 bytes

Imagine realizar operações com estes valores sem o auxílio da calculadora!

Que trabalho não é mesmo?



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 12 / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 5 – Os números na atualidade

Vamos pensar! Onde nos dias atuais encontramos a necessidade de operações com números tão grandes ou tão pequenos? Registre no quadro a seguir onde acredita sejam utilizados.

química/
Números tão pequenos encontramos na biologia e na nanotecnologia, pois se trabalha com dimensões extremamente pequenas/microscópicas. Já números grandes podemos achar em grandes construções, como uma gastronomia, já que se lida com grandes dimensões e distâncias.

Nos dias atuais temos vivenciado o desenvolvimento das tecnologias digitais, cujo armazenamento de dados se dá utilizando uma unidade de medida da qual falamos muito, mas muitas vezes não temos ideia de sua real capacidade.

Vejamos, no mundo do armazenamento digital, a menor unidade de medida é o **bit**, que guarda um sinal que identifica zero ou um, pois toda comunicação é dada em código binário.

Um caractere é uma unidade de armazenagem, tal como uma letra, um espaço, um ponto de luz, etc. Este é formado por **8 bits**, passando a ser tratado como **1 byte**.

Para ficar clara essa explicação, na palavra **ESCOLA** o espaço ocupado em sua armazenagem demanda o uso de **6 bytes**, ou **48 bits**.

As relações entre as unidades de medidas seguem da seguinte maneira:

1 bit – menor unidade de medida

8 bits – 1 byte

1024 bytes – 1 kilobyte – 2^{10} – Kb

1024 kilobytes – 1 megabyte – 2^{20} – Mb – 1.048.576 bytes

1024 megabytes – 1 gigabyte – 2^{30} – Gb – 1.073.741.824 bytes

1024 gigabytes – 1 terabyte – 2^{40} – Tb – 1.099.511.627.776 bytes

1024 terabytes – 1 pentabyte – 2^{50} – Pb – 1.125.899.906.842.624 bytes

1024 pentabytes – 1 hexabyte – 2^{60} – Hb – 1.152.921.504.606.846.976 bytes

1024 hexabytes – 1 yotabyte – 2^{80} – Yb – 1.208.925.819.614.630.000.000.000 bytes

Imagine realizar operações com estes valores sem o auxílio da calculadora!

Que trabalho não é mesmo?

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: ___/___/2019 Série: ___ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 6 – A busca por uma solução

Em um tempo no qual não havia calculadoras, temos a seguinte pergunta: Como facilitar essas operações sem o uso de calculadora?

Arquimedes desenvolveu uma técnica para calcular multiplicações com estes números de maneira mais fácil, trocando produtos por somas.

Observe os quadros a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,031250	0,015625	0,0078125	0,00390625	...

Ao tomarmos a multiplicação de 4 e 8, basta observar os valores acima destes números no quadro e somá-los, fazendo $2+3=5$, agora, observando o valor abaixo do número 5 temos o resultado da multiplicação, que é 32.

O mesmo vale para a divisão. O tomarmos 64 por 16, verificamos que o 64 encontra-se na coluna 6, e o 16 na coluna 4. Logo, $6-4=2$, na coluna 2 encontramos o resultado da operação, que é 4.

Usando a tabela de Arquimedes, comece resolvendo as operações 16 vezes 32 e 16 vezes 64. Depois, divirta-se procurando outros resultados de operações disponibilizadas na tabela.

16	32	512	$4+5=9$
16	64	1024	$4+6=10$

→ soma o
que está
em cima
e o result
do é que
está em
baixo



Percebeu alguma semelhança ou características dentre os valores da tabela e os resultados?
Quais? Quais os fundamentos matemáticos nos quais se baseou?

Sim. A disposição dos números, na primeira e segunda tabela, se baseia em 2^x em que x pode ser qualquer valor que está em parêntese. Por exemplo, na 3ª tabela a propriedade é um potências de 10 (10^x em que x também é o mesmo valor que já foi repetido). Baseando-se os valores da tabela, porém, em relação aos resultados, o método de Arquimedes além de simples, é lógico:

1	2	3	4	→	base são os somados
2	4	8	16		$2 = 1 + 1 = 2$
					$\log_3$ (não um soma e é diferente)

De uma forma mais clara, se quisermos multiplicar 2 por 4 (como no exemplo), basta tomar os "exponentes" de 1, 2, 3 e 4, somar (1 e 2), somar (3) e procurar o resultado correspondente (8).



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 6 – A busca por uma solução

Em um tempo no qual não havia calculadoras, temos a seguinte pergunta: Como facilitar essas operações sem o uso de calculadora?

Arquimedes desenvolveu uma técnica para calcular multiplicações com estes números de maneira mais fácil, trocando produtos por somas.

Observe os quadros a seguir:

1 ¹	2 ²	3 ³	4 ⁴	5	6	7	8	9	10	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,031250	0,015625	0,0078125	0,00390625	...

Ao tomarmos a multiplicação de 4 e 8, basta observar os valores acima destes números no quadro e somá-los, fazendo $2+3=5$, agora, observando o valor abaixo do número 5 temos o resultado da multiplicação, que é 32.

O mesmo vale para a divisão. O tomarmos 64 por 16, verificamos que o 64 encontra-se na coluna 6, e o 16 na coluna 4. Logo, $6-4=2$, na coluna 2 encontramos o resultado da operação, que é 4.

Usando a tabela de Arquimedes, comece resolvendo as operações 16 vezes 32 e 16 vezes 64. Depois, divirta-se procurando outros resultados de operações disponibilizadas na tabela.

16	32	512	$4+5=9$
16	64	1024	$4+6=10$
8	2	16	$3+3=6$
0,031250	0,0625	1000000000	$4+5=9$
128	8	1024	$6+6=12$
8	16	128	
4	8	32	



Percebeu alguma semelhança ou características dentre os valores da tabela e os resultados? Quais? Quais os fundamentos matemáticos nos quais se baseou?

A Tabela de Arquimedes foi criada com o intuito de facilitar cálculos, juntamente com uma maior rapidez, quando as operações são mais complexas, com números muito grandes ou pequenos. Mesmo sem uma calculadora, aqui consigo obter resultados certos, sem muito esforço.

Após utilizarmos a Tabela, concluímos que, tal mecanismo facilita a nossa vida e nos traz uma grande probabilidade de acerto, sem muito desperdício, como foi sem a Tabela.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: ALUNO 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 6 – A busca por uma solução

Em um tempo no qual não havia calculadoras, temos a seguinte pergunta: Como facilitar essas operações sem o uso de calculadora?

Arquimedes desenvolveu uma técnica para calcular multiplicações com estes números de maneira mais fácil, trocando produtos por somas.

Observe os quadros a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,031250	0,015625	0,0078125	0,00390625	...

Ao tomarmos a multiplicação de 4 e 8, basta observar os valores acima destes números no quadro e somá-los, fazendo $2+3=5$, agora, observando o valor abaixo do número 5 temos o resultado da multiplicação, que é 32.

O mesmo vale para a divisão. O tomarmos 64 por 16, verificamos que o 64 encontra-se na coluna 6, e o 16 na coluna 4. Logo, $6-4=2$, na coluna 2 encontramos o resultado da operação, que é 4.

Usando a tabela de Arquimedes, comece resolvendo as operações 16 vezes 32 e 16 vezes 64. Depois, divirta-se procurando outros resultados de operações disponibilizadas na tabela.

16	32	512
16	64	1024
8	64	512
2	512	1024
8	16	128
32	8	256
128	8	1024



Percebeu alguma semelhança ou características dentre os valores da tabela e os resultados?
Quais? Quais os fundamentos matemáticos nos quais se baseou?

O uso da Tabela de Arquimedes facilita muito quando não se tem uma calculadora. Baseando-se em sua forma de utilização e em seus princípios, fica fácil, rápido, prático e até mesmo mais divertido de se fazer uma operação que possua números muito grandes ou muito pequenos.

Os resultados obtidos foram facilmente identificados e encontrados na Tabela com certeza, e uma experiência muito mais legal de se fazer os cálculos, os quais geralmente perdemos muito tempo resolvendo e ainda temos a probabilidade de errar, diferentemente do uso da Tabela.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2ª Identificação aluno: Aluna OS

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 6 – A busca por uma solução

Em um tempo no qual não havia calculadoras, temos a seguinte pergunta: Como facilitar essas operações sem o uso de calculadora?

Arquimedes desenvolveu uma técnica para calcular multiplicações com estes números de maneira mais fácil, trocando produtos por somas.

Observe os quadros a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,031250	0,015625	0,0078125	0,00390625	...

Ao tomarmos a multiplicação de 4 e 8, basta observar os valores acima destes números no quadro e somá-los, fazendo $2+3=5$, agora, observando o valor abaixo do número 5 temos o resultado da multiplicação, que é 32.

O mesmo vale para a divisão. O tomarmos 64 por 16, verificamos que o 64 encontra-se na coluna 6, e o 16 na coluna 4. Logo, $6-4=2$, na coluna 2 encontramos o resultado da operação, que é 4.

Usando a tabela de Arquimedes, comece resolvendo as operações 16 vezes 32 e 16 vezes 64. Depois, divirta-se procurando outros resultados de operações disponibilizadas na tabela.

16	32	512	$4 + 5 =$
16	64	1024	$4 + 6 =$
16	128	2048	$4 + 7 =$
16	256	4096	$4 + 8 =$
16	512	8192	$4 + 9 =$
16	1024	16384	$4 + 10 =$
16	2048	32768	$4 + 11 =$



Percebeu alguma semelhança ou características dentre os valores da tabela e os resultados?
Quais? Quais os fundamentos matemáticos nos quais se baseou?

Sim, ao realizarmos apenas alguns das primeiras multiplicações, podemos perceber outras do mesmo mas fácil entendendo elas como referências, como por exemplo na tabela preenchida, que usamos o número 16 e depois, alguns outros, e o mesmo sentido para o dobro, basta apenas dobrar o produto, como $16 \times 32 = 512$ e $16 \times 64 = 1024$, e assim por diante.

Usamos para interpretar a tabela fundamentos de multiplicação, como o potências, e assim podemos também aplicar a tabela para divisão, basta as vezes de reves as mesmas, devemos substituí-las.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluno 06

**A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV**

ATIVIDADE 6 – A busca por uma solução

Em um tempo no qual não havia calculadoras, temos a seguinte pergunta: Como facilitar essas operações sem o uso de calculadora?

Arquimedes desenvolveu uma técnica para calcular multiplicações com estes números de maneira mais fácil, trocando produtos por somas.

Observe os quadros a seguir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...

11	12	13	14	15	(16)	17	18	19	20
2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

1	2	3	4	5	6	7	8	...
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,031250	0,015625	0,0078125	0,00390625	...

Ao tomarmos a multiplicação de 4 e 8, basta observar os valores acima destes números no quadro e somá-los, fazendo $2+3=5$, agora, observando o valor abaixo do número 5 temos o resultado da multiplicação, que é 32.

O mesmo vale para a divisão. O tomarmos 64 por 16, verificamos que o 64 encontra-se na coluna 6, e o 16 na coluna 4. Logo, $6-4=2$, na coluna 2 encontramos o resultado da operação, que é 4.

Usando a tabela de Arquimedes, comece resolvendo as operações 16 vezes 32 e 16 vezes 64. Depois, divirta-se procurando outros resultados de operações disponibilizadas na tabela.

16	32	512
16	64	1024
16	16	256
8	10	262144

$$4 + 5 = 9$$

$$4 + 6 = 10$$

$$4 + 7 = 8$$

$$8 + 10 = 18$$



Percebeu alguma semelhança ou características dentre os valores da tabela e os resultados?
Quais? Quais os fundamentos matemáticos nos quais se baseou?

Os valores da tabela são a sequência das potências de 2 em forma crescente. Os valores se relacionam com alguns dos resultados das potências de 2. Assim, os fundamentos matemáticos utilizados foram o de potência (de 2), e com isto, utilizar o método de cálculo de Arquimedes, facilitando grandes multiplicações.



UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 14/05/2019 Série: 2º A Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 8 – Explorando os expoentes

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Perceba que a primeira linha representa o expoente da potência, enquanto a segunda linha representa o resultado da potência.

Quadro1 $2^2 = 4$ $2^3 = 8$

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2 (expoente)	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

Resultado da
potência

Baseado na explicação anterior e usando sua calculadora, preencha os quadros a seguir adequadamente.

Quadro2

Expoente	2	3	6	9	10	13	14	...
Potência	9	27	729	19683	59049	1594323	14348907	...

Quadro3

Expoente	3	5	9	12	13	16	17	...
Potência	27	243	19683	531441	15946323	43046721	129140163	...

$3^3 = 27$ $3^5 = 243$

Apresente a seguir como foi seu processo para encontrar os valores que faltavam acima.

Eu utilizei a calculadora para facilitar os cálculos, pois sem ela seria mais complexo e propenso a erros.

33
V
9

33

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 14/05/2019 Série: _____ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 8 – Explorando os expoentes

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Perceba que a primeira linha representa o expoente da potência, enquanto a segunda linha representa o resultado da potência.

Quadro1

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2 ^(expoente)	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰

Baseado na explicação anterior e usando sua calculadora, preencha os quadros a seguir adequadamente.

Quadro2

Expoente	2	3	6	9	10	13	15	...
Potência	9	27	729	19683	59049	1594323	14348907	...
		3 ³	3 ⁶					

Quadro3

Expoente	3	5	9	12	13	16	17	...
Potência	27	243	19683	531441	15946323	43046721	129140163	...
	3 ³	3 ⁵						

Apresente a seguir como foi seu processo para encontrar os valores que faltavam acima.

foi um processo excessivo de olhar repentinamente na base 3, no qual tem-se durante essa prática (geralmente encontramos a potência

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 14/05/2019 Série: 2º A Identificação aluno: Aluno J.

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 9 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas atividades anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Na verdade, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos procurando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmação é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmação, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente. Assim, $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$.

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1	<u>0,33</u>	<u>0,44</u>	<u>0,66</u>	<u>1</u>	...
Potência	10	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4,5</u>	<u>10</u>	...

resultado sem 10
Esses expoentes existem? Como determina-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 14/05/2019 Série: _____ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 9 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas atividades anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Na verdade, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos procurando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmização é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmização, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente.

Assim, $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1	<u>0,30 ou 0,31</u>	<u>0,47</u>	<u>0,66</u>	<u>1</u>	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

base = 10

Esses expoentes existem? Como determina-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

Quando trabalhamos com potências, apresentamos de uma maneira simplificada a definição: de forma com que encontramos o expoente, o significado de encontrar o log. (ele é o expoente - a a^x a variável)

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

Expoente	1					...
Potência		2	3	4,5	10	...

O logaritmo é o expoente do resultado obtido, portanto é mais fácil utilizar este conceito para encontrá-lo.

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

Expoente	1	0,31	0,49	0,66	1	...
Potência		2	3	4,5	10	...

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Quadro 4

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	...
Potência	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000	...

Quadro 5

Quadro 5

Expoente	1	4	5	6	7	8	9	...
Potência	2	16	32	64	128	256	512	...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$$

Uso novamente a calculadora para facilitar na redução das frações, e que por ser um trabalho fácil não perco muito tempo para resolvê-las.

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Expoente	1	3	6	9	10	12	13	...
Potência	5	125	15625	1953125	9765625	244140625	1220703125	...

Quadro 5

Expoente	1	3	5	7	9	10	11	...
Potência	8	512	32768	2097152	134217728	1073741824	8589934592	...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

$5^1 = 5$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625$
.
.
.
$8^1 = 8$
$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
$8^5 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 32768$
.
.
.
* ordem aleatória de expoentes de forma que, como auxílio da calculadora, elabore o expoente p/ encontrar a potência

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / /2019 Série: 2^o Identificação aluno: Muno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 8 – Explorando os expoentes

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Perceba que a primeira linha representa o expoente da potência, enquanto a segunda linha representa o resultado da potência.

Quadro 1

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2 ^(expoente)	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰

Baseado na explicação anterior e usando sua calculadora, preencha os quadros a seguir adequadamente.

Quadro 2

Expoente	2	3	6	9	10	13	15	...
Potência	9	27	729	19683	59049	1594323	14348907	...

Quadro 3

Expoente	3	5	9	12	13	16	17	...
Potência	27	243	19683	531441	15946323	43046721	129140163	...

Apresente a seguir como foi seu processo para encontrar os valores que faltavam acima.

Para iniciarmos o exercício, tivemos uma parte da tabela já preenchida - logo depois, compreendemos que é necessário jogar valores para o expoente. Ao final, chegamos à conclusão de que a tabela nos leva ao logaritmo, devido ele ser o resultado do expoente.

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Expoente	2	4	5	7	9	11	12	...
Potência	49	2401	16807	823543	40353607	1977326	138627728	...

Quadro 5

Expoente	2	4	6	8	10	11	13	...
Potência	25	625	15625	390625	9765625	68828125	122070225	...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

Para o registro das ~~pot~~ das operações, usei o mesmo raciocínio e a mesma forma de pensar que o exercício anterior. Como já sabia a forma de realizar, joguei valores mais baixos, que mesmo assim, me levou a grandes resultados.

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 9 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas atividades anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Na verdade, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos procurando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmação é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmação, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente.

Assim, $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1	0,31	0,47	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Esses expoentes existem? Como determina-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

Depois da realização de todos os exercícios, consegui reabrir a tabela com logaritmo, devido ele ser o resultado do próprio expoente, usando na tabela.

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

Expoente	1	0,31	0,47	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Logaritmo - result. do expoente

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 8 – Explorando os expoentes

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Perceba que a primeira linha representa o expoente da potência, enquanto a segunda linha representa o resultado da potência.

Quadro1

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2(expoente)	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰

resultado

Baseado na explicação anterior e usando sua calculadora, preencha os quadros a seguir adequadamente.

Quadro2

Expoente	2	3	6	9	10	13	15	...
Potência	9	27	729	19683	59049	1594323	14348907	...

3²

Quadro3

Expoente	3	5	9	12	13	16	17	...
Potência	27	243	19683	531441	15946323	43046721	129140163	...

3³

Apresente a seguir como foi seu processo para encontrar os valores que faltavam acima.

A tabela é apresentada de uma maneira fácil e, com a utilização da calculadora fica mais prático e fácil. A única exigência é a estimativa para encontrar os valores e serem preenchidos, mas é um processo rápido também.

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Expoente	2	3	4	5	6	7	8	...
Potência	25	125	625	3125	15.625	78.125	390.625	...
	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	

Quadro 5

Expoente	2	3	4	5	6	7	8	...
Potência	36	216	1296	7776	46656	279.936	1.679.616	...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

Para os quadros, utilizei a base 5 e 6.
 Os resultados também foram obtidos por meio de estas
 notações na calculadora.

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluna 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 9 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas atividades anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Na verdade, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos procurando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmação é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmação, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente.

Assim, $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1	0,3	0,48	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

resol
dado base 10

Esses expoentes existem? Como determina-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

O processo que usei para encontrar o expoente também foi por estimativa, mas agora com números decimais, o que dificultou um pouco mais, porque não foi possível encontrar o expoente exato.

Além disso, foi evidenciado que o logaritmo é o expoente de uma potência. Então, pode concluir que:

$$\log_{10} 10 = 1, \text{ pois } 10^1 = 10.$$

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

QUADRO 2

Expoente	1					...
Potência		2	3	4,5	10	...

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2 Identificação aluno: aluno 5

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 8 – Explorando os expoentes

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Perceba que a primeira linha representa o expoente da potência, enquanto a segunda linha representa o resultado da potência.

Quadro1

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$2^{(\text{expoente})}$	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

Baseado na explicação anterior e usando sua calculadora, preencha os quadros a seguir adequadamente.

Quadro2

Expoente	2	3	6	9	10	13	15	...
Potência	9	27	729	19683	59049	1594323	14348907	...

Quadro3

Expoente	3	5	9	12	13	16	17	...
Potência	27	243	19683	531441	15946323	43046721	129140163	...

Apresente a seguir como foi seu processo para encontrar os valores que faltavam acima.

Primeiro usei a parte da tabela já feita como referência para descobrir a base, depois disso botei para achar os expoentes. Com o tempo, e pensando melhor, vi uma relação do logaritmo com as tabelas preenchidas, como se ele fosse a resposta para um método mais rápido e eficiente para achar o expoente.

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Expoente	2	4	5	7	9	11	13	...
Potência	49	2401	16.807	823.543	403.526.69	211.326.29	284.281.201	...

Quadro 5

Expoente	2	4	6	8	10	11	13	...
Potência	25	625	15.625	390.625	9.765.625	122.221.25	122.221.25	...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

Como a tabela foi feita e preenchida por mim, utilizei o mesmo raciocínio dos quadros 2 e 3, porém com números maiores como o 51607.

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: Identificação aluno: Aluno 5

**A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV**

ATIVIDADE 9 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas atividades anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Na verdade, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos procurando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmação é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmação, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente.

Assim, $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1	0,31	0,47	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

10
Esses expoentes existem? Como determina-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

Atividade de exercício: aqui podemos usar o logaritmo na função, e aqui podemos elevar para achar o expoente, como em 10^x vamos achar o logaritmo, mas não podemos achar o logaritmo. Portanto, não podemos o expoente, por exemplo: se tivermos potência = 27, base = 3, o logaritmo fica $\log_3 27 = x$, sendo x o expoente que desejamos achar.

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

Expoente	1	0,31	0,47	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Pense em tabelas, como as apresentadas anteriormente, e proponha que seu colega descubra quais os expoentes corretos para cada um. Em uma delas, a base deve ser menor que um inteiro. Façam uso da calculadora.

Quadro 4

Expoente	2	4	5	7	9	11	12	...
Potência	49	2401	16.807	123543	40353607	1927526	1.396.737.201	...

Quadro 5

Expoente	2	4	6	8	10	11	13	...
Potência	25	625	15.625	390.625	9.765.625	62.321.425	1.220.703.125	...

Espaço para registro das operações e registro dos processos usados.

Utilizou-se o uso da calculadora para se descobrir os expoentes de cada valor, além de conhecimentos prévios (como $7^2 = 49$) para deduzir qual era a base.

Confira as respostas de seu colega e apresente o resultado alcançado por ele.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 9 – Explorando o logaritmo

Foi possível verificar os vários tipos de registros realizados por vocês nas atividades anteriores. Em todos os casos foi possível perceber a estruturação do pensamento na busca por um resultado.

Na verdade, ao procurarmos o expoente de uma potência, estamos procurando o LOGARITMO! Na verdade, o LOGARITMO de um número dado é um EXPOENTE, que deve ser atribuído a uma determinada base, para que se reproduza o número dado.

Por isso, a logaritmação é entendido como a operação inversa da potenciação, alguns inclusive as consideram operações irmãs. Podemos comparar afirmando que a potenciação está para a logaritmação, assim como a soma está para a subtração, ou a multiplicação para a divisão.

Exemplificando: ao buscarmos o logaritmo de 9, na base 3, estamos procurando um número (x) tal que 3^x seja igual a 9, isto é, estamos em busca de um expoente.

Assim, $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$

Sendo assim, vamos pensar juntos a respeito de tudo isso nos casos apresentados abaixo.

Usando a calculadora da forma que melhor lhe convier, encontre os expoentes (logaritmos) das potências dadas.

QUADRO 1

Expoente	1	0,31	0,47	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Esses expoentes existem? Como determina-los?

Você deve ter percebido que o logaritmo veio possibilitar a realização de cálculos relacionados aos expoentes das potências.

Descreva a seguir qual a ideia de logaritmo que você possui agora, depois das atividades realizadas. Você seria capaz de escrever na linguagem matemática, generalizando, o que você realizou nos quadros acima, obtendo o logaritmo de um número dado na base 10?

Declare suas impressões, percepções, conclusões e defina logaritmo. Caso existam dúvidas, apresente-as.

A conclusão é que logaritmo é encontrar o expoente de uma base e é o inverso da potenciação. Realizá-lo não é tão difícil e parece ser muito utilizado em diversos locais.

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 2

Expoente	1	0,31	0,47	0,66	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

$10^x = 2$

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluna 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 10 – O Logaritmo

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 1 10^x

Expoente	1	2	3	4,5	10	...
Potência	10	0,3010	0,4771	0,6532	1	...

Agora responda:

- 1) O expoente pode ser um número real qualquer? *Sim.*
- 2) O expoente pode ser um número negativo? *Sim.*
- 3) O número do qual vamos buscar o logaritmo numa dada base pode ser um número real qualquer? *Não, pois se a base é positiva, log, é log de positivo.*
- 4) A base pode ser um número negativo? *Sempre n° positiva.*

Imagine um tempo onde não havia calculadoras, ou não era fácil encontrar uma para utilizar. Como encontrar de maneira rápida e confiável os resultados dos logaritmos?

Napier, escocês, no século XVII criou o conceito de logaritmo.

Ele fez isso usando como base um número irracional que hoje é conhecido como número neperiano, identificado pela letra e .

Existem fenômenos que a evolução e desenvolvimento depende do estado que se encontra. Por exemplo, o crescimento populacional cresce mais rápido se eu tenho mais população e mais devagar se tenho menos população, dinheiro investido tem a mesma maneira de se desenvolver, quanto mais dinheiro investido maior o retorno, menos dinheiro, menor o retorno. Temos vários fenômenos naturais que também seguem esta relação, nestes casos se utiliza a base $e=2,718...$ Napier criou a partir dessa base a tabela com milhares de resultados com logaritmos naturais, facilitando a vida de quem precisava fazer muitas contas.

Vejamos como essa tabela funciona.

Para encontrar o log de 127 na base 10 ($\log_{10} 127$), vamos até a linha 12 e coluna 7. No encontro delas, verificamos sua mantissa, que é a parte decimal do logaritmo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

Obtemos a parte decimal do log como 0,1038, para obtermos a parte inteira, calculamos de outro modo.

Mantissa = 0,1038

$$128 \begin{cases} 10^2 = 100 \\ 10^3 = 1000 \end{cases}$$

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, tomamos a potência do número mais próximo como parte inteira do log. Assim, o log de 127 na base e é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para lançar a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 10 – O Logaritmo

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 1

Expoente	1	0,3010	0,4771	0,6532	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Agora responda:

- 1) O expoente pode ser um número real qualquer? Sim
- 2) O expoente pode ser um número negativo? Sim
- 3) O número do qual vamos buscar o logaritmo numa dada base pode ser um número real qualquer? Não, ele tem que ser sempre positivo.
- 4) A base pode ser um número negativo? Não

Imagine um tempo onde não havia calculadoras, ou não era fácil encontrar uma para utilizar. Como encontrar de maneira rápida e confiável os resultados dos logaritmos?

Napier, escocês, no século XVII criou o conceito de logaritmo.

Ele fez isso usando como base um número irracional que hoje é conhecido como número neperiano, identificado pela letra e .

Existem fenômenos que a evolução e desenvolvimento depende do estado que se encontra. Por exemplo, o crescimento populacional cresce mais rápido se eu tenho mais população e mais devagar se tenho menos população, dinheiro investido tem a mesma maneira de se desenvolver, quanto mais dinheiro investido maior o retorno, menos dinheiro, menor o retorno. Temos vários fenômenos naturais que também seguem esta relação, nestes casos se utiliza a base $e=2,718...$ Napier criou a partir dessa base a tabela com milhares de resultados com logaritmos naturais, facilitando a vida de quem precisava fazer muitas contas.

Vejamos como essa tabela funciona.

Para encontrar o log de 127 na base 10 ($\log_{10} 127$), vamos até a linha 12 e coluna 7. No encontro delas, verificamos sua mantissa, que é a parte decimal do logaritmo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

Obtemos a parte decimal do log como 0,1038, para obtermos a parte inteira, calculamos de outro modo.

Mantissa = 0,1038

$$128 \begin{cases} 10^2 = 100 \\ 10^3 = 1000 \end{cases}$$

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, tomamos a potência do número mais próximo como parte inteira do log. Assim, o log de 127 na base e é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para lançar a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: bruno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 10 – O Logaritmo

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 1

Expoente	1	0,3010	0,4771	0,6532	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Agora responda:

- 1) O expoente pode ser um número real qualquer? Sim
- 2) O expoente pode ser um número negativo? Sim
- 3) O número do qual vamos buscar o logaritmo numa dada base pode ser um número real qualquer? Sim
- 4) A base pode ser um número negativo? Não

Imagine um tempo onde não havia calculadoras, ou não era fácil encontrar uma para utilizar. Como encontrar de maneira rápida e confiável os resultados dos logaritmos?

Napier, escocês, no século XVII criou o conceito de logaritmo.

Ele fez isso usando como base um número irracional que hoje é conhecido como número neperiano, identificado pela letra e.

Existem fenômenos que a evolução e desenvolvimento depende do estado que se encontra. Por exemplo, o crescimento populacional cresce mais rápido se eu tenho mais população e mais devagar se tenho menos população, dinheiro investido tem a mesma maneira de se desenvolver, quanto mais dinheiro investido maior o retorno, menos dinheiro, menor o retorno. Temos vários fenômenos naturais que também seguem esta relação, nestes casos se utiliza a base e=2,718... Napier criou a partir dessa base a tabela com milhares de resultados com logaritmos naturais, facilitando a vida de quem precisava fazer muitas contas.

Vejamos como essa tabela funciona.

Para encontrar o log de 127 na base 10 ($\log_{10} 127$), vamos até a linha 12 e coluna 7. No encontro delas, verificamos sua mantissa, que é a parte decimal do logaritmo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

0,2
- 0,3010
- 0,690

Obtemos a parte decimal do log como 0,1038, para obtermos a parte inteira, calculamos de outro modo.

Mantissa = 0,1038

$$128 \begin{cases} 10^2 = 100 \\ 10^3 = 1000 \end{cases}$$

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, tomamos a potência do número mais próximo como parte inteira do log. Assim, o log de 127 na base e é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para lançar a tábu, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábu de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 28/05/2019 Série: 2016 Identificação aluno: Nuno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 10 – O Logaritmo

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 1

Expoente	1	0,3010	0,4771	0,6532	1	...
Potência	10	2	3	4,5	10	...

Agora responda:

- 1) O expoente pode ser um número real qualquer? *Sim*
- 2) O expoente pode ser um número negativo? *Sim*
- 3) O número do qual vamos buscar o logaritmo numa dada base pode ser um número real qualquer? *Não, sempre*
- 4) A base pode ser um número negativo? *Não, a base pode ser somente positiva.*

Imagine um tempo onde não havia calculadoras, ou não era fácil encontrar uma para utilizar. Como encontrar de maneira rápida e confiável os resultados dos logaritmos?

Napier, escocês, no século XVII criou o conceito de logaritmo.

Ele fez isso usando como base um número irracional que hoje é conhecido como número neperiano, identificado pela letra e .

Existem fenômenos que a evolução e desenvolvimento depende do estado que se encontra. Por exemplo, o crescimento populacional cresce mais rápido se eu tenho mais população e mais devagar se tenho menos população, dinheiro investido tem a mesma maneira de se desenvolver, quanto mais dinheiro investido maior o retorno, menos dinheiro, menor o retorno. Temos vários fenômenos naturais que também seguem esta relação, nestes casos se utiliza a base $e=2,718...$ Napier criou a partir dessa base a tabela com milhares de resultados com logaritmos naturais, facilitando a vida de quem precisava fazer muitas contas.

Vejamos como essa tabela funciona.

Para encontrar o log de 127 na base 10 ($\log_{10} 127$), vamos até a linha 12 e coluna 7. No encontro delas, verificamos sua mantissa, que é a parte decimal do logaritmo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

Obtemos a parte decimal do log como 0,1038, para obtermos a parte inteira, calculamos de outro modo.

Mantissa = 0,1038

$$128 \begin{cases} 10^2 = 100 \\ 10^3 = 1000 \end{cases}$$

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, tomamos a potência do número mais próximo como parte inteira do log. Assim, o log de 127 na base e é 2,1038.

Napier demorou 20 anos para lançar a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

parte decimal do

Característica:

Quantidade de dígitos

vezes -1

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 28/05/2019 Série: _____ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 10 – O Logaritmo

Monte um quadro com a base 10, usando outras potências. Use a calculadora.

QUADRO 1

Expoente	1	2	3	4,5	10	...
Potência	10	100	1000	3162	10000	...

Agora responda:

- 1) O expoente pode ser um número real qualquer? sim
- 2) O expoente pode ser um número negativo? sim
- 3) O número do qual vamos buscar o logaritmo numa dada base pode ser um número real qualquer? sempre positivo
- 4) A base pode ser um número negativo? não

Imagine um tempo onde não havia calculadoras, ou não era fácil encontrar uma para utilizar. Como encontrar de maneira rápida e confiável os resultados dos logaritmos?

Napier, escocês, no século XVII criou o conceito de logaritmo.

Ele fez isso usando como base um número irracional que hoje é conhecido como número neperiano, identificado pela letra e.

Existem fenômenos que a evolução e desenvolvimento depende do estado que se encontra. Por exemplo, o crescimento populacional cresce mais rápido se eu tenho mais população e mais devagar se tenho menos população, dinheiro investido tem a mesma maneira de se desenvolver, quanto mais dinheiro investido maior o retorno, menos dinheiro, menor o retorno. Temos vários fenômenos naturais que também seguem esta relação, nestes casos se utiliza a base e=2,718... Napier criou a partir dessa base a tabela com milhares de resultados com logaritmos naturais, facilitando a vida de quem precisava fazer muitas contas.

Vejamos como essa tabela funciona.

Para encontrar o log de 127 na base 10 ($\log_{10} 127$), vamos até a linha 12 e coluna 7. No encontro delas, verificamos sua mantissa, que é a parte decimal do logaritmo.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014

Obtemos a parte decimal do log como 0,1038, para obtermos a parte inteira, calculamos de outro modo.

Mantissa = 0,1038

$$128 \begin{cases} 10^2 = 100 \\ 10^3 = 1000 \end{cases}$$

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, tomamos a potência do número mais próximo como parte inteira do log. Assim, o log de 127 na base e é 2,1038.

Napier demorou 20 anos para lançar a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx\dots$. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 2, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos.

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? -4

Tábua de Logaritmos Decimais

Esta tabela possui uma precisão de seis casas decimais.

Nos casos em que a sétima casa decimal é igual ou superior a 5, a mantissa foi arredondada somando-se 1 ao sexto algarismo.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898
29	462398	463893	465383	466868	468347	469822	471292	472756	474216	475671
30	477121	478566	480007	481443	482874	484300	485721	487138	488551	489958
31	491362	492760	494155	495544	496930	498311	499687	501059	502427	503791
32	505150	506505	507856	509203	510545	511883	513218	514548	515874	517196
33	518514	519828	521138	522444	523746	525045	526339	527630	528917	530200
34	531479	532754	534026	535294	536558	537819	539076	540329	541579	542825
35	544068	545307	546543	547775	549003	550228	551450	552668	553883	555094
36	556303	557507	558709	559907	561101	562293	563481	564666	565848	567026
37	568202	569374	570543	571709	572872	574031	575188	576343	577492	578639
38	579784	580925	582063	583199	584331	585461	586587	587711	588832	589950
39	591065	592177	593286	594393	595496	596597	597695	598791	599883	600973
40	602060	603144	604226	605305	606381	607455	608526	609594	610660	611723
41	612784	613842	614897	615950	617000	618048	619093	620136	621176	622214
42	623249	624282	625312	626340	627366	628389	629410	630428	631444	632457
43	633468	634477	635484	636488	637490	638489	639486	640481	641474	642465
44	643453	644439	645422	646404	647383	648360	649335	650308	651278	652246

45	653213	654177	655138	656098	657056	658011	658965	659916	660865	661813
46	662758	663701	664642	665581	666518	667453	668386	669317	670246	671173
47	672098	673021	673942	674861	675778	676694	677607	678518	679428	680336
48	681241	682145	683047	683947	684845	685742	686636	687529	688420	689309
49	690196	691081	691965	692847	693727	694605	695482	696356	697229	698101
50	698970	699838	700704	701568	702431	703291	704151	705008	705864	706718
51	707570	708421	709270	710117	710963	711807	712650	713491	714330	715167
52	716003	716838	717671	718502	719331	720159	720986	721811	722634	723456
53	724276	725095	725912	726727	727541	728354	729165	729974	730782	731589
54	732304	733197	733999	734800	735599	736397	737193	737987	738781	739572
55	740363	741152	741939	742725	743510	744293	745075	745855	746634	747412
56	748188	748963	749736	750508	751279	752048	752816	753583	754348	755112
57	755875	756636	757396	758155	758912	759668	760422	761176	761928	762679
58	763428	764176	764923	765669	766413	767156	767898	768638	769377	770115
59	770852	771587	772322	773055	773786	774517	775246	775974	776701	777427
60	778151	778874	779596	780317	781037	781755	782473	783189	783904	784617
61	785330	786041	786751	787460	788168	788875	789581	790285	790988	791691
62	792392	793092	793790	794488	795185	795880	796574	797268	797960	798651
63	799341	800029	800717	801404	802089	802774	803457	804139	804821	805501
64	806180	806858	807535	808211	808886	809560	810233	810904	811575	812245
65	812913	813581	814248	814913	815578	816241	816904	817565	818226	818885
66	819544	820201	820858	821514	822168	822822	823474	824126	824776	825426
67	826075	826723	827369	828015	828660	829304	829947	830589	831230	831870
68	832509	833147	833784	834421	835056	835691	836324	836957	837588	838219
69	838849	839478	840106	840733	841359	841985	842609	843233	843855	844477
70	845098	845718	846337	846955	847573	848189	848805	849419	850033	850646
71	851258	851870	852480	853090	853698	854306	854913	855519	856124	856729
72	857332	857935	858537	859138	859739	860338	860937	861534	862131	862728
73	863323	863917	864511	865104	865696	866287	866878	867467	868056	868644
74	869232	869818	870404	870989	871573	872156	872739	873321	873902	874482
75	875061	875640	876218	876795	877371	877947	878522	879096	879669	880242
76	880814	881385	881955	882525	883093	883661	884229	884795	885361	885926
77	886491	887054	887617	888179	888741	889302	889862	890421	890980	891537
78	892095	892651	893207	893762	894316	894870	895423	895975	896526	897077
79	897627	898176	898725	899273	899821	900367	900913	901458	902003	902547
80	903090	903633	904174	904716	905256	905796	906335	906874	907411	907949
81	908485	909021	909556	910091	910624	911158	911690	912222	912753	913284
82	913814	914343	914872	915400	915927	916454	916980	917506	918030	918555
83	919078	919601	920123	920645	921166	921686	922206	922725	923244	923762
84	924279	924796	925312	925828	926342	926857	927370	927883	928396	928908

85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	964788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo:

a) $\log 54$ $1,7323$

b) $\log 540$ $2,7323$

c) $\log 540000$ $5,7323$

d) $\log 5,4$ $0,7323$

e) $\log 0,54$ $-1 + 0,7323 \rightarrow -0,2677$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOData: 1 / 1 / 2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluna 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 11 – A função logarítmica

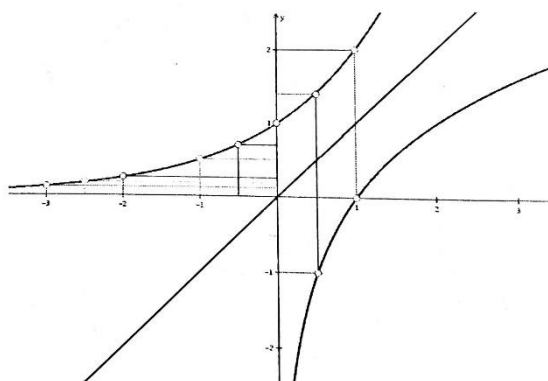
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo procura o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmo deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática, com ela podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias, da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$).

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	y = 2 ^x
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,12$
-2,5	0,176
-2	0,25
-0,5	0,707
-1	$y = 2^{-2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
0	$y = 2^0 = \frac{1}{2} = 0,5$
0,5	
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente permanece crescente no domínio, se não permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx\dots$. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 3, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos.

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? -4

85	923419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo:

a) $\log 54$ $1,7323$

7323

b) $\log 540$ $2,7323$

c) $\log 540000$ $5,7323$

d) $\log 5,4$ $0,7323$

e) $\log 0,54$ $-1 + 0,7323 = -0,2677$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOData: / / 2019 Série: Identificação aluno: Aluno SA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 11 – A função logarítmica

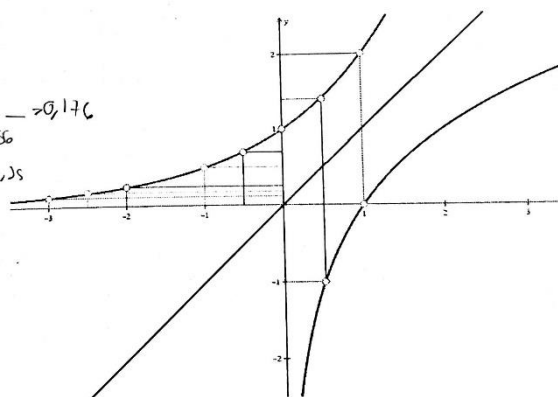
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo procura o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmo deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática, com ela podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias, da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$).

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,12$
-2,5	$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2} = 0,656$
-2	$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2} = 0,41$
-0,5	
-1	$y = 2^{-1} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
0	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
0,5	$0,707$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente permanece crescente no domínio, se não permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx\dots$. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 2, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos.

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? - 4

85	920419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo:

a) $\log 54$

a) $\log 54 = 1,7323$

b) $\log 540$

b) $\log 540 = 2,7323$

c) $\log 540000$

c) $\log 540000 = 5,7323$

d) $\log 5,4$

d) $\log 5,4 = 0,7323$

e) $\log 0,54$

e) $\log 0,54 = -1 + 0,7323 = -0,2677$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOData: / /2019 Série: Identificação aluno: Aluno 4A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 11 – A função logarítmica

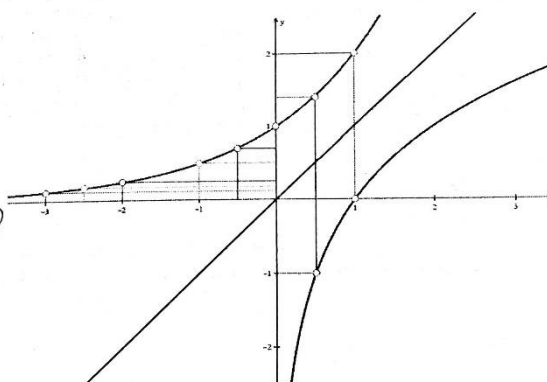
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo procura o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmo deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática, com ela podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias, da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$).

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,12$
-2,5	0,176
-2	0,25
-0,5	0,707
-1	$y = 2^{-2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
0	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
0,5	
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente permanece crescente no domínio, se não permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+y)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+y)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx....$. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 2, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos.

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? -4

85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo:

a) $\log 54$ a.) $\log 54 = 1,7323$

b) $\log 540$ b.) $\log = 2,7323$

c) $\log 540000$ c.) $\log = 5,7323$

d) $\log 5,4$ d.) $\log 5,4 = 0,7323$

e) $\log 0,54$ e.) $\log 0,54 = -1 + 0,7323$
 $\log 0,54 = -0,2677$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / /2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 11 – A função logarítmica

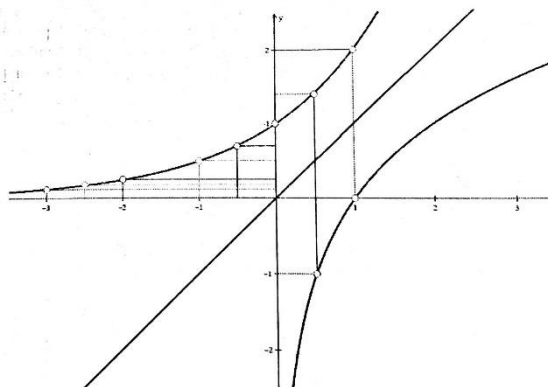
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo procura o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmo deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática, com ela podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias, da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$).

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,12$
-2,5	0,176
-2	0,25
-0,5	0,709
-1	$y = 2^{-2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
0	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
0,5	
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente permanece crescente no domínio, se não permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+y)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+y)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx....$. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é **2,1038**.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 2, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos.

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? -4

85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2323 2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo:

a) $\log 54 = 1,7323$ e

b) $\log 540 = 2,7323$ e

c) $\log 540000 = 5,7323$ e

d) $\log 5,4 = 0,7323$ e

e) $\log 0,54 = -1 + 0,7323 = -0,2677$ e

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOData: / / 2019 Série: Identificação aluno: Aluno 2**A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV****ATIVIDADE 11 – A função logarítmica**

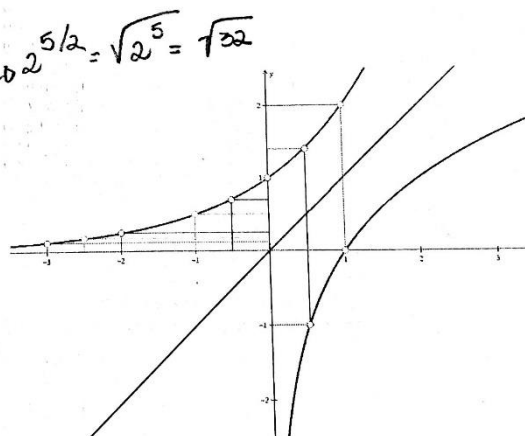
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo procura o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmo deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática, com ela podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias, da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$).

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
-2,5	$0,476 \parallel 2^{-2,5} = \frac{1}{2^{2,5}}$
-2	$0,25 \parallel 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
-0,5	$0,709$
-1	$y = 2^{-1} = \frac{1^1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5$
0	$y = 2^0 = \frac{1}{2^0} = 1$
0,5	
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente permanece crescente no domínio, se não permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

Como 127 é um número que está entre $10^2=100$ e $10^3=1000$, o seu logaritmo será um número entre 2 e 3, portanto $2 + 0,xxx\dots$. O número que encontramos na tabela é o que deve ser somado a 2. Assim, o log de 127 na base 10 é 2,1038.

Napier demorou 20 anos para construir a tábua, fato este acontecido no ano de 1614, quando foi procurado por Briggs, que propôs uma nova tábua de log, só que agora, utilizando somente a base 10.

1) Coloque a mão na massa! Complete as lacunas adequadamente.

a) Se a característica do logaritmo decimal de um número real maior ou igual a 1 é igual ao número de algarismos da parte inteira subtraída de uma unidade, então, a característica do logaritmo decimal de 345,67 é igual a 2, pois na parte inteira este número possui 3 algarismos! $3-1=2$

b) Para obtermos a característica do logaritmo decimal de um número real maior que 0 e menor que 1, contamos o número de zeros antes do primeiro algarismo diferente de 0. A característica é o valor simétrico desta contagem, ou seja, é a contagem com o sinal de negativo, já que o logaritmo decimal de um número menor que 1 e maior que 0 é negativo.

Qual é a característica do log 0,000504? -4

85	929419	929936	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979091	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2) Ache o logaritmo decimal dos números abaixo: $73,23$

a) $\log 54$ $1,07323$

b) $\log 540$ $2,07323$

c) $\log 540000$ $5,07323$

d) $\log 5,4$ $0,07323$

e) $\log 0,54$ $-1 + 0,7323 = -0,2677$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOData: 04/06/2019 Série: 2.º Ano Identificação aluno: Aluno 1A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 11 – A função logarítmica

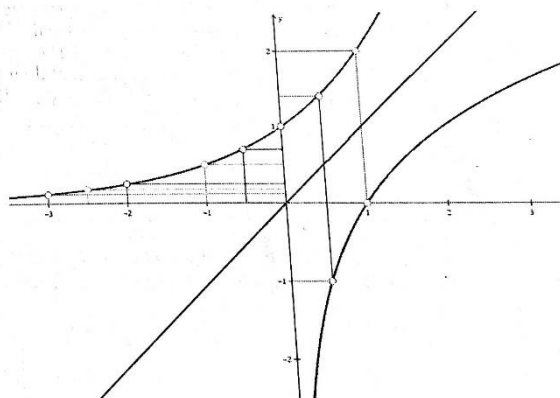
Já sabemos que a função logarítmica é inversa da função exponencial $f(x) = a^x$, essa função é definida para a real positivo e diferente de 1. Lembre-se de que o logaritmo procura o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x . Você bem sabe que o domínio de uma função representa os valores de x onde a função é definida. No caso da função logarítmica, devemos levar em consideração as condições de existência do logaritmo, portanto, o logaritmo deve ser positivo e a base também deve ser positiva e diferente de 1. Essas condições estão ligadas às condições da função exponencial.

A função exponencial é uma ferramenta importante para um número imenso de aplicações técnicas e cotidianas, como também no campo da matemática, com ela podemos calcular, por exemplo, valores financeiros ligados a juros, datar elementos arqueológicos e minerais através do carbono-14, calcular o crescimento de bactérias, da população de um lugar, meia-vida, dentre outras aplicações práticas. Definimos a função exponencial como $f(x) = a^x$, onde ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$).

Vejam um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2^x$

x	y = 2 ^x
-3	$y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,12$
-2,5	$\frac{1}{2^{2,5}} = \frac{1}{2^2 \cdot 2^{0,5}} = 0,176$
-2	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$
-0,5	0,707
-1	$y = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$
0	$y = 2^0 = 1$
0,5	$2^{0,5} = \sqrt{2} = 1,41$
1	$y = 2^1 = 2$
2	$y = 2^2 = 4$
3	$y = 2^3 = 8$



Se a é um número positivo diferente de 1 então a função exponencial $f(x) = a^x$ é a única função monótona (Uma função é dita monótona se ela preservar a relação de ordem no seu domínio, ou seja, se ela é crescente permanece crescente no domínio, se não permanece decrescente) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(1) = a$. E as funções do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$ são as únicas funções monótonas com a propriedade de que, para h fixo, o valor $f(x+h)$ é proporcional a $f(x)$ e o coeficiente de proporcionalidade $\frac{f(x+h)}{f(x)} = c$ depende apenas de h mas não de x (LIMA e WAGNER, 2001, p.53).

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2 Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 14 – Aplicação do modelo

Vamos tentar modelar esses fenômenos, a partir dos estudos realizados. Será que a variação deles satisfaz as condições para uma modelo exponencial/ logarítmico?

- 1) Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

$$\begin{aligned}
 &100 \cdot 1,02 \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad \quad \quad x + 0,02x = 1,02x \\
 &\quad \quad \quad 2\% = \frac{2}{100} = 0,02 \\
 &\quad \quad \quad 3x = 1,02x \\
 &\quad \quad \quad 1,02^n = 3 \\
 &h = \frac{\log 3}{\log 1,02} \quad \log_{1,02} 3 = n
 \end{aligned}$$

- 2) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

$$X(0,5)^3 = X\left(\frac{1}{2}\right)^3 = X\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$X \cdot \frac{1}{8} + X = \frac{9X}{8}$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / /2019 Série: 2 Identificação aluno: Aluna S

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 14 – Aplicação do modelo

Vamos tentar modelar esses fenômenos, a partir dos estudos realizados. Será que a variação deles satisfaz as condições para um modelo exponencial/ logarítmico?

- 1) Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

$$100 \cdot 1,02 = 102 \quad 102 \cdot 1,02 = 104,04$$

$$X \cdot 1,02^m = 3X$$

$$1,02^m = 3$$

$$\log_{1,02} 3 = m$$

$$m = \frac{\log 3}{\log 1,02} = \frac{0,4771}{0,0086} \approx 55,47$$

$$\log_{10} 3 = 0,4771$$

- 2) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

$$X \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$X \cdot 0,5^3 \text{ ou } X \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{X}{X \cdot \frac{1}{8} + X}$$

$$\frac{9X}{8}$$

$$1 - X$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 14 – Aplicação do modelo

Vamos tentar modelar esses fenômenos, a partir dos estudos realizados. Será que a variação deles satisfaz as condições para um modelo exponencial/ logarítmico?

1) Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

$$100 \times 1,02 = 102 \times 1,02 = 104,04 =$$

$$X \cdot 1,02^n = 3X$$

$$1,02^n = 3$$

$$\log_{1,02} 3 = n \rightarrow n = \frac{\log 3}{\log 1,02} = \frac{0,4771}{0,0086} = 55,47$$

2) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

$$X \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$X \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\begin{array}{r} + X \\ \hline X \cdot \frac{1}{8} + X \\ \hline \frac{9X}{8} \end{array}$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 1 / 1 / 2019 Série: 2 Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 14 – Aplicação do modelo

Vamos tentar modelar esses fenômenos, a partir dos estudos realizados. Será que a variação deles satisfaz as condições para um modelo exponencial/ logarítmico?

1) Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

$$100 \times 1,02 = 102 \times 1,02 = 104,04 \times 1,02 \dots$$

$$X \cdot 1,02^n = 3X$$

$$1,02^n = 3 \longrightarrow \log_{1,02} 3 = n$$

$$M = \frac{\log 3}{\log 1,02} = \frac{0,4771}{0,0086}$$

2) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

$$X \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \quad \swarrow \text{repor}$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{+ X}{X \cdot \frac{1}{8} + X}$$

$$\frac{9X}{8}$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: ___/___/2019 Série: ___ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 14 – Aplicação do modelo

Vamos tentar modelar esses fenômenos, a partir dos estudos realizados. Será que a variação deles satisfaz as condições para uma modelo exponencial/ logarítmico?

- 1) Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

valor depositado: 100

$$\begin{array}{c}
 100 \text{ \$} \xrightarrow[2\%]{1 \text{ mês}} 102 \xrightarrow[2\%]{1 \text{ mês}} 104,02 \rightarrow x \cdot 1,02^m = 3x \\
 \times 1,02 \quad \times 1,02 \quad \quad \quad 1,02^m = 3 \\
 \log_{1,02} 3 = m \\
 m = \frac{\log 3}{\log 1,02} = \frac{0,4770}{0,0086}
 \end{array}$$

- 2) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

24:8 = 3

$$\begin{array}{c}
 x \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \quad 100 \\
 x \cdot 0,125 = 30
 \end{array}$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 02/07/2019 Série: 2^a A Identificação aluno: Aluno 1

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 14 – Aplicação do modelo

Vamos tentar modelar esses fenômenos, a partir dos estudos realizados. Será que a variação deles satisfaz as condições para um modelo exponencial/ logarítmico?

1) Uma pessoa deposita uma quantia em caderneta de poupança à taxa de 2% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada triplica?

$$100 \cdot 0,02 = 2 \quad x + 0,02 = \boxed{1,02x}$$

$$100 \text{ reais} \xrightarrow[2\%]{1 \text{ mês}} = 102$$

$$2\% = \frac{2}{100} = 0,02$$

$$x \cdot 1,02^n = 3x$$

$$1,02^n = 3$$

$$\log^3_{1,02} = n$$

$$n = \frac{\log^3}{\log 1,02}$$

2) A bula de um remédio especifica que a concentração plasmática da substância absorvida tem vida média de 8 horas no organismo. Depois de 24 horas da primeira dose, outra dose é administrada. Qual a porcentagem da droga que ainda está no organismo 30 horas após a primeira dose?

$$\frac{0,477}{0,008}$$

$$x \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$$

$$x \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

$$+ x$$

$$x \cdot \frac{1}{8} + x$$

$$\frac{9x}{8}$$

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: __/__/2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluno 06

**A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV**

ATIVIDADE 13 – A função exponencial

Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA h	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG q	9/3=3	27/9=3	81/27=3	243/81=3	729/243=3	2187/729=3	6561/2187=3	19683/6561=3	59049/19683=3
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x+h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes? *A PA é igual aos expoentes.*
- Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência? *A base da PG é a base da potência.*
- Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x. Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).

QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$	$\frac{3^4 \cdot 3^1}{3^1}$	$\frac{3^4 \cdot 3^3}{3^3}$	$\frac{3^4 \cdot 3^5}{3^5}$	$\frac{3^4 \cdot 3^7}{3^7}$	$\frac{3^4 \cdot 3^9}{3^9}$	$\frac{3^4 \cdot 3^{11}}{3^{11}}$	...

Observe e complete a última linha.

Verifique na linha do $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, a variação muda em relação ao quadro 1.

Qual mudança aconteceu com o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, do quadro 1 para o quadro 2?

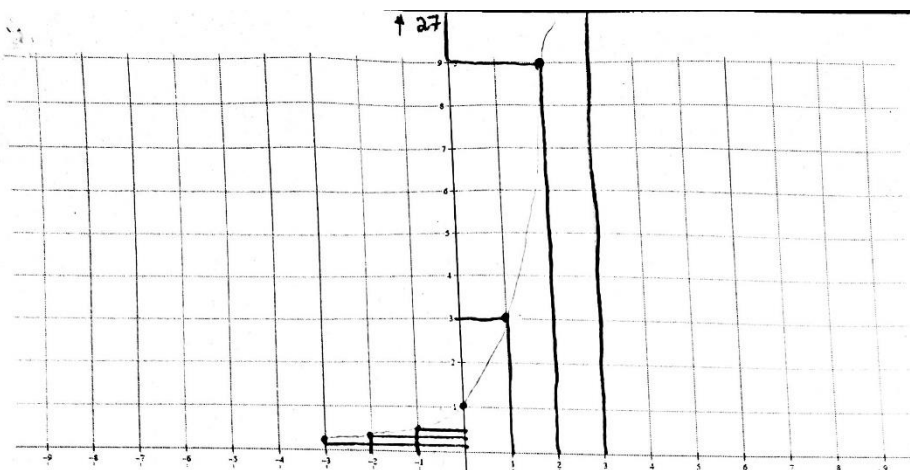
As razões também mudaram?

Qual relação você faz entre essas mudanças?

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

Dada a função $f(x)=3^x$

x	y=3 ^x
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

A razão do PG não é necessária nas razões $f(x+h)/f(x)$, sendo apenas a razão da PA necessária. Ex: $H \rightarrow 2, X \rightarrow 3 \Rightarrow 3^1 \cdot (3^2) = 3^1 \cdot 3^1 \cdot (3^2)$
 $3^1 \cdot (3^2) = 3^1$. Pode-se notar que usamos 3^1 e $3^2 \cdot 3^2$
 3^2 $f(x+h)/f(x)$ o resultado será sempre o mesmo, sendo que H determinará isso.

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x. Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 20 Identificação aluno: Aluno 5

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 13 – A função exponencial

Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA h	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG $q, \frac{f(x+h)}{f(x)}$	$9/3=3$	$27/9=3$	$81/27=3$	$243/81=3$	$729/243=3$	$2187/729=3$	$6561/2187=3$	$19683/6561=3$	$59049/19683=3$
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x+h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- 1) Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes? *A PA é os expoentes*
- 2) Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência? *A razão da PG é a mesma base da potência.*
- 3) Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x . Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).

QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^{10}}{3^1}$	...

 $h=2$

Observe e complete a última linha.

Verifique na linha do $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, a variação muda em relação ao quadro 1.

Qual mudança aconteceu com o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, do quadro 1 para o quadro 2?

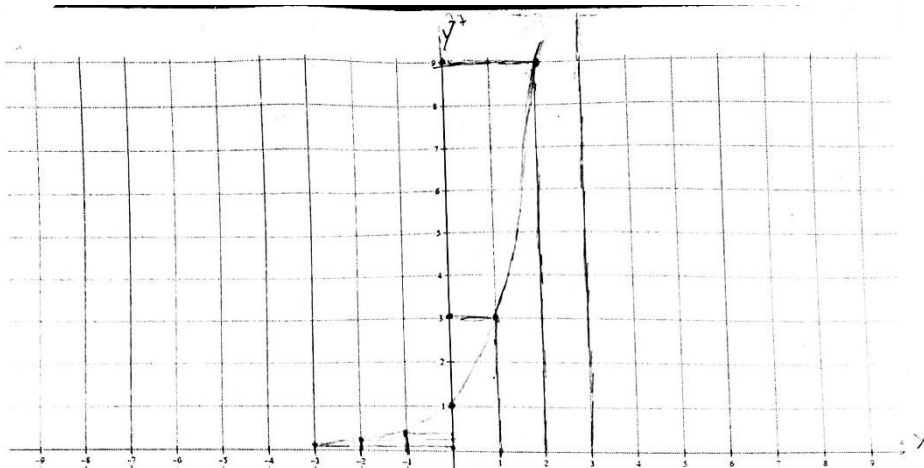
As razões também mudaram?

Qual relação você faz entre essas mudanças?

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

Dada a função $f(x)=3^x$

x	$y=3^x$
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

Definimos que a PA e a PG se relacionam dualmente, em que para encontrar $f(x+h)/f(x)$, utilizamos a razão da PA (R), e (q) que é a razão da PG, substituímos, e o resultado sempre dará o mesmo, que no caso é a q. Exemplo: razão PA $\rightarrow 1$, razão PG $\rightarrow 3$, então: $f(3' \cdot 3') = 3'$, $f(3' \cdot 3^2) = 3'$ e assim em sequência.

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x. Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2^o Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 13 – A função exponencial

Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA (h)	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG $\frac{q}{1}$	9/3=3	27/9=3	81/27=3	243/81=3	729/243=3	2187/729=3	6561/2187=3	19683/6561=3	59049/19683=3
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x+h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- 1) Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes? *A PA é os expoentes.*
- 2) Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência? *A razão da PG é a base da potência.*
- 3) Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x . Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).

QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^3}$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^5}$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^7}$	$\frac{3^1 \cdot 3^{10}}{3^9}$	...

$$h=2$$

$$q=9$$

Observe e complete a última linha.

Verifique na linha do $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, a variação muda em relação ao quadro 1.

Qual mudança aconteceu com o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, do quadro 1 para o quadro 2?

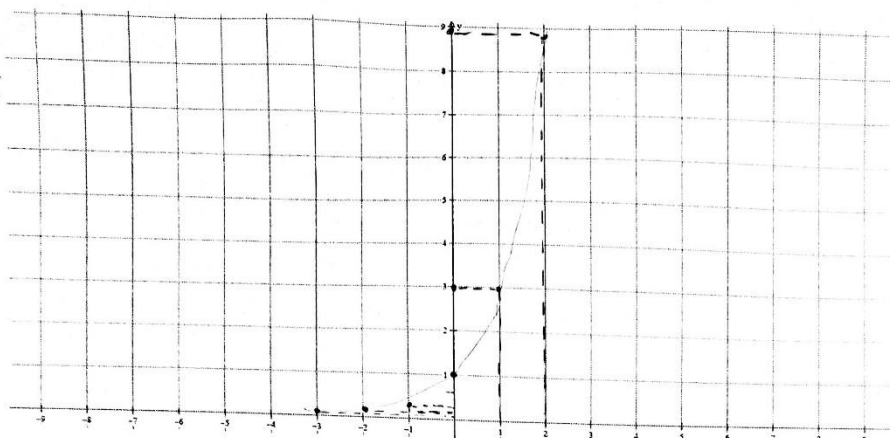
As razões também mudaram?

Qual relação você faz entre essas mudanças?

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

Dada a função $f(x)=3^x$

x	y=3 ^x
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

- A PA é dada por x e sua razão por h .
- A razão da PG é q e q será a base das potências representadas por x e h (q^{x+h}).
- Tendo em vista que a PG é dada por $f(x)$ e o x é a PA, tem-se a fórmula: $\frac{f(x+h)}{f(x)}$.

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x . Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADOData: 1 / 1 / 2019 Série: 2º Identificação aluno: plumo 3A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 13 – A função exponencial

Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA h	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG q	9/3=3	27/9=3	81/27=3	243/81=3	729/243=3	2187/729=3	6561/2187=3	19683/6561=3	59049/19683=3
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x+h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- 1) Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes? A PA é de razão 1.
- 2) Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência? A razão da PG é a base da potência.
- 3) Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x. Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).

$q \rightarrow$ elevado a PA

QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1}$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^3}$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^5}$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^7}$	$\frac{3^1 \cdot 3^{10}}{3^9}$	...

Observe e complete a última linha.

Verifique na linha do $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, a variação muda em relação ao quadro 1.

Qual mudança aconteceu com o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, do quadro 1 para o quadro 2?

As razões também mudaram?

Qual relação você faz entre essas mudanças?

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

Dada a função $f(x)=3^x$

x	y=3 ^x
-1	1/3
-2	1/9
-3	1/27
0	1
1	3
2	9
3	27

$$3^{-1} = 1/3$$

$$3^{-2} = 1/3^2 \rightarrow 1/9$$

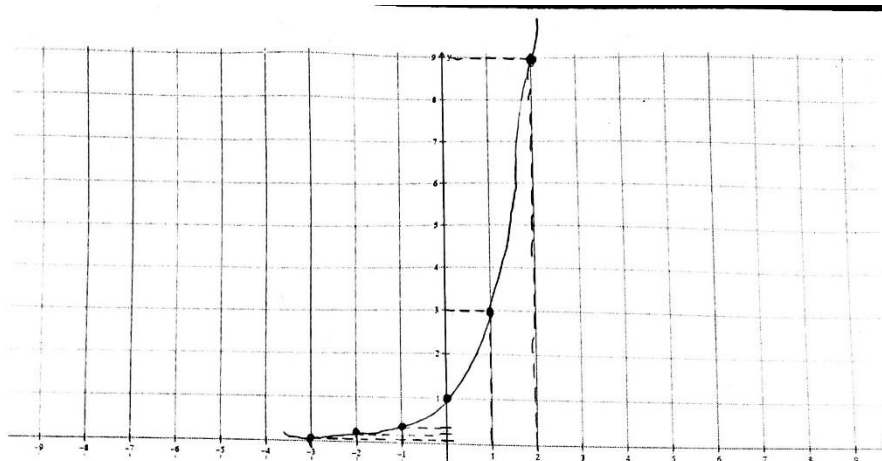
$$3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$$

$$3^0 = 1$$

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

De acordo com os quadros e com a aula, podemos entender que o valor da PA (x) é o expoente e a razão da PB é a base da potência. Além disso, a razão da PA vale h e é sempre um número subtraído no seu antecessor. E o "q", também presente na tabela é elevado a PA. Além disso a fórmula $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ também é usada aplicando as relações da tabela.

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x . Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 02/07/2019 Série: 2ª A Identificação aluno: Marcos J.

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 13 – A função exponencial

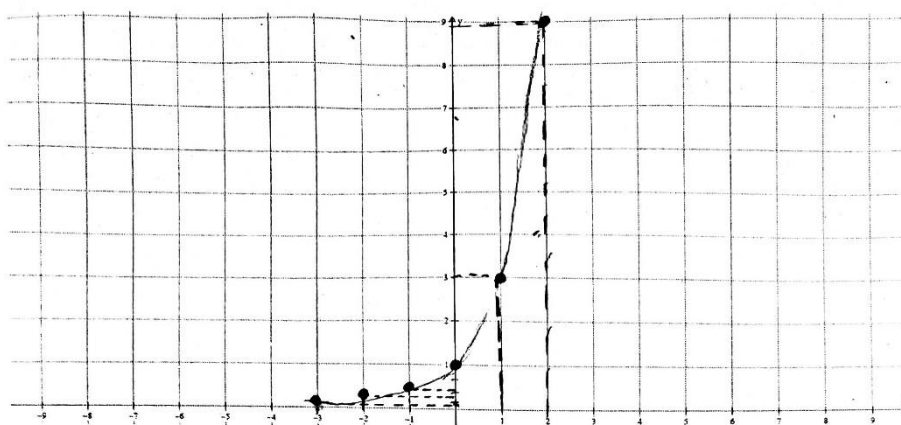
Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA h	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG q	9/3=3	27/9=3	81/27=3	243/81=3	729/243=3	2187/729=3	6561/2187=3	19683/6561=3	59049/19683=3
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x+h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- 1) Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes? *ela é os expoentes.*
- 2) Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência? *a razão da PG é a mesma base da potência.*
- 3) Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x . Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

Na função $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, demonstra-se que o valor sempre será igual a q . É de acordo com a última linha, é feita a descrição de PG (multiplicação da constante q para encontrar o próximo valor). A PA representa o valor dos expoentes, assim como a razão da PG (q) é igual a base da potência.

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x . Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

UNIVERSIDADE DE UBERABA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: ___/___/2019 Série: ___ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO
DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 13 – A função exponencial

Observe os quadros que seguem e verifique se há similaridades entre eles, registrando quais são.

QUADRO 1

PA (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
razão da PA h	1	3-2=1	4-3=1	5-4=1	6-5=1	7-6=1	8-7=1	9-8=1	10-9=1
PG f(x)	3 f(1)	9 f(2)	27 f(3)	81 f(4)	243 f(5)	729 f(6)	2187 f(7)	6561 f(8)	19683 f(9)
Razão da PG q	9/3=3	27/9=3	81/27=3	243/81=3	729/243=3	2187/729=3	6561/2187=3	19683/6561=3	59049/19683=3
q^x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9
q^{x-h}	3^1	3^{1+1}	3^{1+2}	3^{1+3}	3^{1+4}	3^{1+5}	3^{1+6}	3^{1+7}	3^{1+8}
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^1 \cdot 3^1}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^2}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^3}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^4}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^5}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^6}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^7}{3^1} = 3^1$	$\frac{3^1 \cdot 3^8}{3^1} = 3^1$
$q^{a+(n-1)h}$	q^a	q^{a+h}	q^{a+2h}	q^{a+3h}	q^{a+4h}	q^{a+5h}	q^{a+6h}	q^{a+7h}	q^{a+8h}

- 1) Qual a relação existente entre a razão da PA e os expoentes? *A PA representa os expoentes*
- 2) Qual a relação existente entre a razão da PG e a base da potência? *A razão da PG = base da Potência*
- 3) Relacione o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ com a seguinte afirmação.

Dada a função exponencial $f(x) = a^x$, os valores $f(1), f(2)$ e $f(3)$, ... formam uma progressão geométrica. Para toda função $f(x) = b \cdot e^{ax}$, de tipo exponencial, as razões $f(x+h)/f(x)$ dependem apenas de h mas não de x. Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial e significa que, no gráfico, quando tomamos pontos $a, a+h, a+2h, a+3h, \dots$ igualmente espaçados, cada um dos valores $f(a), f(a+h), f(a+2h), \dots$ se obtém do anterior multiplicando-o pela mesma constante (LIMA, WAGNER, 2001, p15).

$q=2$ QUADRO 2

PA	1	3	5	7	9	11	...
PG	3	27	243	2187	19683	177147	...
	3^1	3^3	3^5	3^7	3^9	3^{11}	...
	3^1	3^{1+2}	3^{3+2}	3^{5+2}	3^{7+2}	3^{9+2}	...
$\frac{f(x+h)}{f(x)}$		$\frac{3^3 \cdot 3^2}{3^3}$	$\frac{3^5 \cdot 3^3}{3^5}$	$\frac{3^7 \cdot 3^5}{3^7}$	$\frac{3^9 \cdot 3^7}{3^9}$	$\frac{3^{11} \cdot 3^9}{3^{11}}$	...

Observe e complete a última linha.

Verifique na linha do $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ a variação muda em relação ao quadro 1.

Qual mudança aconteceu com o quociente $\frac{f(x+h)}{f(x)}$, do quadro 1 para o quadro 2?

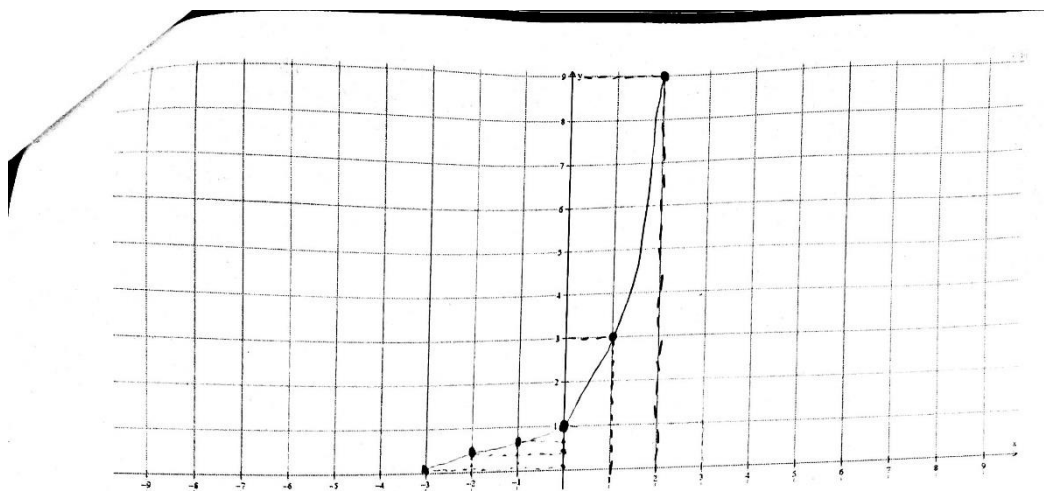
As razões também mudaram?

Qual relação você faz entre essas mudanças?

Sendo assim, poderíamos representar esta função no plano cartesiano da seguinte maneira:

Dada a função $f(x)=3^x$

x	y=3 ^x
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27



Com suas palavras, a partir do que foi apresentado pelos autores Wagner e Lima, e usando os quadros como referência, reescreva com suas palavras a definição apresentada.

A razão de $P_0(q)$ a (q^*) é a mesma base da potência.
 A razão de $P_1(h)$ é a mesma das potências.
 $\frac{f(x+h)}{f(x)} = q \rightarrow$ iguais

Assim, os fenômenos que são modelados por funções exponenciais tem a característica de $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ depender de h e não de x . Consequentemente, podemos afirmar que funções modeladas pela função logarítmica, em que se busca o expoente, são condicionadas por essa forma de variação.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 01/07/2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 06

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 12 – Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente relembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

É uma PA de razão 1.

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

É uma PG de razão 2.

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}

Se 27 pode ser escrito como 9×3 ou $3^2 \times 3^1$, usando as propriedades das potências temos que

$$3^2 \times 3^1 = 3^{2+1} = 3^3 = 27.$$

Como já vimos, isso garante que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^2 = 9$$

Sendo assim, responda:

- a) Ao dividir 729 por 81, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?
- b) Ao multiplicar 2187 por 9, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?

Registre aqui suas descobertas e percepções sobre a atividade:

É possível descobrir resultados de forma mais fácil quando ambos os valores podem ser convertidos em potências da mesma base.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 02/07/2019 Série: 2^a Identificação aluno: Aluno 5

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 12 – Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela vista na **Atividade 6**, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente lembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

Consta em uma PA, que vai aumentando com uma razão, que no caso é 1

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

Consta em uma PG, que vai multiplicando o termo anterior pela razão "2".

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}

Se 27 pode ser escrito como 9×3 ou $3^2 \times 3^1$, usando as propriedades das potências temos que $3^2 \times 3^1 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$.

Como já vimos, isso garante que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Sendo assim, responda:

- a) Ao dividir 729 por 81, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3? $3^6 \rightarrow 6-4=2$
- b) Ao multiplicar 2187 por 9, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3? $3^7 \rightarrow 7+2=9$

Registre aqui suas descobertas e percepções sobre a atividade:

A-) $6-4=2$

B-) $7+2=9$

Foi possível perceber que ao substituir o número pela sua base elevada a uma certa potência, reduzimos drasticamente o tamanho, como ocorre com 2187.9, que acaba ficando $3^7 \cdot 3^2 = 3^9$, levando a somente uma nota de algarismo final.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / /2019 Série: 2ª Identificação aluno: Aluno 4

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 12 – Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela vista na **Atividade 6**, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente relembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

PA: A razão é 1, pois os números estão sendo somados de 1 em 1.

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

PG: A razão é 2, pois os números estão sendo multiplicados por 2.

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

1ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2ª
3ª	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	3ª
	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	

potência

Se 27 pode ser escrito como 9×3 ou $3^2 \times 3^1$, usando as propriedades das potências temos que $3^2 \times 3^1 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$.

Como já vimos, isso garante que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

Sendo assim, responda:

- a) Ao dividir 729 por 81, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?
- b) Ao multiplicar 2187 por 9, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?

Registre aqui suas descobertas e percepções sobre a atividade:

a) $3^6 \div 3^4 = 3^2 = 9$

o expoente é 2.

6) $3^7 \cdot 3^2 = 3^9 = 19683$

O expoente é 9.

✓ Ao realizar a atividade, fica mais fácil e rápido usando as potências, além disso a utilização da tabela também contribui muito, tendo em vista que conseguimos verificar que a 2ª e 3ª linha são iguais.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: / / 2019 Série: 2º Identificação aluno: Aluno 3

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 12 – Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente relembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

PA +1
PG
x2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

Na primeira linha percebemos uma PA, devido a razão ser 1. Todos os números são acrescidos desse valor.

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

Na segunda linha percebemos uma PG, devido a razão ser 2. Todos os números são multiplicados por esse valor.

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

PA 1
PG 3
igual a
mais em
potência

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 02/07/2019 Série: 2ª Identificação aluno: Marcos

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 12 – Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela vista na **Atividade 6**, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente relembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

Na primeira identificamos uma PA, pois é a soma do anterior que determina qual será o próximo.

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

Na segunda, é uma PG, devido sua multiplicação de 2x.

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}

↳ potência

Se 27 pode ser escrito como 9×3 ou $3^2 \times 3^1$, usando as propriedades das potências temos que $3^2 \times 3^1 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$.

Como já vimos, isso garante que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

Sendo assim, responda:

- a) Ao dividir 729 por 81, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?
- b) Ao multiplicar 2187 por 9, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?

Registre aqui suas descobertas e percepções sobre a atividade:

a) $3^6 : 3^4 = 3^2$

6) $3^7 \cdot 3^2 = 3^9$

a) Com o uso tabela, facilita as ideias para achar as potências e fazer a multiplicação dos expoentes.

b) Quando a Idella novamente chei as policias da base 3 para depois tomar os experts.

UNIVERSIDADE DE UBERABA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E EXTENSÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO - DOUTORADO

Data: 2 / 7 / 2019 Série: _____ Identificação aluno: Aluno 2

A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO: A PARTIR DO EXPERIMENTO DIDÁTICO DE ZANKOV

ATIVIDADE 12 – Compreendendo a função mais a fundo

Voltamos a apresentar a tabela vista na Atividade 6, vamos analisá-la de outra maneira. Para isso, vamos inicialmente relembrar as características de uma PA e de uma PG.

Uma PA ou Progressão Aritmética é um tipo de sequência numérica, em que, a partir do segundo elemento, cada termo é a soma do seu antecessor com um valor constante, chamado de razão. Já, uma PG ou Progressão Geométrica é uma sequência numérica que cresce ou decresce pela ação do produto de uma taxa constante. Nessa progressão, os termos, a partir do segundo, são iguais ao produto do termo anterior por um valor constante, denominado de razão.

Tendo recordado essas características das progressões, observe a tabela. O que você identifica na primeira linha? E na segunda?

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na primeira linha:

PA $\rightarrow$ É uma soma da razão (1).

Descreva as características relacionadas a PA e/ou PG percebidas na segunda linha:

PG $\rightarrow$ É uma multiplicação da razão (2).

Ao subtrairmos na primeira linha qualquer um dos números dados pelo seu antecessor, descobriremos a razão da PA existente. Da mesma forma, dividindo qualquer um dos números da segunda linha por seu antecessor encontraremos a razão da PG.

Perceba que a razão da PA e da PG são constantes.

Observe mais uma vez a tabela a seguir e responda as perguntas:

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PG ³	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
PG ³	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴	3 ⁵	3 ⁶	3 ⁷	3 ⁸	3 ⁹	3 ¹⁰

Se 27 pode ser escrito como 9×3 ou $3^2 \times 3^1$, usando as propriedades das potências temos que $3^2 \times 3^1 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$.

Como já vimos, isso garante que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

Sendo assim, responda:

- a) Ao dividir 729 por 81, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?
- b) Ao multiplicar 2187 por 9, qual é o expoente do resultado representado em forma de potência de base 3?

Registre aqui suas descobertas e percepções sobre a atividade:

a) $3^6 : 3^4 = 3^2$

b) $3^7 \cdot 3^2 = 3^9$

PERCEPÇÕES: Em forma de potências, facilita muito mais a conta.

ANEXOS - AVALIAÇÕES

2) Excelente, pois aprendemos várias formas de desenvolver os exercícios, estimulando ainda mais o raciocínio lógico.

3) - Similaridades: somente o conteúdo. Já as diferenças, eu lembro que os exercícios que nos foram dados nos ajudaram a resolver os por meio de alguns modelos / exemplos rápidos e fáceis que contribuem na resolução de exercícios. Dessa forma, ganhamos mais tempo para continuar resolvendo os próximos exercícios.

4) Eu em particular, acredito que assim está ótimo e não precisa de nenhuma mudança.

5) O ritmo e a velocidade foram excelentes, pois o professor que explicava essa matéria explicava de forma clara e objetiva, tornando tudo um pouco mais fácil e de uma forma que ajudamos a entender a matéria.

6) Eu conseguia resolver os exercícios com mais facilidade do que a primeira vez que eu tive contato com a matéria.

7) Em certos exercícios eu tive um pouco de dificuldade, pois aprendemos um pouco a mais do que havíamos aprendido no 1º ano. Mas, com um pouco mais de raciocínio e empenho consegui entender as diferentes formas de resolução devido os exemplos feitos pelo professor.

8) Foi uma experiência incrível ter tido a oportunidade de aprender e aprofundar uma matéria, e principalmente ter conhecido sua equipe e como a usamos em nosso dia a dia mesmo sem percebermos.